Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика, финальный тур, 2025-2026 уч.г.
Время выполнения 180 минут

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

7 класс

7.1. К числу 2026 припишите по одной цифре слева и справа, чтобы полученное шестизначное число делилось на 936. Укажите все возможные решения.

Ответ: 420264. **Решение**. Разложим 936 на простые множители: $936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$. Чтобы число делилось на 936 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 8, на 9 и на 13. По признаку делимости на 8 трехзначное число, образованное тремя последними цифрами, должно делиться на 8. Следовательно, справа к 2026 можно приписать только четную цифру. Из чисел 260, 262, 264, 266, 268 на 8 делится только 264, поэтому справа можно приписать только цифру 4. Получаем число вида *20264. По признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна делиться на 9. Найдем сумму $2 + 0 + 2 + 6 + 4 = 14$. Чтобы сумма цифр числа *20264 делилась на 9, слева можно приписать только цифру 4, т.к. все остальные цифры в сумме с числом 14 не дают числа, кратного 9. Получаем число 420264. Осталось проверить, что оно делится на 13.

7.2. Аня и Боря вышли в 12-00 из пунктов A и B соответственно навстречу друг другу. Они шли с постоянными скоростями, причем скорость Бори на 10% больше скорости Ани. Они поравнялись друг с другом в 12-40 и продолжали своё движение. Во сколько Аня придет в пункт B?

Ответ: 13-24. **Решение**. Пусть расстояние между пунктами A и B равно S м, скорость Ани равна v м/мин, тогда скорость Бори равна $1{,}1v$ м/мин, а скорость сближения Ани и Бори равна $v + 1{,}1v = 2{,}1v$ (м/мин). По условию задачи $\frac{S}{2{,}1v} = 40$, откуда $\frac{S}{v} = 2{,}1 \cdot 40 = 84(\text{мин})$, т.е. Ане на путь от A до B требуется 84 мин, а поэтому в пункт B Аня придет в 13-24.

7.3. Дан прямоугольник, отличный от квадрата. Известно, что его площадь численно равна утроенному периметру. Докажите, что у этого прямоугольника меньшая сторона меньше 12, а большая – больше 12.

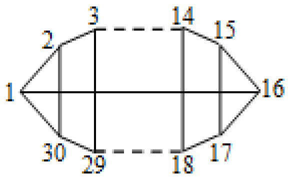
Решение. Пусть меньшая сторона прямоугольника равна x, а большая – y. Тогда утроенный периметр прямоугольника равен $3(2x + 2y) = 6x + 6y$, а площадь равна xy. По условию задачи $xy = 6x + 6y$. Запишем это равенство в виде $(x-6)(y-6) = 36$. В левой части последнего равенства оба множителя положительны, т.к. в противном случае произведение $(6-x)(6-y)$ будет меньше 36. Тогда меньший множитель $(x-6)$ меньше 6, а больший $(y-6)$ – больше 6. Отсюда следует результат.

7.4. **а)** Дано простое число, которое представлено в виде суммы квадратов четырех различных простых чисел. Может ли в этом представлении присутствовать 3^2? **б)** Найдите наименьшее простое число, представимое в виде суммы квадратов четырех различных простых чисел.

Ответ: **а)** не может; **б)** $199 = 2^2+5^2+7^2+11^2$. **Решение.** Пусть $p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2$, где p_1, p_2, p_3, p_4 – различные простые числа, взятые в порядке возрастания. Тогда $p_1 = 2$, т.к. иначе число p как сумма четырех нечетных чисел было бы четным (и больше 2). **а)** Если $p_2 = 3$, то каждое из чисел p_1^2, p_3^2 и p_4^2 при делении на 3 даёт остаток 1 (т.к. квадраты чисел, не кратных трём, дают остаток 1 при делении на 3). Но тогда $p>3$ и делится на 3, т.е. p не является простым числом, что противоречит условию. Значит, в указанном представлении числа p не может присутствовать 3^2. **б)** В силу пункта **а)** в указанном представлении нет 3^2, и поэтому наименьший «кандидат» для проверки $2^2+5^2+7^2+11^2 = 199$, и действительно, число 199 является простым. *Комментарий. Пункт б) можно решить и без пункта а) с помощью небольшого перебора (но при обосновании простоты и минимальности данного примера).*

7.5. В классе 30 человек. Может ли оказаться так, что **а)** у каждого ученика ровно три друга в классе? **б)** у любых двух учеников разное число друзей в классе?

