Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В. И. ВЕРНАДСКОГО»
Гуманитарно-педагогическая академия
Экономико-гуманитарный колледж

Методические рекомендации по дисциплине

ОУД.04 Математика

Специальность

38.02.06 Финансы

1. Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению практических и самостоятельных работ представляют собой часть учебно-методического комплекта по учебной дисциплине Математика и соответствуют требованиям ФГОС третьего поколения и рабочей программе по дисциплине.

Целью создания разработки является оказание помощи студентам первого курса в освоении учебного материала по дисциплине в учреждениях среднего профессионального образования.

В связи с введением в образовательный процесс нового Федерального государственного образовательного стандарта, который ориентирован на выработку у студентов общих и профессиональных компетенций – набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда, все более актуальной становится задача организации практической работы студентов.

Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Необходимыми структурными элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются инструктаж, проводимый преподавателем, а также анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями. Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания. Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), оборудование, аппаратура, материалы и их характеристики, порядок выполнения работы, таблицы, выводы (без формулировки), контрольные вопросы, учебная и специальная литература.

Оценки за выполнение практических работ выставляются по пятибалльной системе и учитываются как показатели текущей успеваемости студентов.

Методическая разработка содержит все структурные элементы для организации и проведения практических занятий. Практические задания представлены разнообразного характера в нескольких вариантах и разной степени сложности. Некоторые содержат устные задания базового уровня («ответить на вопросы»), выполнение которых обязательны, для того чтобы приступить ко второму блоку – решение практических заданий по вариантам. Интересными являются задания - заполни таблицу. Такие задания требуют твердых знаний теоретического материала и определенных вычислительных навыков по теме.

Цели практических и самостолятельныхзанятий:

-помочь студентам систематизировать, закрепить и углубить знания теоретического характера;

-научить студентов приемам решения практических задач, способствовать овладению навыками и умениями выполнения расчетов, графических и других видов заданий;

-научить их пользоваться справочной литературой и таблицами;

-формировать умение учиться самостоятельно, т. е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

В результате проведения практических занятий по дисциплине «Математика» студент должен:

знать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; - широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;

- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

уметь:

- находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения; выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;
- вычислять значение функции по заданному значению аргумента; определять основные свойства числовых функций; строить графики изученных функций;
- находить производные элементарных функций; использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков; применять производную для нахождения наибольшего и наименьшего значения;
- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
использовать графический метод решения уравнений и неравенств;
- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул; вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

Данную разработку могут использовать студенты для самостоятельной работы, а также преподаватели при проведении практических занятий по математике.

2.Перечень практических работ для студентов специальностей

Глава	Тема практической работы
Глава 1. Действительные числа	Практическая работа № 1. Решение квадратных уравнений и неравенств
	Практическая работа № 2. Решение уравнений и неравенств с помощью квадратных уравнений
Глава 2. Степенная функция	Практическая работа № 3. Упрощение выражений содержащие степени и корни
Глава 3. Показательная функция	Практическая работа № 4. Применение свойств показательной функции при решении задач
	Практическая работа № 5. Решение показательных уравнений и неравенств
Глава 4. Логарифмическая функция	Практическая работа № 6. Применение определения логарифма и свойств при решении задач
	Практическая работа № 7. Построение графиков логарифмических и показательных функций
	Практическая работа № 8.Понятие логарифма. Свойства логарифмов. Преобразование и вычисление значений логарифмических выражений
	Практическая работа № 9. Решение логарифмических уравнений
	Практическая работа №10. Решение логарифмических неравенств
Глава 5. Параллельность прямых и плоскостей	Практическая работа № 11. Основные понятия и аксиомы стереометрии
	Практическая работа № 12.Аксиомы стереометрии и следствия из них
	Практическая работа № 13. Параллельность прямых в пространстве
	Практическая работа № 14.Скрещивающиеся прямые
	Практическая работа № 15. Параллельность прямой и плоскости
	Практическая работа № 16. Параллельность двух плоскостей
Глава 6. Перпендикулярность прямых и плоскостей	Практическая работа № 17. Перпендикуляр и наклонная
	Практическая работа № 18. Решение задач. Перпендикуляр и наклонная
	Практическая работа № 19. Перпендикулярность прямой и плоскости
	Практическое занятие № 20. Нахождение угла между прямыми в пространстве
	Практическая работа № 21. Нахождение угла между прямой и плоскостью
	Практическая работа № 22. Нахождение двугранного угла
	Практическая работа № 23. Применение перпендикулярности плоскостей при решении задач
Глава 7. Комбинаторика	Практическая работа № 24.Решение простейших комбинаторных задач
Глава 8. Элементы теории вероятности	Практическая работа №25. Решение задач на вычисление классической вероятности
	Практическая работа № 26. Решение задач вероятностными методами
	Практическая работа № 27. Вычисление вероятностей независимых событий
Глава 9 . Тригонометрические формулы	Практическая работа № 28. Построение и преобразование графиков тригонометрических функций
	Практическая работа № 29. Основы тригонометрии
	Практическая работа № 30. Применение формул приведения для упрощения выражений
	Практическая работа № 31. Формулы суммы и разности тригонометрических функций. Тригонометрические преобразования

