МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им.В.И.Вернадского»
Академия биоресурсов и природопользования
факультет агрономии, садово-паркового и лесного хозяйства

кафедра растениеводства

Изотов А.М., Тарасенко Б.А., Дударев Д.П.

КУРС ЛЕКЦИЙ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ПЛАНИРОВАНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В РАСТЕНИЕВОДСТВЕ»

для обучающихся по направлению подготовки
35.06.01 – Сельское хозяйство

Симферополь
2020

УДК 633 : 631.153
ББК 41/42
И 38

Курс лекций подготовили:
Изотов А.М. – заведующий кафедрой растениеводства, доктор сельскохозяйственных наук, профессор;
Тарасенко Б.А. – доцент кафедры растениеводства, кандидат сельскохозяйственных наук, доцент;
Дударев Д.П. – доцент кафедры растениеводства, кандидат сельскохозяйственных наук, доцент.

Курс лекций по дисциплине «Планирование и статистический анализ данных исследований в растениеводстве» для обучающихся по направлению подготовки 35.06.01 – Сельское хозяйство.
Рассмотрен, рекомендован к изданию и использованию в учебном процессе на заседании кафедры растениеводства Агротехнологической академии
Протокол № 8 от 23 июня 2020 г.

Курс лекций рассмотрен, рекомендован к изданию и использованию в учебном процессе учебно-методической комиссией факультета агрономии садово-паркового и лесного хозяйства Агротехнологической академии
Протокол № 4 от 10 сентября 2020 г.

Курс лекций рассмотрен, рекомендован к изданию и использованию в учебном процессе учебно-методическим советом Агротехнологической академии. Протокол № 5 от 30 сентября 2020 г.

Рецензенты:
Письменный В.Д., кандидат с.-х. наук, доцент, доцент кафедры растениеводства факультета АСПиЛХ АТА «КФУ им. В.И. Вернадского»
Ильин А.В., кандидат с.-х. наук, доцент, доцент кафедры земледелия и агрохимии факультета АСПиЛХ АТА «КФУ им. В.И. Вернадского»

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой растениеводства Агротехнологической академии ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» Изотов А.М.

© Изотов А.М., Тарасенко Б.А., Дударев Д.П., КФУ, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Планирование исследований в растениеводстве.....4
Лекция 1.1. Планирование многофакторных полевых опытов в растениеводстве на основе метода «смешивания».....4
Лекция 1.2. Оптимизация схем многофакторных регрессионных опытов на основе квазифакториальных выборок.....11
Лекция 1.3. Неполные факториальные схемы на основе «вписанных кубов» и фрагментов схемы 3*3*3.....21
Лекция 1.4. Дисперсионный анализ многофакторных опытов с полными факториальными схемами.....32

РАЗДЕЛ 1. ПЛАНИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ В РАСТЕНИЕВОДСТВЕ

Лекция 1.1. Планирование многофакторных полевых опытов в растениеводстве на основе метода «смешивания»

Вопросы:

1. Категории информации полной факториальной схемы полевого опыта
2. Актуальность метода блоков и основы метода «смешивания»
3. Формирование блоков на основе метода смешивания в схемах 2^n
4. Блокировка вариантов в двух направлениях схем 2^6 и 4^3

Факториальная схема позволяет всю информацию, доставляемую опытом, разбить на несколько категорий: главные эффекты факторов, их парные взаимодействия (первого порядка), тройные взаимодействия (второго порядка) и т. д. Эти взаимодействия имеют разную практическую значимость. Например при совместном изучении девяти факторов примерно 95% информации об их действии и взаимосвязи сосредоточиваются в главных эффектах и парных взаимодействиях. Остальные взаимодействия высшего порядка (вплоть до восьмого), которых большинство, содержат в себе остальную, составляющую только 5% от общей, информацию. Это указывает на то, что взаимодействия высшего порядка, как правило, имеют малую величину. В связи с тем, что полевой опыт, как установлено ранее, почти всегда сопровождается относительно большой ошибкой, взаимодействия более высокого, чем первый, порядка, как правило, остаются в силу своей малости неуловимыми (незначимыми). Они не выходят за границы ошибки опыта и поэтому не могут в этих конкретных условиях считаться реально существующими. Это означает, что такие взаимодействия не имеют практического значения и ими можно пренебречь (то есть приравнять их нулю) без какого-либо существенного ущерба общей информации, извлекаемой из опыта. К этому следует добавить, что взаимодействия высшего порядка, хотя они и имеют математическое выражение, на практике трудно интерпретируемы, вследствие чего их логическое содержание также представляется малозначащим.