Ответ: **а)** может; **б)** не может. **Решение.** **а)** См. схему (граф), на которой отрезки соединяют пары друзей.



б) Если предположить, от противного, что у всех разное количество друзей, то (поскольку 30 друзей быть не может), эти количества представляют собой все целые числа от 0 до 29. Но если у кого-то 0 друзей (т.е друзей нет), то не может быть ученика, у которого все 29 друзей. Противоречие.

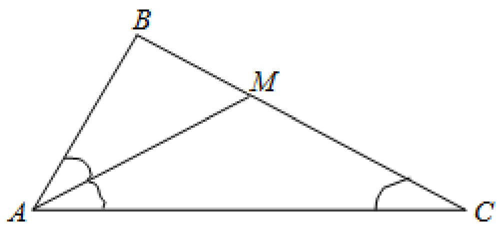
8 класс

8.1. Аня и Боря вышли в 12-00 из пунктов A и B соответственно навстречу друг другу. Они шли с постоянными скоростями, причем скорость Бори на 10% больше скорости Ани. Они поравнялись друг с другом в 12-40 и продолжали своё движение. Во сколько Аня придет в пункт B?

Ответ: 13-36. **Решение**. См. задачу 7.2.

8.2. В треугольнике ABC, у которого угол A вдвое больше угла C, проведена биссектриса AM. Можно ли утверждать, что угол A острый, если известно, что $CM > BM$?

Ответ: можно. **Решение.** Так как $\angle A = 2\angle C$ и AM – биссектриса $\angle BAC$, то $\angle BAM = \angle MAC = 0{,}5\angle A = \angle C$. Значит, треугольник AMC равнобедренный и $AM = MC$. Таким образом, из условия задачи следует, что $AM > BM$, и поэтому в треугольнике ABM имеем: $\angle B > \angle BAM = \angle C$. Поскольку $\angle B = 180° – \angle A – \angle C°$, получаем неравенство $180° – 3\angle C° > \angle C$, откуда $4\angle C < 180°$ и значит, $\angle C < 45°$. Таким образом, $\angle A = 2\angle C < 90°$.



Комментарий. Свойство биссектрисы CM : BM = CA : BA также позволяет сделать вывод о том, что $\angle B > \angle C$ в треугольнике ABC, т.к. CA > BA.

8.3. На доске записано несколько целых чисел. Саша заменил каждое число (стерев его) следующим образом: каждое число, делящееся на 3, он сократил в три раза, а остальные числа заменил на утроенные. Могло ли оказаться так, что сумма новых и сумма исходных чисел совпали, если сумма исходных чисел была равна **а)** 2026; **б)** 100?

Ответ: **а)** не могло; **б)** могло. **Решение.** Обозначим через A начальную сумму чисел, делящихся на 3, B – сумму остальных чисел. Тогда должно выполняться равенство $\frac{A}{3} + 3B = A + B \Leftrightarrow A = 3B$. Значит, сумма на доске должна быть равна $A + B = 4B$. **а)** Если $A + B = 2026$, то это приводит к противоречию с делимостью на 4. **б)** Если $A + B = 100$, то легко проверить такой пример: пусть на доске были записаны два числа 75 и 25.

8.4. Дано простое число p, которое представлено в виде суммы квадратов четырех простых чисел p_1, p_2, p_3, p_4., где $p < p_2 < p_3 < p_4$. Докажите, что $p_2 – p_1 > 2$.

Решение. В решении задачи 7.4 доказано, что $p_1 = 2$ и $p_2 > 3$. Отсюда следует результат.