Глава 10. Тригонометрические уравнения	Практическая работа № 32. Решение простейших тригонометрических уравнений
	Практическая работа № 33. Решение тригонометрических уравнений
Глава 11. Многогранники	Практическая работа № 34. Пространственные фигуры. Многогранники
	Практическая работа № 35. Нахождение площади параллелепипеда и прямой призмы
	Практическая работа № 36. Нахождение площади полной и боковой поверхности пирамиды
	Практическая работа № 37. Нахождение площадей многогранников
Глава12. Векторы в пространстве	Практическая работа № 38. Векторы в пространстве
	Практическая работа № 39. Коллинеарные и компланарные векторы
	Практическая работа № 40. Действия над векторами. Построение
	Практическая работа № 41. Вычисление координат вектора, длина вектора
	Практическая работа № 42. Скалярное произведение векторов
Глава13. Тела и поверхности вращения	Практическая работа № 43.Цилиндр. Конус. Определение, элементы фигур
	Практическая работа № 44. Цилиндр. Конус. Решение задач
	Практическая работа № 45. Нахождение площади поверхности цилиндра
	Практическая работа № 46. Нахождение площади поверхности конуса
	Практическая работа № 47. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости
	Практическая работа № 48. Уравнение сферы
Глава 14. Производная и ее геометрический смысл	Практическая работа № 49. Нахождение производных элементарных функций
	Практическая работа № 50. Производная. Правила дифференцирования. Производная сложной функции
	Практическая работа № 51.Геометрический смысл производной
Глава 15. Применение производной к исследованию функции	Практическая работа № 52. Нахождение точек максимума и минимума
	Практическая работа № 53. Нахождение промежутков монотонности функции
	Практическая работа № 54. Исследование и построение графиков функций с помощью производной
Глава 16. Интеграл	Практическое занятие № 55. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства
	Практическая работа № 56. Вычисление неопределенных интегралов, используя таблицу интегралов
	Практическая работа № 57. Вычисление определенного интеграл. Формула Ньютона-Лейбница
	Практическая работа № 58. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление площади криволинейной трапеции
Глава 17. Объемы тел	Практическая работа № 59. Нахождение объёма прямоугольного параллелепипеда и его элементов
	Практическая работа № 60. Вычисление объема пирамиды
	Практическая работа № 61. Вычисление объема конуса и цилиндра
	Практическая работа № 62. Вычисление объема шара и его частей
Глава 18. Статистика	Практическая работа № 63.Вычисление среднего арифметического, математического ожидания и дисперсии случайной дискретной величины.

3.Теоретические сведения и методические рекомендации по главам

Глава 1. Действительные числа

Теоретические сведения и методические рекомендации

Одним из самых основных понятий в математике является число.

Натуральные числа: $N = \{1,2,3,4,\ldots\}$.

Целые числа: $Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.

Рациональные числа: Q = { m/n, где m – целое число, а n – натуральное}.

Можно также считать, что рациональные числа - это бесконечные периодические десятичные дроби.

Иррациональные числа – это числа, не представимые в виде обыкновенной дроби, т.е. бесконечные непериодические десятичные дроби. Например: π = 3,1416…, e = 2,7182…; $\sqrt{2}$ =1,4142…

Все эти числа называют действительными числами – R.

Определение модуля числа: $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$.

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Основное свойство пропорции: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Определение процента: 1% - это 1/100 часть числа.

Пример: Найти x, если $(-7{,}5):\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x = 22{,}5:(-0{,}5)$.

Решение:

$(-7{,}5):\left(-\frac{1}{2}\right) = 7{,}5\cdot 2 = 15$; 22,5: (– 0,5) = – 225 : 5 = – 45; 15 · x = – 45; x = – 45 : 15 = – 3.

Ответ: – 3.

Глава 2. Степенная функция

Теоретические сведения и методические рекомендации

Выражение $\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\ \text{раз}} = a^n$ называется степенью числа a. При этом a – называется основанием степени, а n – показателем степени.

Запись означает удобное сокращение – вместо того, чтобы каждый раз писать произведение большого количества множителей стали использовать удобную и краткую запись.

Свойства степени с натуральным показателем

1) $a^1 = a;$

2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n};$

3) $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0);$

4) $(a^m)^n = a^{mn};$

5) $a^n b^n = (ab)^n;$

6) $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ $(b \neq 0).$

Степень с целым показателем

Чтобы получить выражение a^0 достаточно в третьем свойстве положить: $m = n$ и мы получим: $a^0 = a^m : a^m = 1$ $(a \neq 0).$

Для отрицательного показателя степени достаточно взять в третьем свойстве в качестве $m = 0.$ Тогда получим: $a^{-n} = a^0 : a^n = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0);$

для степени с целым показателем все остальные свойства, уже определённые для степени с натуральным показателем сохраняются.

Свойства степени с целым показателем:

1) $a^1 = a;$
2) $a^0 = 1\ (a \neq 0);$
3) $a^m : a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0);$
4) $(a^m)^n = a^{mn};$
5) $a^n b^n = (ab)^n;$
6) $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n\ (b \neq 0)$;
7) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0);$
8) $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n\ (a, b \neq 0).$

Обобщим понятие степени для рациональных показателей. Рассмотрим выражение: $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$. Но для случая $a > 0$ мы получили определение корня n-ой степени $(x^n = y(x > 0) \Rightarrow x = \sqrt[n]{y}).$ Тогда: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ для $a > 0.$

***Свойства степени с рациональным показателем*:**

1) $a^1 = a;$
2) $a^0 = 1\ (a \neq 0);$
3) $a^m : a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0);$
4) $(a^m)^n = a^{mn};$
5) $a^n b^n = (ab)^n;$
6) $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n\ (b \neq 0);$
7) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0);$
8) $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n\ (a, b \neq 0)$;
9) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0.$

Действия с числами

С множествами натуральных, целых и рациональных чисел можно производить операции сложения, умножения и деления. Рассмотрим операции *возведение в степень и извлечение корня.*

Сложение и вычитание корней. Чтобы произвести сложение и вычитание корней, сначала корни приводят к простейшему виду, а затем выполняют приведение подобных членов

Пример 1.