Полевые опыты с громоздкими полными факториальными схемами в исследовательской практике поводят в основном по методу расщепленных делянок. Этот метод достаточно удобен при работе в поле, но он имеет существенный недостаток: в многовариантных опытах с большими размерами повторений начинают сильно проявляться неравноточность сравнения главных эффектов и взаимодействий. Эффекты вариантов, размещенных на субделянках, а также взаимодействия высших порядков оцениваются обычно более точно, чем главные эффекты вариантов, занимающих делянки первого порядка. Теория планирования эксперимента рекомендует в этих случаях использовать метод смешивания. Этот метод позволяет значительно повысить точность сравнения главных эффектов в многофакторных опытах с повышенным числом вариантов.

Современная теория планирования экспериментов дает оригинальное разрешение этого затруднения, рекомендуя специальный, разработанный Р. А. Фишером, метод блоков. Этот метод состоит в том, что каждое повторение, содержа-

щее весь определяемый факториальной схемой набор вариантов, разбивается на некоторое число в определенном смысле равноценных частей – блоков так, чтобы ошибка опыта зависела от пестроты плодородия почвы только внутри блоков, но не внутри всего более обширного повторения, где она априори больше. Если такие блоки включают 15-16 опытных делянок, то экспериментальная ошибка остается на том допустимом уровне, при сколь угодно большом числе вариантов в опыте в целом. То есть, метод смешивания предусматривает выделение внутри повторений специально организованных блоков (неполных повторений), включающих определенный набор вариантов схемы. Сравнения внутри блоков более точны, чем между блоками, и поэтому варианты группируют в блоки так, чтобы внутриблоковые сравнения составляли наиболее существенную часть результатов опыта, а междублоковые сравнения – менее существенную. Например, можно пожертвовать взаимодействиями высшего порядка, значимость которых маловероятна. Таким образом, смешиванием называется такой способ размещения вариантов, при котором в каждом повторении все комбинации вариантов подразделяют на две или более групп (блоков) так, чтобы разности между группами составляли взаимодействия высшего порядка, представляющие меньший интерес, чем главные эффекты и взаимодействия между двумя факторами. Взаимодействия высшего порядка при таком размещении опыта отождествляются, смешиваются с междублоковыми различиями, и, следовательно, экспериментатор жертвует сведениями о таких взаимодействиях.

Таким образом, распределение вариантов внутри повторения планируется так, чтобы различия блоков совпадали с несущественными взаимодействиями высшего порядка, то есть производят смешивание этих взаимодействий с блоками. Отсюда название «метод смешивания». Здесь, таким образом, если происходит потеря информации, то она мала и относится к малозначащей ее части. Рассмотрим это на простейшем примере. При восьмерной схеме можно распределить варианты по двум блокам следующим образом:

Первый блок	Второй блок
N, P, K, NPK	0, NP, NK, PK

Если сравнить это распределение с формулой тройного взаимодействия (NPK), то можно убедиться, что различие между блоками в то же время является величиной (контрастом), определяющей это взаимодействие второго порядка. Но так как взаимодействие второго порядка в связи с ранее сказанным не может быть значительным и им можно пренебречь, то различие между средними урожаями блоков следует в основном приписать различию плодородия тех частей поля, которые занимают эти блоки. Тем самым определенная часть пестроты плодородия (главным образом ее локальный компонент), характеризуемая различием блоков, становится под контроль, что позволяет при помощи специальной корректировки данных (примеры будут приведены дальше) исключить эту контролируемую часть общего варьирования из ошибки опыта, то есть в той или иной мере снизить ее. В этом случае мы переходим от сравнения вариантов внутри повторения в целом к сравнению внутри блоков, вследствие чего можно ожидать уменьшение ошибки опыта. Иллюстрируем это положение на том же примере двух

блоков. Например, следует определить главный эффект фактора N. Если в первом блоке определим величину 1/2[N+NPK)-(P+K)], а во втором величину:

1/2[(NP+NK)-(0+PK)],

то, находя среднее их значение, определим главный эффект (N):

1/4[(N+NPK+NP+NK)-(P+K+0+PK)].

Правда, два частных контраста, приведенных выше, сами по. себе не имеют смысла привычных «прибавок», а представляют собой просто некоторые групповые сравнения, но для конструкции ошибки со статистической точки зрения это не имеет значения, важно лишь то, что эти сравнения производятся внутри блоков. Таким образом, хотя здесь и взяты две частные величины, «не имеющие смысла», однако их объединение дает вполне реальную величину, в которую по определению вкладывается смысл главного эффекта (N), полученного способом внутриблокового сравнения вариантов. Такое же положение и с определением взаимодействия, например (NP). Здесь внутри блоков образуем контрасты:

1/2[(K+NPK) -(N-P)] и 1/2[(0+NP)-(NK+PK)],

среднее из которых имеет вид:

1/4 [(K+NPK+0+NP)-(N+P+NK+PK)].