8.5. Имеется 100 палочек, длина каждой из них больше единицы, но меньше $(1{,}5)^{100}$. Докажите, что найдутся три палочки, из которых можно сложить треугольник.

Решение. Рассуждая от противного, предположим, что никакие три палочки не составляют треугольник. Расположим данные палочки в порядке возрастания длины. Тогда их длины a_n представляют монотонно возрастающую (возможно, нестрого) последовательность, которая (в силу предположения) удовлетворяет неравенствам $a_{n+2} \geq a_n + a_{n+1}$ при всех $n = 1, 2, ..., 98$. Тогда $a_3 > 1 + 1 = 2$, $a_4 > 2 + 1 = 3$, $a_5 > 3 + 2 = 5$, и аналогично, получаем $a_6 > 8$, $a_7 > 13$, $a_8 > 21$, $a_9 > 34$, $a_{10} > 55$, $a_{11} > 89 > (1{,}5)^{11}$, т.к. $(1{,}5)^{11} < 87$, $a_{12} > 144 > (1{,}5)^{12}$, т.к. $(1{,}5)^{12} < 130$. Докажем теперь по индукции, что $a_n > (1{,}5)^n$ при всех $n > 10$. База индукции проверена последними оценками выше. Шаг индукции получается так: $a_{n+2} \geq a_n + a_{n+1} > (1{,}5)^n + (1{,}5)^{n+1} = (1{,}5)^n \cdot (1 + 1{,}5) > (1{,}5)^n \cdot (1{,}5)^2 = (1{,}5)^{n+2}$. Итак, индукционное утверждение доказано, и при $n = 100$ приходим к противоречию с условием задачи на максимальную длину палочек. *Комментарии. 1) Члены последовательности a_n оцениваются снизу последовательностью Фибоначчи, и для тех, кто знает формулу общего члена ряда Фибоначчи, можно было бы ею воспользоваться, предварительно доказав её. Но и после этого потребовалось бы* *доказывать оценку $a_n > (1{,}5)^n$. 2) Сравнения чисел 87 и 144 с соответствующими степенями 1,5 легко получаются без калькулятора, на листочке.*

9 класс

9.1. Дано сто чисел: 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \ldots, \sqrt{100}$. Вычислим 98 разностей (через одно число): $a_1 = \sqrt{3} - 1$, $a_2 = \sqrt{4} - \sqrt{2}$, …, $a_{98} = \sqrt{100} - \sqrt{98}$. Докажите, что $17{,}5 < a_1 + a_2 + \ldots + a_{98} < 17{,}6$.

Решение. $a_1 + a_2 + \ldots + a_{98} = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{4} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{98} - \sqrt{96} + \sqrt{99} - \sqrt{97} + \sqrt{100} - \sqrt{98} =$ $= \sqrt{100} + \sqrt{99} - \sqrt{2} - 1 = 9 + \sqrt{99} - \sqrt{2}$. В силу того, что $9{,}94^2 = 98{,}8036 < 99 < 99{,}0025 = 9{,}95^2$ и $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2 < 2{,}0164 = 1{,}42^2$, получаем следующие оценки $17{,}52 = 9 + 9{,}94 - 1{,}42 < 9 + \sqrt{99} - \sqrt{2} < 9 + 9{,}95 - 1{,}41 = 17{,}54$. Значит, $17{,}5 < a_1 + a_2 + \ldots + a_{98} < 17{,}6$.

Комментарий. Здесь для получения оценки сверху достаточно неравенств $\sqrt{99} < 10$ *и* $\sqrt{2} > 1{,}4$, *т.е. с точностью до десятых, а для оценки снизу надо оценивать квадратные корни с точностью до сотых:* $\sqrt{99} > 9{,}94$ и $\sqrt{2} < 1{,}42$. *Использование вместо строгих неравенств приближенных равенств $\approx$ для корней без уточнения погрешностей при оценке результата считается грубой ошибкой.*

9.2. На доске записано несколько целых чисел. Саша заменил каждое число (стерев его) следующим образом: каждое число, делящееся на 3, он сократил в три раза, а остальные числа заменил на утроенные. Могло ли оказаться так, что сумма новых и сумма исходных чисел совпали, если сумма исходных чисел была равна **а)** 2026; **б)** 100?