Умножение и деление корней.

Произведение корней с одинаковыми показателями равно корню той же степени из произведения подкоренных выражений

Частное от деления корней с одинаковыми показателями равно корню той же степени из частного от деления подкоренных выражений.

Если показатели корней различны, то сначала нужно привести их к общему показателю, а затем произвести умножение и деление.

Если корни имеют коэффициенты, то их перемножают или делят отдельно и результат пишут перед общим корнем

Возведение корней в степень. При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, а показатель степени оставить без изменения. Если корень имеет коэффициент, то его отдельно возводят в эту степень и результат возведения записывают как коэффициент при самом корне.

Пример:

Избавление от иррациональности в знаменателе дроби. Для этого нужно знаменатель и числитель дроби умножить на такое выражение, которое в произведении со знаменателем дает рациональное выражение в знаменателе.

Извлечение корня из корня. При извлечении корня из под корня показатели корней перемножают, а подкоренное выражение оставляют без изменения. Если корень имеет коэффициент, то обычно до извлечения из данного корня нового корня вводят коэффициент под знак радикала данного корня.

Пример:

График степенной функции и ее свойства

Определение: Степенной функцией называют функцию вида $y=x^{r}$, где r- любое действительное число.

Графиком степенной функции $y=x^n$ с натуральным показателем является *парабола* n-го порядка, при четном n ее график симметричен относительно оси ординат, при нечетном n - относительно начала координат.

Рассмотрим степенную функцию $y=x^{r}$, $r=$, . Графиком ее является кривая - ветвь параболы

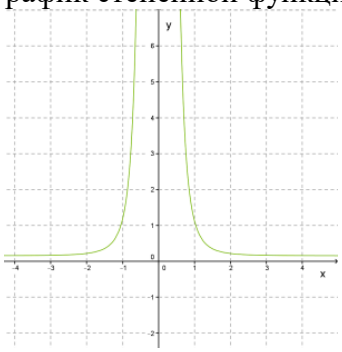
Рассмотрим график функции ,

Рассмотрим график функции

График данной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

Если показатель степени — целое отрицательное число, то степенная функция задаётся формулой $y=x^{-n}$ или $y=1/x^n$

График степенной функции $y=x^{-n}$, в случае, когда n — чётное число принимает вид:



Глава 3. Показательная функция

Теоретические сведения и методические рекомендации

Показательная функция и её свойства

Определение: Показательной называется функция, заданная формулой вида

Свойства показательной функции

1. Областью определения показательной функции является вся числовая прямая.
2. Множеством значений показательной функции является положительная полупрямая.

3. При a> 1 показательная функция возрастает на всей числовой прямой рис (3), а при 0<a< 1 убывает рис (4). Геометрическая особенность графика показательной функции: ось x является горизонтальной асимптотой графика.

Решение показательных уравнений

Алгоритм решения простейших показательных уравнений: $a^x = a^b \Leftrightarrow x = b.$. Для решения простейшего показательного уравнения достаточно привести обе части к одинаковому основанию, а затем приравнять показатели степени.

Пример: $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3.$

Любое более сложное показательное уравнение решается сведением его различными методами к простейшим.

Основные виды показательных уравнений

1) Простейшие ($3^x=9$).
2) Сводящиеся к простейшим с помощью использования свойств степени $(2^x \cdot 3^x = 36).$
3) С вынесением общего множителя $(5^{x+1} - 5^x = 20).$

4) Сводящиеся к квадратным $(25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0).$

5) Однородные показательные уравнения $(36^x - 2 \cdot 30^x + 25^x = 0).$

Глава 4. Логарифмическая функция

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение: Логарифмом числа *b* по основанию *a* называют показатель степени, в которую нужно возвести число *a*, чтобы получить число *b*, при условии *b>0, a>0, a≠1*. Обозначается символом $log_a в$.

- основное логарифмическое тождество.

Особо выделим три формулы:

Свойства логарифмов:

Логарифмическая функция и ее свойства

Определение: Логарифмической называют функцию вида: $У = \log_a x$. Логарифмическая функция обратная показательной.

Свойства логарифмической функции:

1. Областью определения логарифмической функции является промежуток (0;∞).
2. Множество значений логарифмической функции – вся числовая ось.
3. Логарифмическая функция – непрерывна.
4. Логарифмическая функция при *a*> 0, возрастает , при *a*< 0, убывает.
5. Показательная и логарифмическая функции взаимно - обратные, то их графики симметричны относительно прямой *y = x.*

Решение логарифмических уравнений

Системы логарифмических уравнений

Самые простые системы логарифмических уравнений – это системы, в которых оба уравнения сводятся к простейшим. В дальнейшем получается обычная система из двух уравнений с двумя неизвестными, которая решается любым из удобных методов.

Пример: $\begin{cases} log_2(x + 3y) = 2 \\ log_3 xy = 1 \end{cases}$.

Ещё один важный тип систем логарифмических уравнений – это системы, которые сводятся к обычным с помощью замены.

Глава 5. Параллельность прямых и плоскостей

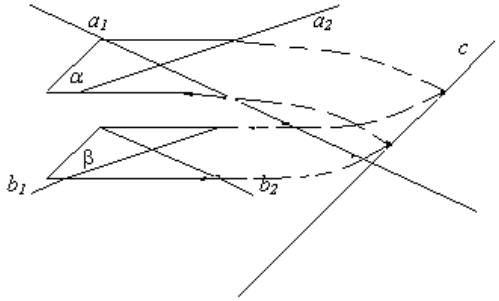
Теоретические сведения и методические рекомендации

Аксиома 1. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и при том только одну.