Здесь в скобку со знаком плюс входят варианты, где N и P встречаются вместе с (NPK и NP) или оба отсутствуют (K и 0), а скобку со знаком минус составляют варианты, в которых оба фактора представлены в отдельности друг от друга, что соответствует определению взаимодействия (NP) (см. стр. 33). Такое же положение и с внутриблоковым определением других парных взаимодействий (NK) и (PK). Что касается тройного взаимодействия (NPK), поскольку именно оно легло в основу образования блоков, то его нельзя определить способом внутриблоковых сравнений – оно смешано с блоками.

Познакомившись с основным принципом метода блокировки на простейшем примере смешивания взаимодействия второго порядка (NPK) с блоками для восьмерной схемы, распространим этот прием вообще на схему 2^n. При этом перейдем от конкретных наименований факторов N, P, K к общей символике их: *A, B, C, D* и т. д.

Известно, что для обеспечения приемлемой точности опыта следует остерегаться выхода за пределы тех 15-16 делянок в повторении, которые рекомендуются обычной методикой полевого опыта. В этом отношении целесообразно ознакомиться со схемами составного характера, в которые входят несколько восьмерных схем и где поэтому описанный способ дробления восьмерной схемы может найти применение.

Опыт $2*2*2*2=2^4$, относящийся к четырем факторам при альтернативной классификации каждого, состоит из 16 вариантов. Его можно разбить на два блока по восемь вариантов каждый, если с блоками смешать взаимодействие всех четырех факторов *(ABCD)*. Для определения состава этих блоков, согласно сказанному ранее (см. стр. 37), следует к одному из них отнести все варианты, в которых имеется четное число факторов из наших четырех *A, B, C* и *D,* а к другому — варианты с нечетным числом тех же факторов. Эти блоки таковы:

Первый блок: *0, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABCD.*

Второй блок: *A, B, C, D, ABC, ABD, ACD, BCD.*

Если рассматривать схему данного типа с пятью факторами 2^5, то здесь можно образовать или два блока по 16 вариантов в каждом, или четыре блока по восемь вариантов (последнее предпочтительней). В первом случае удобнее всего смешать взаимодействие самого высокого порядка – *(ABCDE)*, образуя блоки по указанному выше правилу (варианты с четным числом факторов в одном блоке, с нечетным – в другом):

Первый блок: *0, AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, ABCD, ABCE, ABDE, ACDE, BCDE.*

Второй блок: *A, B, C, D, E, ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE, ABCDE.*

Во втором случае – четыре блока по восемь вариантов в каждом – положение сложнее. Четырем блокам, на которые предполагается разбить повторение, соответствует три степени свободы и, следовательно, смешиванию с блоками должно быть предназначено три взаимодействия. Эти все смешиваемые взаимодействия не могут быть выбраны произвольно, так как они должны находиться в специальном, сбалансированном соотношении друг с другом. Сбалансированность здесь понимается так: три взаимодействия, например, (*ABC*), (*CDE*) и (*ABDE*) находятся в сбалансированном состоянии, так как каждый фактор *A*, *B, C, D* и *E* входит в систему этих взаимодействий дважды. Формальным признаком этого является произведение символов $ABC*CDE*ABDE = A^2B^2C^2D^2E^2$, где показатели степени всех пяти символов одинаковы и равны 2.

Схема опыта 2^6 с шестью факторами и с 64 вариантами позволяет образовать восемь блоков по восемь вариантов в каждом, причем в этом случае также должно соблюдаться условие сбалансированного смешивания взаимодействий с блоками. Восьми блокам соответствует семь степеней свободы, таким же должно быть и число смешиваемых взаимодействий. Это можно сделать, если взять для смешивания три взаимодействия, так как $2^3=8$. Для конкретного произвольного выбора этих трех смешиваемых с блоками взаимодействий следует составить себе представление о всей системе взаимодействий, подлежащих смешиванию, включая сюда и автоматически смешиваемые. Для образования такой системы взаимодействий разобьем шесть факторов на три произвольные пары, например, *AB, CD* и *EF.* Первые три из смешиваемых взаимодействий образуются соединением по два этих парных сочетаний: *(ABCD), (ABEF)* и *(CDEF).* Остальные четыре будут тройными, образованными из «представителей» каждой из взятых трех пар при условии, что никакие два фактора не встречаются друг с другом более одного раза. У нас это будут: *(ACE), (BDE), (ADF), (BCF).* Легко видеть, что в этом случае соблюдается условие сбалансированности:

$$ABCD* *ABEF*CDEF*ACE*BDE*ADF*BCF=A^4B^4C^4D^4E^4F^4.$$

В данном случае имеется восемь групп вариантов, составляющих блоки:

1. *0, ABCD, BCE, ADE, ACF, BDF, ABEF, CDEF;*
2. *AC, BD, ABE, CDE, F, ABCDF, BCEF, ADEF;*
3. *B, ACD, CE, ABDE, ABCF, DF, AEF, BCDEF;*
4. *C, ABD, BE, ACDE, AF, BCDF, ABCEF, DEF;*

5. *ABC, D, AE, BCDE; BF, ACDF, OEF, ABDEF;*
6. *A, BCD, ABCE, DE, CF, ABDF, BEF, ACDEF;*
7. *BC, AD, E, ABCDE, ABF, CDF, ACEF, BDEF;*
8. *AB, CD, ACE, BDE, BCF, ADF, EF, ABCDEF.*

При распределении вариантов по блокам в натуре следует в соответствии с общим правилом произвести их рандомизацию внутри каждого блока, причем это следует делать заново для каждого опыта по данной схеме.

Блокировка в двух направлениях схем 2^6 и 4^3. В полевых условиях, особенно при большом числе вариантов, нельзя все варианты повторения расположить в один ряд и повторению приходится придавать многоярусный характер. В ряде случаев здесь представляется возможность применить двойную блокировку и учитывать изменение плодородия участка в двух направлениях. Особенно эффективным этот прием становится, когда число вариантов является квадратом целого числа и когда можно построить схему так называемого квазилатинского квадрата. В этом случае можно подобрать две системы взаимно перпендикулярных блоков, одна из которых будет учитывать изменения плодородия почвы в одном (на чертеже в горизонтальном) направлении, а вторая – в другом (на чертеже в вертикальном) направлении. В результате получится более полное представление о характере изменения плодородия по всему опытному участку, что приведет к более заметному уточнению опыта. Эту возможность покажем здесь на примере последней из рассмотренных нами схем – 2^6. В этом случае 64 варианта можно расположить в виде квадрата, состоящего из восьми строк и восьми столбцов по восемь делянок в каждом.

Так, с одной системой восьми блоков смешаны взаимодействия: *(ACE), (BDE), (ADF), (BCF), (ABCD), (ABEF)* и *(CDEF),* где за основу блокировки были взяты три пары вариантов: *AB, CD* и *EF.* Теперь для новой системы блоков за основу следует взять новые, не совпадающие с первыми пары, например *AC, BE* и *DF,* что даст семь новых смешиваемых взаимодействий: *(ABF), (CEF), (ADE), (BCD), (ABCE), (ACDF)* и *(BDEF).*

Способ построения схемы опыта 2^6 с некоторыми изменениями применим и при планировании более сложных схем, таких, как 2^7, 2^8 и т. д. Более важно рассмотреть другую возможность применения разработанной схемы 2^6. Речь идет о построении на ее основе схемы 4^3 для опытов с тремя факторами, имеющими четыре градации каждый. Данная возможность возникает в связи с тем, что $4=2^2$ и поэтому схему 2^6 можно свести к схеме 4^3. Это удобно провести с помощью метода введения условных факторов.

Например, надо построить факториальную схему с соответствующей блокировкой для изучения действия трех видов удобрений N, P и K. Каждый из этих факторов взят в четырех (включая нулевую) равноотстоящих дозах, так, например, N имеет дозы N_0, N_1, N_2 и N_3. То же относится и к факторам P и K. Примем условно $N_1 = =A$, а $N_2=B$, тогда (в связи с равным расстоянием доз друг от друга) можно считать N_3=AB то есть совместного применения N_1 и N_2. Итак, имеем: $N_0=0$, $N_1=A$, $N_2=B$ и $N_3=AB$.

Квазилатинский квадрат 2^6 с двойной блокировкой

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*C*	*ACDE*	*ABD*	*DEF*	*ABCEF*	*BCDF*	*AF*	*BE*
2	*ADF*	*EF*	*BCF*	*ACE*	*BDE*	*AB*	*CD*	*ABCDEF*
3	*BF*	*ABDEF*	*ACDF*	*BCDE*	*AE*	*D*	*ABC*	*CEF*
4	*ACEF*	*CDF*	*BDEF*	*AD*	*BC*	*ABCDE*	*EO*	*ABF*
5	*ABCD*	*BCE*	*0*	*ABEF*	*CDEF*	*ACF*	*BDF*	*ADE*
6	*DE*	*A*	*ABCE*	*CF*	*ABDF*	*BEE*	*ACDEF*	*BCD*
7	*BCDEF*	*ABCF*	*AEF*	*B*	*ACD*	*CE*	*ABDE*	*DF*
8	*ABE*	*BD*	*CDE*	*ABCDF*	*F*	*ADEF*	*BCEF*	*AC*