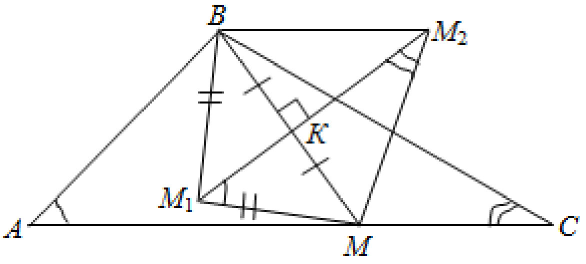
Ответ: а) не могло; **б)** могло. **Решение.** См. задачу 8.3.

9.3. Сколько существует шестизначных натуральных чисел, составленных из нечетных цифр, среди которых **а)** ровно одна семёрка и одна девятка? **б)** есть и семёрка и девятка?

Ответ: а) 2430. **б)** 8162. **Решение. а)** Количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр и содержащих ровно одну семерку и одну девятку определяется (по правилу произведения) как произведение числа способов выбора мест для семерки и девятки на число способов заполнения остальных мест любыми нечетными цифрами, кроме семерки и девятки. Место для семерки можно выбрать 6 способами, после чего место для девятки – 5 способами. Остальные 4 места в шестизначном числе заполняются любыми из оставшихся трёх цифр (1, 3 или 5). Таким образом, получаем $6 \cdot 5 \cdot 3^4 = 2430$. **б)** Для того, чтобы найти количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр, среди которых есть и семерка, и девятка , рассмотрим дополнительное множество, т.е. найдем количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр и не содержащих хотя бы одну из цифр 7 или 9. Количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр и не содержащих семерку, равно 4^6, и аналогично, количество шестизначных чисел из нечетных цифр, не содержащих девятку, равно 4^6. Если сложить эти количества, то при этом дважды будут учтены числа, составленные из нечетных цифр и не содержащие ни семерку, ни девятку, а таких чисел 3^6. Таким образом, количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр и не содержащих хотя бы одну из цифр 7 или 9, равно $2 \cdot 4^6 - 3^6$. Общее количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр, равно 5^6. Поэтому искомое количество равно $5^6 - 2 \cdot 4^6 + 3^6 = 8162$.

9.4. Дан треугольник ABC периметра P с острыми углами A и C. Для текущей точки M на стороне AC рассматриваются точки M_1 и M_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM. Чему равно наименьшее значение периметра треугольника M_1MM_2?

Ответ: $P/2$. **Решение.** Докажем сначала подобие треугольников M_1MM_2 и ABC. Пусть K – середина отрезка BM. Тогда точки M_1, K и M_2 лежат на одной прямой, перпендикулярной отрезку BM. По свойству вписанного угла A для описанной около треугольника ABM окружности с центром в M_1: имеем: $\angle BM_1M = 2\angle A$, а в силу того, что треугольник BM_1M с основанием BM равнобедренный, получаем: $\angle KM_1M = \angle A$. Аналогично, $\angle KM_2M = \angle C$. Значит, треугольники M_1MM_2 и ABC подобны, а в подобных



треугольниках коэффициент подобия равен отношению соответствующих высот. Высота в треугольнике M_1MM_2 из вершины M равна $MK = BM/2$, а высота в треугольнике ABC из вершины B не зависит от точки M. Так как углы A и C острые, то основание этой высоты лежит на стороне AC, и коэффициент подобия будет минимальным, когда наклонная BM совпадет с этой высотой. Таким образом, минимальное значение коэффициента подобия равно 0,5 и соответствует минимальному значению периметра треугольника M_1MM_2, равного $P/2$.

9.5. Докажите, что число $N = 2^{2026} + 1$ имеет не менее **а)** двух различных простых делителей; **б)** трех различных простых делителей.