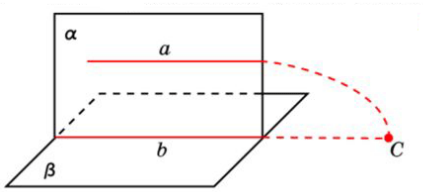
Аксиома 2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.
Аксиома 3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.
Теорема: Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.
Теорема: В пространстве через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.
Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются.

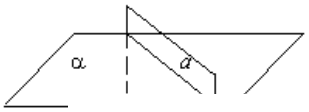
Параллельность плоскостей

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.
Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

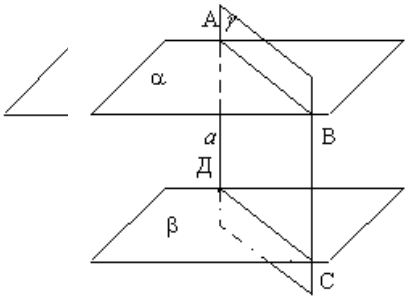


Признак параллельности прямой и плоскости: Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.





Теорема. Если две параллельные плоскости пересекаются третей, то прямые пересечения параллельны.

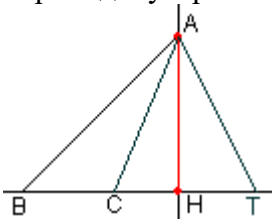


Теорема. Отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны.

Глава 6. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Теоретические сведения и методические рекомендации

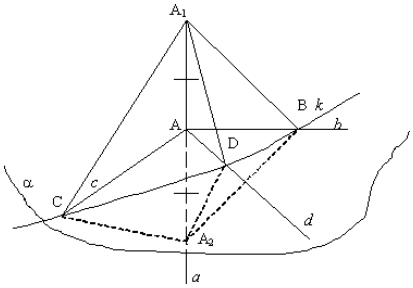
Определение. Перпендикулярными называются прямые, которые пересекаются под прямым углом.
Определение. Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной к данной.



Определение. Наклонной, проведенной из данной точки к данной прямой (плоскости), называется отрезок, соединяющий данную точку с любой точкой прямой(плоскости), не являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из этой же точки на данную прямую(плоскость).

Определение. Прямая называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости.

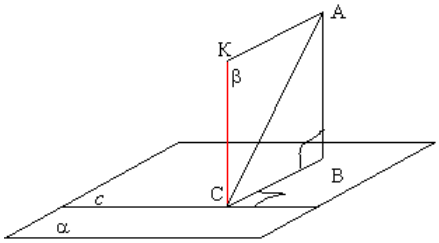
Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.



Теорема. Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

Теорема. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Определение: Угол между прямой и плоскостью есть угол между этой прямой и её проекцией на эту плоскость.



Теорема о трех перпендикулярах. Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и наклонной.

Глава 7. Комбинаторика

Теоретические сведения и методические рекомендации

*Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил – **правила суммы и правила произведения**.*

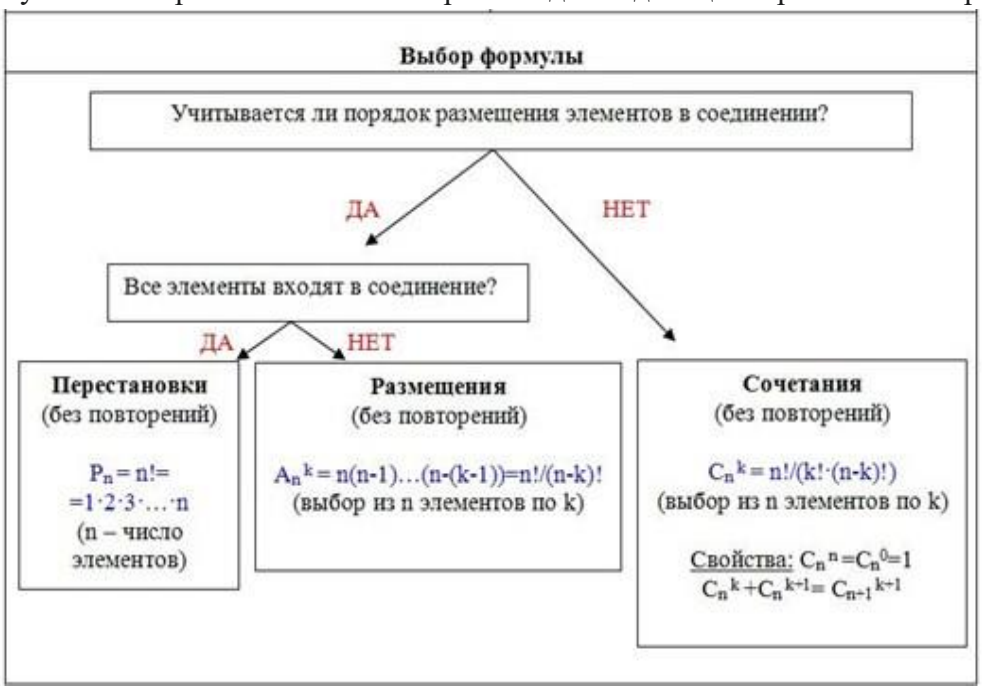
Выбор правила	
Правило суммы	**Правило произведения**
Если некоторый объект А можно выбрать **m** способами, а другой объект В можно выбрать **n** способами, то выбор объекта либо А, либо В можно осуществить **m + n** способами.	Если объект А можно выбрать **m** способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать **n** способами, то выбор пары А и В можно осуществить **m · n** способами.

Пример: В магазине «Все для чая» есть 6 разных чашек и 4 разных блюдца. Сколько вариантов чашки и блюдца можно купить?