Квазилатинский квадрат для опыта 4^3 с двойной блокировкой

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$N_0P_1K_1$	$N_1P_3K_1$	$N_3P_2K_0$	$N_0P_2K_3$	$N_3P_1K_2$	$N_2P_3K_2$	$N_1P_0K_2$	$N_2P_0K_1$
2	$N_1P_2K_2$	$N_0P_0K_3$	$N_2P_1K_2$	$N_1P_1K_1$	$N_2P_2K_1$	$N_3P_0K_0$	$N_0P_3K_0$	$N_3P_3K_3$
3	$N_2P_0K_2$	$N_3P_2K_3$	$N_1P_3K_2$	$N_2P_3K_1$	$N_1P_0K_1$	$N_0P_2K_0$	$N_3P_1K_0$	$N_0P_1K_3$
4	$N_1P_1K_3$	$N_0P_3K_2$	$N_2P_2K_3$	$N_1P_2K_0$	$N_2P_1K_0$	$N_3P_3K_1$	$N_0P_0K_1$	$N_3P_0K_2$
5	$N_3P_3K_0$	$N_2P_1K_1$	$N_0P_0K_0$	$N_3P_0K_3$	$N_0P_3K_3$	$N_1P_1K_2$	$N_2P_2K_2$	$N_1P_2K_1$
6	$N_0P_2K_1$	$N_1P_0K_0$	$N_3P_1K_L$	$N_0P_1K_2$	$N_3P_2K_2$	$N_2P_0K_3$	$N_1P_3K_3$	$N_2P_3K_0$
7	$N_2P_3K_3$	$N_3P_1K_2$	$N_1P_0K_3$	$N_2P_0K_0$	$N_1P_3K_0$	$N_0P_1K_1$	$N_3P_2K_1$	$N_0P_2K_2$
8	$N_3P_0K_1$	$N_2P_2K_0$	$N_0P_3K_1$	$N_3P_3K_2$	$N_0P_0K_2$	$N_1P_2K_3$	$N_2P_1K_3$	$N_1P_1K_0$

Приравнивая $P_1=C$, $P_2=D$ имеем: $P_0=0$, $P_1=C$, $P_2=D$ и $P_3=CD$; и $K_1=E$ и $K_2=F$, имеем: $K_0=0$, $K_1=E$, $K_2=F$ и $K_3=EF$. Используя эти соотношения двух систем символов, легко заменить систему факторов *A, B, C* и т. д. на систему N, P и K. Например, вариант *ACDE* будет заменен на новый символ $A+CD+E=N_1P_3K_1$, вариант *ABDEF* на $N_3P_2K_3$, а вариант *ABCDEF* на $N_3P_3K_3$, то есть на вариант с максимальными дозами. Контроль, рассматриваемый как *000,* переходит в $N_0P_0K_0$. Этой таблице можно придать более наглядный вид, если, закрепить установленный порядок факторов N, P и K, опустить их обозначения и оставить их дозы (в условных единицах 0; 1; 2 и 3) в виде трехзначных чисел:

Квазилатинский квадрат 4^3

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	010	131	320	023	313	232	102	201
2	122	003	212	111	221	300	030	333
3	202	323	132	231	101	020	310	013
4	113	032	223	120	210	331	001	302
5	330	211	000	303	033	112	222	121
6	021	100	311	012	322	203	133	230
7	233	312	103	200	130	011	321	022
8	301	220	031	332	002	123	213	110

В этих обозначениях полезно применять специальный контроль правильности построения всей схемы и распределения вариантов по блокам: сумма доз каждого из факторов по строке и столбцу должна быть равна 12 и, следовательно, сумма трехзначных чисел, обозначающих варианты, должна составлять 1332. В то же время сумма произведений каждой пары факторов должна составлять 18. Можно применить и более общий контроль. Сумма квадратов трехзначных чисел каждого блока составляет 322788, что вытекает из формулы:

$\Sigma(100N+10P+K)^2= 10000\Sigma N^2+100\Sigma P^2+\Sigma K^2+2000\Sigma NP+200\Sigma NK+20\Sigma PK$,

где $\Sigma N^2 = \Sigma P^2 = 2K^2=2(0^2+l^2+2^2+3^2) =28$ и $\Sigma NP=\Sigma NK=\Sigma PK=18$.

Основная учебная литература:

1. Григорьев, Ю.Д. Методы оптимального планирования эксперимента: линейные модели : учебное пособие / Ю.Д. Григорьев. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 320 с. — Режим доступа. — URL: https://e.lanbook.com/book/65949 . — ISBN 978-5-8114-1937-1. — Текст : электронный.
2. Полоус, Г.П. Основные элементы методики полевого опыта : учебное пособие / Г.П. Полоус. — Ставрополь : СтГАУ, 2009. — 96 с. — Режим доступа. — URL: https://e.lanbook.com/book/5734 . — ISBN 978-5-9596-0615-2. — Текст : электронный.