Решение. а) N делится на 5, что следует из проверки последней цифры, равной 5, т.к. последние цифры степеней любого числа, в данном случае – двойки, повторяются с периодом 4 (другой способ проверки заключается в рассмотрении сравнения по модулю 5). Таким образом, $N = 5\cdot((2^{2026}+1)/5)$. Осталось проверить, что $(2^{2026}+1)$ не делится на 25 (и тогда любой простой делитель $N/5$ будет искомым). Поскольку $2^{10} = 1024$ имеет вид $25k - 1$, то $2^{2020} = (2^{10})^{202}$ будет иметь вид $25k + 1$ (даёт остаток 1 при делении на 25, т.к. степень 202 четная), и поэтому $2^{2026} = 2^{2020}\cdot 2^6 = 2^{2020}\cdot 64$ имеет вид $25k + 14$, а N имеет вид $25k + 15$. **б)** Дополним N до полного квадрата: $N = 2^{2026} + 1 = 2^{2026} + 2\cdot 2^{1013} + 1 - 2^{1014} = \left(2^{1013}+1\right)^2 - \left(2^{507}\right)^2 = \left(2^{1013}+1-2^{507}\right)\left(2^{1013}+1+2^{507}\right)$. Обозначим через A и B первый и второй сомножитель, соответственно. Эти сомножители взаимно просты, т.к. их разность равна 2^{508}, а сами сомножители нечетные. Первый сомножитель A делится на 5: действительно, при делении на 5 число 2^{1013} даёт остаток 2, а 2^{507} даёт остаток 3 (см. пункт а). Число B не делится на 5, т.к. отличается от A на степень двойки. Поэтому имеем разложение $N = 5\cdot\frac{A}{5}\cdot B$ на три множителя, и для того, чтобы показать, что эти три множителя делятся на разные простые числа, достаточно проверить, что A не делится на 25. Но это следует из пункта а), т.к. мы показали, что N не делится на 25.

10 класс

10.1. Дано сто чисел: 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,…, $\sqrt{100}$. Вычислим 98 разностей (через одно число): $a_1 = \sqrt{3} - 1$, $a_2 = \sqrt{4} - \sqrt{2}$, …, $a_{98} = \sqrt{100} - \sqrt{98}$. Докажите, что $17{,}5 < a_1 + a_2 + \ldots + a_{98} < 17{,}6$.

Решение. См. задачу 9.1.

10.2. Существуют ли рациональные, но не целые, числа x, y, для которых **а)** числа $2x^2 + y^2$ и $x^2 - 4y^2$ ненулевые целые; **б)** числа $2x^2 + y^2$ и $3x^2 - 4y^2$ целые?

Ответ: а) существуют; **б)** не существуют. **Решение. а)** пусть $2x^2 + y^2 = m$, $x^2 - 4y^2 = n$, где m,n – ненулевые целые числа. Решая эту систему, найдем $9x^2 = 4m + n$; $9y^2 = m - 2n$. Поэтому $x = x_1/3, y = y_1/3$, где x_1, y_1 – целые числа, не кратные трём. Тогда оба числа $2x_1^2 + y_1^2$ и $x_1^2 - 4y_1^2$ должны делиться на 9 (и не равняться 0). Положив, например, x_1=7, y_1=1, получим $x = 7/3$, $y = 1/3$; здесь x_1, y_1 выбраны с учетом возможных остатков квадратов чисел при делении на 9, а именно, ненулевые остатки могут быть только 1, 4 и 7 . (Если взять x_1=1, y_1=4, получим другой пример $x = 1/3$, $y = 4/3$, и т.п.) **б)** Решая вторую систему, получим, аналогично, что $11x^2$ – число целое. Если предположить противное, то $x = p/q$, где p и q – взаимно простые целые числа, $q > 1$. Но отсюда следует, что 11 делится на q^2, а это возможно лишь при $q = 1$. *Комментарий. Данные соотношения как системы двух уравнений с двумя неизвестными x^2 и y^2 для пунктов а) и б) отличаются тем, что у первой системы определитель равен 9, т.е. точному квадрату, и мы смогли привести пример искомого решения. Для второй системы определитель равен 11, и рациональных, но не целых, решений не существует. Для полного решения пункта а) необязательно приводить рассуждения, подобные выше изложенным: достаточно привести конкретный пример.*