***Решение*:** Чашку мы можем выбрать 6-ю способами, а блюдце 4-я способами. Так как нам надо купить пару чашку и блюдце, то это можно сделать $6 \cdot 4 = 24$ способами (по правилу произведения).

Ответ: 24.

Для успешного решения комбинаторных задач надо еще и правильно выбрать формулу, по которой искать количество нужных соединений. В этом поможет следующая схема.



Рассмотрим решение нескольких задач на разные виды соединений без повторений.

Глава 8. Элементы теории вероятности
Теоретические сведения и методические рекомендации
Классическое определение вероятности

Определение: вероятность любого события определяется как отношение числа m благоприятных для события А элементарных исходов к общему числу элементарных исходов n.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Определение. Под опытом понимается воспроизведение некоторого комплекса условий. При этом предполагается, что опыт может быть повторен сколько угодно раз.

Определение. Пусть имеется некоторый опыт. Событие, связанное с этим опытом, называется любой его исход.

При этом событие называется случайным, если оно может появиться или не появиться в данном опыте.

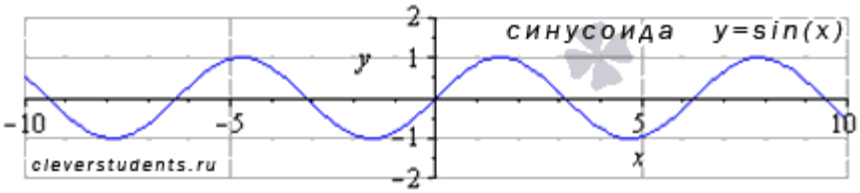
Глава 9 . Тригонометрические формулы
Теоретические сведения и методические рекомендации
Тригонометрические функции, их свойства и графики.

Все тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс и котангенс) относятся к основным элементарным функциям.

Тригонометрическим функциям присуще понятие *периодичности* (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода $f(x+T)=f(x)$, где T - период), поэтому, в список свойств тригонометрических функций добавлен пункт *«наименьший положительный период»*.

Функция *y = sin(x)*.

График функции синус называют "синусоида"



Свойства функции *y = sinx*.

- Областью определения функции синус является все множество действительных чисел, то есть, функция *y = sinx* определена при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Наименьший положительный период функции синуса равен двум пи: $T = 2\pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$, *Z* – множество целых чисел.
- Функция синус принимает значения из интервала от минус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть $y \in [-1; 1]$.
- Функция синус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$,

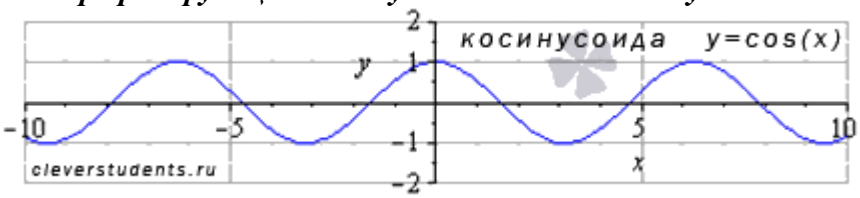
  возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$.
- Функция синус имеет локальные максимумы в точках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; 1\right)$,

  локальные минимумы в точках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; -1\right), \quad k \in Z$.
- Функция *y = sinx* вогнутая при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$,

  выпуклая при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$.
- Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0), \quad k \in Z$.
- Асимптот нет.

Свойства функции *y = cosx*.

График функции косинус называют "косинусоида"



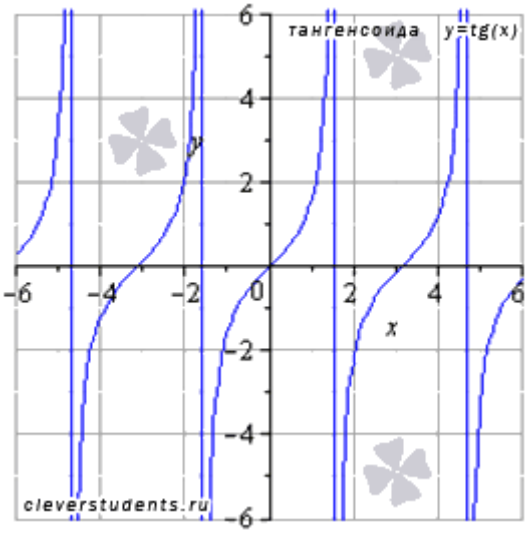
- Область определения функции косинус: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Наименьший положительный период функции *y = cosx* равен двум пи: $T = 2\pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in Z$, *Z* – множество целых чисел.
- Область значений функции косинус представляет интервал от минус единицы до единицы включительно: $y \in [-1; 1]$.
- Функция косинус - четная, так как $y(-x) = y(x)$.
- Функция убывает при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$,

  возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$.

- Функция $y = cosx$ имеет локальные максимумы в точках $(2\pi \cdot k; 1), \quad k \in Z$, локальные минимумы в точках $(\pi + 2\pi \cdot k; -1), \quad k \in Z$.
- Функция вогнутая при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$, выпуклая при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$.
- Координаты точек перегиба $\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; 0\right), \quad k \in Z$.
- Асимптот нет.

Функция $y = tg(x)$.

График функции тангенс называют "тангенсоида"



Свойства функции тангенс $y = tgx$.

- Область определения функции тангенс: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right)$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
  Поведение функции $y = tgx$ на границе области определения $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k + 0} tg(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k - 0} tg(x) = +\infty$
  Следовательно, прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in Z$, являются вертикальными асимптотами.
- Наименьший положительный период функции тангенс $T = \pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
- Область значений функции $y = tgx$: $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция тангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right), \quad k \in Z$.
- Функция вогнутая при $x \in \left[\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right), \quad k \in Z$, выпуклая при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \pi \cdot k\right], \quad k \in Z$.
- Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0), \quad k \in Z$.