Дополнительная учебная литература:

1. Медведев, П.В. Математическое планирование эксперимента / П.В. Медведев, В.А. Федотов. – Оренбург : Оренбургский государственный университет, 2017. – 98 с. : табл., граф., схем., ил. – Режим доступа. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481785 . – Библиогр.: с. 72-74. – ISBN 978-5-7410-1759-3. – Текст : электронный.
2. Моисеев, Н.Г. Теория планирования и обработки эксперимента / Н.Г. Моисеев, Ю.В. Захаров. – Йошкар-Ола : ПГТУ, 2018. – 124 с. : ил. – Режим доступа. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=494313 . – Библиогр.: с. 121. – ISBN 978-5-8158-2010-4. – Текст : электронный.
3. Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум / К.В. Щурин, Д.А. Косых. – Оренбург : Оренбургский государственный университет, 2012. – 185 с. : ил. – Режим доступа. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761 . – Библиогр.: с. 177-178. – Текст : электронный.

Контрольные вопросы:

1. Назовите и объясните сущность категорий информации полной факториальной схемы полевого опыта.
2. Дайте и характеристику категориям информации полной факториальной схемы полевого опыта.
3. Укажите преимущества и недостатки полевых опытов с громоздкими полными факториальными схемами, проводимых по методу расщепленных делянок.
4. Изложите сущность метода блоков в многофакторных опытах на основе теории смешивания. Приведите пример деления на блоки восьмерной схемы.
5. Приведите порядок анализа эффектов на основе восьмерной схемы при её делении на два блока.
6. Изложите принципы блокировок в схеме 2^5. Охарактеризуйте преимущества этого метода.
7. Охарактеризуйте возможность блокировки в двух направлениях схемы 2^6 и построения на её основе квазилатинского квадрата.
8. Изложите принцип конвертирования квазилатинского квадрата 2^6 в 4^3. Укажите способ контроля состава блоков квазилатинского квадрата.

Лекция 1.2. Оптимизация схем многофакторных регрессионных опытов на основе квазифакториальных выборок

Вопросы:

1. Информативность и недостатки факториальных схем
2. Квазифакториальные схемы на основе 2^m
3. Квазифакториальные схемы на основе 3^n

Полные факториальные схемы дают возможность получить широкую информацию о характере действия факторов в данном интервале доз (или каких-либо других градаций). Для доз в опыте обычно выбирается определенный «шаг», величина которого подсказывается практикой. Интервал изучаемых доз (количество шагов) также определяется задачами исследования.

Общее количество информации, измеряемой числом степеней свободы, легко определить как произведение чисел, входящих в формулу данной схемы опыта. Так, опыт 2*2*2 имеет восемь единиц информации, опыт 3*3*3 дает соответственно 27 единиц и т. д. Количество информации при заданном шаге доз увеличивается при увеличении объема изучаемой области доз. Так, при исходной единичной дозе, например 20 кг питательного вещества на 1 га, схема 3^3 более информативна, чем схема 2^3. При постоянстве объема изучаемой области доз информация увеличивается за счет уменьшения шага изменения доз. Так, в объеме доз при 40 кг питательного вещества на 1 га шаг схемы 2^3 равен 40 кг на 1 га, а схемы 3^3 – 20 кг на 1 га. В первом случае в заданном объеме мы имеем восемь опорных точек, а во втором случае в том же объеме – 27 опорных точек. Количество информации увеличивается за счет присоединения новых факторов: так четырехфакторный опыт 2*2*2*2 в два раза более информативен, чем трехфакторный 2*2*2. Опыт, проведенный с повторностью, позволяет при дисперсионном анализе выделить остаток с определенным количеством степеней свободы, что даёт информацию о шумах, влияющих на результаты опыта условий и факторов, не контролируемых и не регулируемых в опыте. Эта информация лежит в основе статистической оценки значимости отдельных результатов опыта.

Полные факториальные схемы обладают определенным количеством информации, которая может различаться по своему характеру и практической значимости. Рассмотрим схему дисперсионного анализа восьмерной схемы:

Средний уровень явления	одна степень свободы
Главные эффекты факторов *(A, B, C)*	по одной степени свободы
Парные взаимодействия (*A,B*), (*AC*), (*BC*)	по одной степени свободы
Тройное взаимодействие (*ABC*)	одна степень свободы
Всего	8 степеней свободы

При двукратной повторности имеется восемь степеней свободы остаточной дисперсии, при трехкратной их 16 и т. д. Информация, доставляемая экспериментом, имеет несколько категорий. Первая – информация о среднем уровне явления, о главных эффектах факторов и о парных взаимодействиях. Это актуальная информация. Вторая категория — это информация о тех взаимодействиях