10.3. Дан треугольник ABC площади S с острыми углами A и C. Для текущей точки M на стороне AC рассматриваются точки M_1 и M_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM. Чему равно наименьшее значение площади треугольника M_1MM_2?

Ответ: $S/4$. **Решение.** В силу подобия треугольников M_1MM_2 и ABC (см. задачу 9.4) наименьшее значение площади треугольника M_1MM_2 будет при наименьшем значении коэффициента подобия, который равен 1/2, когда точка M является основанием высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B. Поэтому наименьшее значение площади треугольника M_1MM_2 равно $(1/2)^2 \cdot S$.

10.4 Круг разбит на 125 секторов, занумерованных по часовой стрелке последовательными числами от 1 до 125 (начиная с некоторого сектора). Вначале в одном из секторов сидит кузнечик. Затем он прыгает, перемещаясь каждый раз по кругу на количество секторов по часовой стрелке, равное номеру текущего сектора. **а)** Докажите, что существует по меньшей мере 25 секторов, в которых кузнечик не сможет побывать. **б)** Какое наибольшее количество секторов он может посетить?

Ответ: б) 100. **Решение**. **а)** Пусть вначале кузнечик сидел в секторе под номером x. Тогда после одного прыжка он будет в секторе $x + x = 2x$, после двух прыжков – в секторе $4x$, и т.д.: после n прыжков – в секторе $2^n \cdot x$, где все номера секторов берутся по модулю 125. Если x делится на 5, то все числа $2^n \cdot x$ делятся на 5 и поэтому остатки $2^n \cdot x \pmod{125}$ при любых n будут кратны пяти. Тем самым в этом случае останутся свободными («непосещенными») как минимум 100 секторов с номерами, не кратными пяти. Если же x не делится на 5, то все числа $2^n \cdot x$ не кратны пяти, а значит, и остатки $2^n \cdot x \pmod{125}$ не кратны пяти, и в этом случае свободными останутся как минимум 25 секторов, кратных пяти. **б)** В пункте а**)** доказана оценка: кузнечик не может посетить более 100 секторов. Осталось привести пример. Пусть вначале кузнечик сидел в секторе с номером 1. Требуется доказать, что остатки $2^n \pmod{125}$ принимают 100 различных значений при $n = 0,1,\ldots 99$. Сначала проверим, что $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$. Имеем: $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$, отсюда $2^{20} = (2^{10})^2 \equiv 1 \pmod{25}$ Поэтому при разложении разности пятых степеней $(2^{20})^5 - 1 = = 2^{100} - 1 = (2^{20} - 1)(2^{80} + 2^{60} + 2^{40} + 2^{20} + 1)$ первый множитель делится на 25, а во втором множителе каждое из пяти слагаемых сравнимо с $1 \pmod{25}$ и значит, второй множитель делится на 5. Далее докажем, что для натуральных показателей $m < 100$ остатки $2^m \pmod{125}$ не равны единице и поэтому эти остатки при $m < 100$ не повторяются (т.к. из сравнения $2^{m_1} \equiv 2^{m_2} \pmod{125}$, где $m_1 < m_2$, следовало бы, что $2^{m_2 - m_1} \equiv 1 \pmod{125}$) . Действительно, если для некоторого наименьшего натурального $m < 100$ остаток $2^m \equiv 1 \pmod{125}$, то в силу сравнения $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$, показатель m должен быть делителем $100 = 2^2 \cdot 5^2$, а значит, делителем либо $50 = 2 \cdot 5^2$, либо $20 = 2^2 \cdot 5$. Но в первом случае $2^{50} - 1$ не делится даже на 5, а во втором – имеем $2^{20} - 1 = (2^{10} - 1)(2^{10} + 1)$, где первый множитель не делится на 5, а второй равен 1025, т.е. не делится на 125. *Комментарий. Сравнение* $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$ *следует из теоремы Эйлера (обобщение малой теоремы Ферма). При её использовании доказательство не требуется, нужно лишь сформулировать и проверить её условия в данном случае.*

10.5. Последовательность a_n задается рекуррентно: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{10}{9}$. Какова вероятность, что случайно выбранный член последовательности является целым числом?