Глава 10. Тригонометрические уравнения
Теоретические сведения и методические рекомендации

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	***Общее решение***	***Частные случаи***		
,				
,				
,				
,				

Методы решения тригонометрических уравнений

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: преобразование уравнения для получения его простейшего вида и решение полученного простейшего тригонометрического уравнения.

1. Алгебраический метод.

Пример. Решить уравнение: $2\cos^2(x+\pi/6)-3\sin(\pi/3-x)+1=0.$

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x+\pi/6)-3\cos(x+\pi/6)+1=0,$$

делаем замену: $\cos(x+\pi/6)=y$, тогда $2y^2-3y+1=0$,

находим корни: $y_1=1$, $y_2=1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x+\pi/6)=1$, 2). $\cos(x+\pi/6)=1/2$,

$x+\pi/6=2\pi k$, $x+\pi/6=\pm\arccos(1/2)+2\pi n$,

$x_1=-\pi/6+2\pi k$; $x_2=\pm\pi/3-\pi/6+2\pi n$.

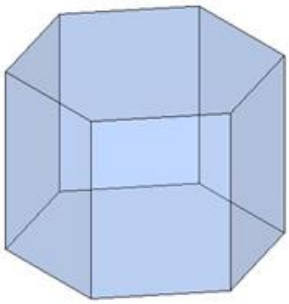
Глава 11. Многогранники
Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение: Призма — многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

Свойства призмы:

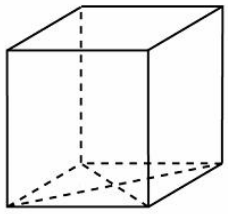
- Основания призмы являются равными многоугольниками.
- Боковые грани призмы являются параллелограммами.
- Боковые ребра призмы параллельны и равны.
- *Объём призмы* равен произведению её высоты на площадь основания:
- Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади её боковой поверхности и удвоенной площади основания.
- Площадь боковой поверхности произвольной призмы S=PL, где P — периметр перпендикулярного сечения, L — длина бокового ребра.
- Площадь боковой поверхности прямой призмы S=PH, где P — периметр основания призмы, H— высота призмы.
- Перпендикулярное сечение перпендикулярно ко всем боковым рёбрам призмы.
- Углы перпендикулярного сечения — это линейные углы двугранных углов при соответствующих боковых рёбрах.
- Перпендикулярное сечение перпендикулярно ко всем боковым граням.

- Призма с боковыми рёбрами, перпендикулярными её основаниям, называется ***прямой призмой.***
- Прямая призма называется ***правильной,*** если её основания — правильные многоугольники.

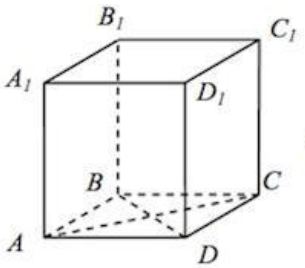


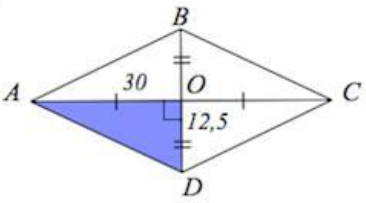
Определение: ***Пирамида*** – многогранник, основание которого – многоугольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину.
Пирамида называется ***правильной***, если её основанием является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.
Стороны основания есть ребра основания. Прямые, соединяющие вершины основания с вершиной, есть боковые ребра.
Определение: Высота, проведенная в боковой грани из вершины пирамиды на сторону основания, называется ***апофемой.***

Тетраэдр- многогранник, гранями которого являются четыре треугольника. У тетраэдра 4 грани, 4 вершины и 6 рёбер. Тетраэдр, у которого все грани — равносторонние треугольники, называется ***правильным***.
Пример: Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 25 и 60, и боковым ребром, равным 25.



Решение: Площадь поверхности призмы $S=2S_{осн}+S_{бок}$
Площадь ромба $S=1/2d_1d_2$
Боковая поверхность данной прямой призмы – четыре равных прямоугольника.





Нам потребуется длина стороны ромба. Найдем ее по т. Пифагора из треугольника (по свойству ромба диагонали перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам):
Ответ: 4750.

Глава 12. Векторы в пространстве
Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение: Вектором называется направленный отрезок
Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$; точка A - начало, точка B - конец вектора

Рис. 1

Определение: Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***сонаправленными***, если их направления совпадают: $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$. Два коллинеарных
вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *противоположно направленными,* если их направления противоположны: $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$.
Определение: Векторы называются ***компланарными***, если они параллельны одной плоскости или лежат в одной плоскости.

Действия над векторами:

Сложение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ осуществляется по *правилу треугольника.*
Суммой $\bar{a}+\bar{b}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют такой третий вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом $\bar{a}$, а конец - с концом $\bar{b}$ при условии, что конец вектора $\bar{a}$ и начало вектора $\bar{b}$ совпадают .
Правило параллелограмма - если два неколлинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ привести к общему началу, то вектор $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.Причем начало вектора $\bar{c}$ совпадает с началом заданных векторов.
Вектор $-\bar{a}$ называется *противоположным вектором* к вектору $\bar{a}$,
еслион коллинеарен вектору $\bar{a}$, равен ему по длине, но направлен в противоположную сторону вектору $\bar{a}$.
Свойства сложения векторов:

1. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ - коммутативность
2. $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ - ассоциативность
3. $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$
4. $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$

Разностью $\bar{a}-\bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$ такой, что выполняется условие: $\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}$
Свойства умножения вектора на число:

1. $(\alpha \pm \beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}\pm\beta\bar{a}$
2. $\alpha(\bar{a}\pm\bar{b})=\alpha\bar{a}\pm\alpha\bar{b}$
3. $\alpha(\beta\bar{a})=(\alpha\beta)\bar{a}=\beta(\alpha\bar{a})$
4. $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$
5. $-1\cdot\bar{a}=-\bar{a}$
6. $0\cdot\bar{a}=\bar{0}$

Здесь $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - произвольные векторы,α, β - произвольные числа.
Сумма двух векторов, заданных координатами
Пусть заданы $a=\{x_a; y_a\}$ и $в=\{x_в; y_в\}$, тогда вектор $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ имеет координаты $\{x_a+x_в;\ y_a+y_в\}$
Чтобы *найти сумму двух векторов*, заданных своими координатами, надо сложить их соответствующие координаты.