высшего порядка (у нас *ABC),* которые можно считать малозначащими; назовем ее дополнительной. Число степеней свободы остаточной дисперсии, которая берется за базу оценки значимости отдельных результатов опыта, относится к базовой информации. Как указывалось, если взаимодействия высшего порядка априори незначимы, то дополнительная информация может играть роль базовой или присоединена к последней. При дисперсионном анализе опыта с ограниченной рандомизацией (пределами повторения или блока) соответствующая информация о различиях между повторениями или блоками исключается из рассмотрения или игнорируется; это исключаемая информация. При использовании метода смешивания в нее переходит часть дополнительной информации (смешанные взаимодействия высшего порядка). Рассмотрим информативность различных опытов, имеющих одинаковое количество наблюдений (делянок). В таблице даны сведения о четырех категориях информации (в степенях свободы) для опытов с последовательным включением новых факторов, начиная с трехфакторного 2^3 и кончая шестифакторным 2^6, при условии, что общее количество делянок везде 64, а повторность (n) различна. При этом будем считать, что в опытах произведена двойная блокировка, то есть что опыт 2^3 размещен по форме латинского квадрата, а остальные по форме квазилатинского квадрата 8*8.

Число степеней свободы различных категорий информации

Схема и повторность	2^3, n=8	2^4, n=4	2^5, n=2	2^6, n=1
1. Блоков	14	14	14	14
2. Среднего уровня	1	1	1	1
3. Главных эффектов	3	4	5	6
4. Парных взаимодействий	3	6	10	15
5. Остальных взаимодействий	1	5	16	42
6. Актуальная информация	7	11	16	22
7. Базовая информация	43	39	34	28
8. Корректированная актуальная информация	6,62	10,35	14,88	20,11

Таблица показывает, что с увеличением числа факторов актуальная информация прогрессивно растет, но в то же время базовая информация убывает. Эти две противоположные тенденции можно объединить, если произвести корректировку актуальной информации на основе таких соображений. Уменьшение числа степеней свободы для оценки значимости результатов опыта, как известно, влечет за собой повышение критерия значимости F. В наших четырех случаях базовой информации при уровне доверия 0,95 для $\nu_1 = 1$ и ν_2=43; 39; 34 и 28 этот критерий соответственно равен 4,06; 4,09; 4,13 и 4,20. Если бы мы имели ν_2 = оо (то есть исчерпывающую базовую информацию), этот критерий был бы F_{oo}=3,48. Отношение F_{oo} к тому или иному значению F даст меру потери информации вследствие недостаточно твердой базы сравнения. В нашем случае эти отношения соответственно равны 0,946; 0,939; 0,930 и 0,914 (то есть потери равны 5,4; 6,1; 7,0 и 8,6%). Умножая числа, относящиеся в таблице к актуальной информации на установленные коэффициенты, получим корректированную актуальную информацию, приведенную в последней строке таблицы.

Из этих данных видно, что схема 2^6 без повторности более информативна, чем схема 2^3 при восьмикратной повторности, в три раза (20,11:6,62). В обоих случаях размер опыта одинаков (64 делянки), следовательно, затраты труда и средств одни и те же. Это означает, что трехкратное увеличение информации не требует дополнительных затрат и приобретается исключительно в результате более рационального планирования эксперимента.

Далее полезно обратиться к вопросу о расширении опыта в другом направлении – в сторону увеличения количества градаций или доз каждого фактора, причем теперь число факторов следует взять постоянным. Ограничимся тремя факторами, взяв опять постоянным размер опыта – 64 делянки. Возьмем снова опыт 2^3 при восьмикратной повторности, затем опыт 2*2*4 при четырехкратной повторности, далее опыт 2*4*4 в двух повторениях и, наконец, опыт 4*4*4 в одном повторении:

Схема и повторность	2^3, n=8	$4*2^2$, n=4	4^2*2, n=2	4^3, n=1
1. Блоков	14	14	14	14
2. Среднего уровня	1	1	1	1
3. Главных эффектов	3	5	7	9
4. Парных взаимодействий	3	7	15	27
5. Остальных взаимодействий	1	3	9	27
6. Актуальная информация	7	13	23	37
7. Базовая информация	43	37	27	13
8. Корректированная актуальная информация	6,62	12,14	20,98	30,41

Из сравнения полученных результатов с данными предыдущей таблицы видно, что увеличение числа градаций в большей степени повышает информативность эксперимента: если при переходе от опыта 2^3 к шестифакторному опыту 2^6 количество информации увеличилось в три раза, то при переходе от того же трехфакторного опыта 2^3 при восьмикратной повторности к такому же трехфакторному опыту с повышенным числом доз 4^3 (в одном повторении) информативность опыта возрастает в 4,6 раза (30,41:6,62).