Ответ: 1/6. **Решение.** Выражение для a_{n+2} перепишем в виде $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$. Поэтому для $n \geq 1$ будем иметь $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) = 4(a_n - a_{n-1}) = \ldots = 2^n(a_2 - a_1) = \frac{1}{9} \cdot 2^n$. Тогда $a_{n+2} = a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{n+2} - a_{n+1}) = 1 + \frac{1}{9}(1 + 2 + \ldots + 2^n) = 1 + \frac{1}{9}(2^{n+1} - 1)$. Поскольку $2^6 \equiv 1 \pmod 9$, то $2^{6k} \equiv 1 \pmod 9$ при всех натуральных k, и степени двойки дают остатки (mod 9) с периодом 6, а именно: 2, 4, 8, 7, 5, 1. Итак, члены подпоследовательности $a_1, a_7, a_{13}, a_{19}, \ldots$ (каждый шестой), и только они, будут целыми числами и поэтому искомая статистическая вероятность равна 1/6. *Комментарий. Те,* *кто знает метод решения линейных рекуррентных уравнений, могут применить его для нахождения формулы общего члена a_n. вместо вышеприведенного приема.*

11 класс

11.1. При каких значениях параметра a уравнение $5+\cos 2x = 4a+4a\sin x$ имеет решение?

Ответ: $a \geq 0{,}5$. **Решение.** Введем замену $t = \sin x$, где $|t| \leq 1$. Применяя формулу косинуса двойного угла, получим уравнение $t^2 + 2at + 2a - 3 = 0$. Требуется найти все a, для которых это уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [– 1; 1]. Пусть $f(t)$ – квадратный трехчлен (парабола) в левой части уравнения. Ветви параболы направлены вверх, а значение $f(-1) = 1 - 2a + 2a - 3 = -2 < 0$ (при всех a). Поэтому один из корней $f(t)$ меньше (–1) , а условие существования другого корня на отрезке [– 1; 1] равносильно неравенству $f(1) \geq 0$. Таким образом, $f(1) = 1 + 2a + 2a - 3 = 4a - 2 \geq 0$, т.е. $a \geq 0{,}5$.

11.2. Дан тетраэдр $SABC$. Требуется пересечь его плоскостью, параллельной основанию ABC, и выбрать точку M в плоскости основания так, чтобы объем тетраэдра $MA_1B_1C_1$ был наибольшим, где A_1, B_1, C_1 – точки пересечения плоскости сечения с боковыми ребрами тетраэдра $SABC$. Найдите отношение объема искомого тетраэдра $MA_1B_1C_1$ к объему тетраэдра $SABC$.

Ответ: 4/27. **Решение.** Так как плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, то объем тетраэдра $MA_1B_1C_1$ не зависит от положения точки M в плоскости ABC. Обозначим через x коэффициент подобия тетраэдров $SA_1B_1C_1$ и $SABC$. Тогда площади оснований тетраэдров $MA_1B_1C_1$ и $ABCS$ относятся как x^2, а высоты – как $(1 - x)$ (т.к. высоты тетраэдров $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ относятся как x, а высота тетраэдра $MA_1B_1C_1$ равна разности высот тетраэдра $SABC$ и тетраэдра $SA_1B_1C_1$). Обозначив отношение объемов данных тетраэдров через $y = y(x)$, $0<x<1$, получаем задачу на максимум функции $y = x^2(1-x)$. Решая её с помощью производной $y' = 2x - 3x^2$, находим критическую точку $x_0 = \dfrac{2}{3}$, в которой знак производной меняется с плюса на минус, и значит, достигается максимум $y(x_0) = 4/27$, а на границе ОДЗ $y(0)=y(1)=0$.