Глава13.Тела и поверхности вращения
Теоретические сведения и методические рекомендации

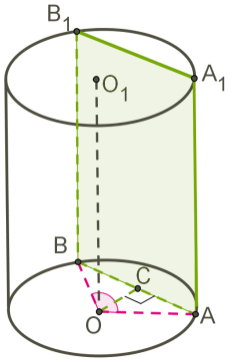
Цилиндр

Определение: ***Цилиндр*** — тело вращения, которое получается в результате вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Прямоугольник AOO_1A_1 вращается вокруг стороны OO_1. OO_1 — ось симметрии цилиндра и высота цилиндра. AA_1 — образующая цилиндра, длина которой равна длине высоты цилиндра. AO — радиус цилиндра. Полученная цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги — основаниями цилиндра.

Осевое сечение цилиндра — это сечение цилиндра плоскостью, которая проходит через ось цилиндра. Это сечение является прямоугольником.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра (т.е. перпендикулярной основанию), также получается прямоугольник. ABB_1A_1 — прямоугольник.



OA=AB=R — радиусы. OC — расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.

Дуга AB равна центральному углу AOB.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной основанию, в сечении получаем круг, равный основаниям цилиндра.

Так как развёртка — прямоугольник, то боковая поверхность определяется по формуле:

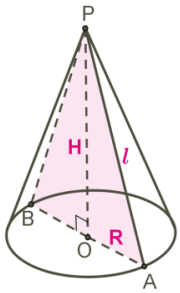
$S_{бок}=2\pi R\square H$

Полная поверхность цилиндра определяется по формуле:

$S_{полн}=2\pi RH+2\pi R2=2\pi R\square(H+R)$

Конус

Определение: ***Конус*** — тело вращения, которое получается в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг его катета.



Треугольник POA вращается вокруг стороны PO.

PO — ось конуса и высота конуса. P — вершина конуса. PA — образующая конуса. Круг с центром O — основание конуса. AO — радиус основания конуса. *Осевое сечение конуса* — это сечение конуса плоскостью, которая проходит через ось PO конуса. Осевое сечение конуса — это равнобедренный треугольник. Треугольник APB — осевое сечение конуса.

□PAO=□PBO — углы между образующими и основанием конуса.

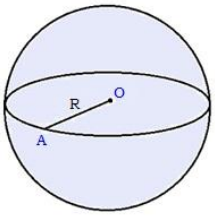
Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор. Длина дуги сектора — это длина окружности основания конуса длиной 2πR, угол развёртки боковой поверхности α.

Шар, сфера

Определение: ***Шаром*** называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки.

Поверхность шара называется ***сферой.***

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называется **большим кругом**. Для упрощения обычно рисуется не шар, а большой круг шара.



Площадь поверхности шара (т.е. сферы) вычисляется по формуле S(сферы)= $4\square\pi\square R^2$, где R — радиус шара.

Объём шара вычисляется по формуле V= $4/3\square\pi\square R^3$, где R — радиус шара.

Глава 14. Производная и ее геометрический смысл

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение: Производной $y'(x)$ от функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется <u>предел</u> отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если он существует, то есть:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

или

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Свойства производных:

$$C' = 0$$

$$(Cu)' = Cu'$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\begin{cases} x = x(t),\ y = y(t) \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = y(u),\ u = u(x) \\ y'_x = y'_u \cdot u'_x \end{cases}$$

$$y' = y \cdot (\ln|y|)'$$

$$\begin{cases} y = y(x),\ x = x(y) \\ y'_x = \dfrac{1}{x'_y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = u^x \\ y' = u' \cdot v \cdot u^{v-1} + v' \cdot u^v \ln u \end{cases}$$

Таблица производных основных элементарных функций:

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\text{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\text{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\text{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\text{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\text{sh}\, x)' = \text{ch}\, x$
17. $(\text{ch}\, x)' = \text{sh}\, x$
18. $(\text{th}\, x)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$
19. $(\text{th}\, x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x}$

Геометрический смысл производной:

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в этой точке.

$f'(x_0) = tg\,\alpha$

Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Алгоритм составления уравнения касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой x_0.
2. Вычислить $f(x_0)$.
3. Найти $f'(x)$и вычислить $f'(x_0)$.
4. Подставить найденные значения в формулу.

Глава 15. Применение производной к исследованию функции

Теоретические сведения и методические рекомендации

Монотонность функции

Определение: Функция f(x) называется **возрастающей** на отрезке [a,b] если для любых $x_1<x_2$ из отрезка выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$. В случае выполнения нестрогого неравенства f(x1)≤f(x2) функция называется **неубывающей** на отрезке.

Определение: Функция f(x), называется **убывающей** на отрезке [a,b] если для любых $x_1<x_2$ из отрезка выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$. В случае выполнения нестрогого неравенства $f(x_1)\geq f(x_2)$ функция называется **невозрастающей** на отрезке.

Если функция является убывающей или возрастающей, то она называется **монотонной функцией**.

Пример: функция y=lnx является возрастающей.

Пример: функция y=−3x+2 является убывающей.

Точки экстремума

x_0 — **точка максимума** функции f(x), если для всех достаточно близких точек x верно неравенство $f(x)\leq f(x_0)$.

x_0 — **точка минимума** функции f(x), если для всех достаточно близких точек x верно неравенство $f(x)\geq f(x_0)$.

Точка экстремума — это точка максимума либо точка минимума функции.

Признак возрастания и убывания функции

Функция f(x) **возрастает** на промежутке (a;b), если производная **f′(x)>0** на этом промежутке.

Функция f(x) **убывает** на промежутке (a;b), если производная **f′(x)<0** на этом промежутке.

Признаки максимума и минимума функции

Если функция f(x) возрастает на промежутке $(a;x_0)$ и убывает на промежутке $(x_0;b)$, то x_0 является точкой максимума функции.

Признак **максимума** функции выполняется, если:

- f′(x)>0 на промежутке (a;x0)
- f′(x)=0 в точке x_0
- f′(x)<0 на промежутке (x0;b)

Если функция убывает на промежутке $(a;x_0)$ и возрастает на промежутке $(x_0;b)$, то x_0 является точкой минимума функции.

Признак **минимума** функции выполняется, если:

- f′(x)<0 на промежутке $(a;x_0)$
- f′(x)=0 в точке x_0
- f′(x)>0 на промежутке $(x_0;b)$

Критическая точка- точка, в которой производная функции равна нулю.

Три типа критических точек:

x_1 – точка локального минимума, является точкой экстремума;

x_2 – точка перегиба, НЕ является точкой экстремума.

x_3 – точка локального максимума, является точкой экстремума;

Схема исследования функции и построение её графика.

1. Найдите область определения функции.
2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.
3. Найдите промежутки знакопостоянства.
4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.
5. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки перегиба.
6. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Постройте график функции, используя полученные результаты исследования.

Алгоритм нахождения точки максимума и минимума функции

1. Найдите производную функции
2. Найти нули производной
3. Найдите точки экстремум

Глава 16. Интеграл
Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение: Функция F (x) называется первообразной для функции f (x) в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна f (x):

$F'(x) = f(x) \Rightarrow df(x) = f(x)\,dx,\ a \le x \le b.$

Отыскание первообразной функции по заданной её производной f(x) или по дифференциалу f (x) dx есть действие, обратное дифференцированию, - интегрирование. Совокупность первообразных для функций f(x) или для дифференциала (x) dx называется неопределённым интегралом и обозначается символом S f (x) dx. Таким образом,

$S\, f(x)\,dx = F(x)+C$ если $d[F(x)+C] = f(x)dx$

F(x)- подынтегральная функция;

F(x)dx- подынтегральное выражение;

C- произвольная постоянная.

2. Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная: $\int dF(x) = F(x) + C$.

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \quad (\int f(x)dx)' = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int\big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

4.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

5.Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$ 2. $\int dx = x + C$ 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ 4. $\int \sin x dx = -\cos x dx$ 5. $\int \cos x dx = \sin x dx$ 6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$ 8. $\int tgx dx = \ln\lvert\cos x\rvert + C$ 9. $\int ctgx dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$ 10. $\int e^x dx = e^x + C$ 11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctgx + C$ 14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert + C$ 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Нахождение площади криволинейной трапеции

Определение: ***Криволинейная трапеция*** - фигура ограниченная непрерывной кривой *y=f(x)*, двумя прямыми *x=a* и *x=b* и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Алгоритм нахождения площади криволинейной трапеции

1.Построить графики линий.
2.Определить криволинейную трапецию.
3.Выделить функцию f, ограничивающую трапецию.
4.Определить отрезок [*a*;*b*] оси *Ox*.
5.Найти одну из первообразных функции f.
6.Используя формулу S=F(b)-F(a), вычислить площадь.

Глава 17. Объемы тел

Теоретические сведения и методические рекомендации:

7. Список литературы

Основные источники:
1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы учебник для общеобразовательных учреждений: базовый уровень – М.: Просвещение, 2010. – 464 с.
2. Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. Геометрия. 10-11 классы: учеб. Пособие: базовый и профильный уровни -18е изд. – М.: Просвещение, 2011
3. Н.В. Богомолов, Практические занятия по математике, учебное пособие для средних профессиональных учебных заведений – М.: Высшая школа, 2008. – 495 с.
4. Соловейчик И.Л., Лисичкин В.Т. Сборник задач по математике с решениями для техникумов – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2003. – 464 с.

Дополнительные источники:
5. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. В двух частях.Ч.1: Учеб. для общеобразовательных учреждений. – 4-е изд. – М.: Мнемозина, 2010
6. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. В двух частях.Ч.2: Задачник для общеобразовательных учреждений. – 4-е изд. – М. Мнемозина, 2010
7. Колмогоров А.Н., Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. Учебное пособие для общеобразовательных учреждений. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2007

Интернет-ресурсы:
1. Сайт Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО) [Электронный ресурс] -http://www.mccme.ru
2.Сайт Allmath.ru — вся математика в одном месте [Электронный ресурс]- http://www.allmath.ru
3.Методика преподавания математики [Электронный ресурс]-http://www. methmath.chat.ru
4.Графики функций [Электронный ресурс]- http://www.graphfunk.narod.ru
5. «Федеральный государственный образовательный стандарт» [Электронный ресурс]- http://standart. Edu.ru./catachment. Aspx? Catalog Id=223
6. Российский общеобразовательный портал,[Электронный ресурс]- http:// www. Shool.