11.3. Круг разбит на 125 секторов, занумерованных по часовой стрелке последовательными числами от 1 до 125 (начиная с некоторого сектора). Вначале в одном из секторов сидит кузнечик. Затем он прыгает, перемещаясь каждый раз по кругу на количество секторов по часовой стрелке, равное номеру текущего сектора. **а)** Докажите, что существует по меньшей мере 25 секторов, в которых кузнечик не сможет побывать. **б**) Какое наибольшее количество секторов он может посетить?

Ответ: б) 100. **Решение.** См. задачу 10.4.

11.4. Последовательность a_n задается рекуррентно: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{10}{9}$. Какова вероятность, что случайно выбранный член последовательности является целым числом?

Ответ: 1/6. **Решение.** См. задачу 10.5.

11.5. Учитель написал на доске 9 различных положительных чисел и дал задание 6 ученикам вычислить и записать в тетради: Ане – набор произведений всевозможных пар чисел на доске, Боре – набор произведений всевозможных троек, и т.д., Егору – набор произведений всевозможных «семёрок». Могло ли в результате оказаться так, что для каждого из учеников есть другой ученик, у которого записан точно такой же набор? (Равные числа в наборе повторяются столько раз, сколько получается одинаковых произведений).

Ответ: могло. **Решение**. Пусть на доске учитель написал числа 2^n, где n принимает последовательные 9 целых значений от –4 до 4. Отметим, что произведение всех чисел на доске равно 1. Обозначим множество чисел на доске через $A = \{a_1, \ldots, a_9\}$, а множество шести учеников через Y. Обозначим учеников так: $y_2, y_3, \ldots, y_7$ в соответствии с полученным от учителя заданием, так что Аня = y_2, Боря = y_3, …, Егор = y_7. Количество выписанных чисел (произведений) в наборе ученика y_k равно C_9^k. Тем самым, у пары учеников y_k и y_{9-k} выписано одинаковое количество чисел (т.к. $C_9^k = C_9^{9-k}$). Покажем, что у этой пары и сами наборы совпадают. Пусть одно (произвольное) из произведений в наборе ученика y_k равно $a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k} = x$. Обозначим обратные величины $a_{i_1}^{-1} = a_{j_1}$, …, $a_{i_k}^{-1} = a_{j_k}$. Они тоже принадлежат множеству A в силу его определения. Произведение этих обратных величин равно x^{-1}. Рассмотрим дополнение $A \setminus \{a_{j_1}, ..., a_{j_k}\}$. Оно представляет собой подмножество в A, состоящее из $(9 - k)$ чисел. Произведение чисел этого подмножества равно $(x^{-1})^{-1} = x$ (т.к. произведение всех чисел из A равно 1). Итак, мы поставили в соответствие любому числу из набора y_k равное ему число из набора y_{9-k}. *Комментарий. 1) Как следует из доказательства, в конструкции примера на доске важно лишь наличие единицы и пар взаимно обратных величин. 2) Покажем, что соответствие, построенное в данном доказательстве, взаимно-однозначное (за отсутствие обоснования взаимной однозначности баллы за задачу предлагается не снижать). Указанное соответствие можно представить в виде композиции двух отображений на семействе подмножеств (мощности больше 1, но меньше 8) множества А. Первое из них переводит подмножество* $\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\}$ *в подмножество* $\{a_{j_1}, ..., a_{j_k}\}$, *составленное из обратных величин, а второе отображение ставит в соответствие подмножеству* $\{a_{j_1}, ..., a_{j_k}\}$ *его дополнение* $A \setminus \{a_{j_1}, ..., a_{j_k}\}$. *Оба этих отображения являются, очевидно, взаимно-однозначными, что и доказывает взаимную однозначность построенного соответствия.*