Установленный здесь факт повышения информативности эксперимента в процессе замены повторности увеличением числа градаций или доз факторов, к сожалению, в условиях полной факториальной схемы может иметь ограниченное применение. Это происходит в связи с тем, что при увеличении числа градаций или доз факторов число вариантов быстро и прогрессивно возрастает. Так, если ограничиться тремя факторами, то при числе доз 2; 3; 4; 5 и т. д. полная факториальная схема требует соответственно 2^3=8, 3^3=27, 4^3=64, 5^3=125 и т. д. вариантов. Практические условия проведения полевого опыта таковы, что при двукратной повторности (которая с агрономической точки зрения чаще всего считается минимальной) вряд ли возможен опыт с числом вариантов, большим 100. Это означает, что даже опыт 5^3 при полной факториальной схеме становится практически неосуществимым.

С другой стороны, в настоящее время в растениеводстве все большее значение приобретает регрессионный метод анализа данных, с позиций которого такое число точек (наблюдений) для каждого фактора как три и даже четыре представ-

ляется слишком малым для получения статистически достаточно надежных и адекватных изучаемым явлениям кривых или в общем случае поверхностей действия факторов.

В связи с этим возникает потребность найти метод, который позволял бы увеличить число градаций или доз факторов, не выходя за пределы допустимого количества вариантов. Здесь напрашивается выборочный метод. В условиях агрономических исследований для сохранения наглядности и непосредственных сравнений, столь ценных для экспериментатора, лучше всего использовать систематическую выборку, аналогичную применяемой при отборе растительных и почвенных образцов, отбираемых равномерно по диагоналям поля или по какой-либо другой системе.

Необходимо обратить внимание и на следующее: ранее указывалось, что в условиях полевого опыта взаимодействия высшего порядка, начиная со второго (тройные взаимодействия), не имеют практического значения и с ними можно не считаться. Это своего рода баласт («принудительная нагрузка»), содержащийся в полной факториальной схеме. Частично эти взаимодействия могут быть использованы для смешивания с блоками, остальная же часть их, присоединенная к остаточной дисперсии, идет на укрепление базы оценки значимости результатов опыта. Но если остаточная дисперсия уже достаточно надежна (что происходит, когда многовариантный опыт проведен, по крайней мере, в двукратной повторности), то такое присоединение к ней этих взаимодействий практически бесполезно, так как оно почти не изменит величину критерия *F*. Посмотрим, каково количество этих взаимодействий в последовательно расширяющихся полных факториальных схемах:

Схема	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3
Взаимодействия высшего порядка	1	8	27	64	125
В % к общему числу вариантов	12,5	29,5	42,2	51,2	57,9

Как видно, начиная со схемы 5^3, уже более 50% информации, доставляемой полным факториальным опытом, в своей основе бесполезна и практически не нужна.

Квазифакториальные схемы. Возможности экспериментальных схем, являющихся выборками из полных факториальных схем, различны. Среди наиболее подходящих при агрономических полевых исследованиях важное место принадлежит квазифакториальным схемам.

Например, желательно от схемы 2*2*2 с тремя факторами при двух градациях каждый (всего восемь вариантов) перейти к опыту с четырьмя градациями. Если взять полную факториальную схему, то понадобится 4*4*4 = 64 варианта, что, предположим, в данных условиях не может быть принято. Возьмем основные факторы *A, B* и *C* в дозах 0 и 2 и в то же время введем четвертый – условный фактор *ABC – S* в дозах 0 и 1, так что *S*=0 в терминах *A, B, C* будет 000, а S_1=1 будет 111. Теперь при планировании будем иметь дело с четырехфакторным опытом 2^4 с факторами *A, B, C* и *S*, для которого можно применить способ блокировки:

Первый блок: *0*, *AB, AC,* AS, *BC, BS, CS, ABCS;*
Второй блок: *A, B, C, S, ABC, ABS, ACS, BCS,*

или в цифровом обозначении (дозы *A, B,* C=0 и 2, *S*=0 и 1):

Первый блок: 0000, 2200, 2020, 2001, 0220, 0201, 0021, 2221;
Второй блок: 2000, 0200, 0020, 0001, 2220, 2201, 2021, 0221.

Если теперь последние цифры этих чисел, принадлежащие условному фактору *S*, заменить соответственно 0 на 000 и 1 на 111, после чего их сложить с предшествующими трехзначными числами, относящимися *к A, B* и *C* (например, для последнего варианта 0221 имеем 022+111 = 133), то получим схему в терминах трех изучаемых факторов:

Первый блок: 000, 220, 202, 311, 022, 131, 113, 333;
Второй блок: 200, 020, 002, 111, 222, 331, 313, 133.

Здесь каждый из факторов *A, B* и *C* встречается в четырех дозах 0, 1, 2 и 3, но число вариантов уже не 43 = 64, а только 2^4= 16, причем, очевидно, что эти 16 вариантов составляют выборку из 64 вариантов полной факториальной схемы. Как видно, сокращение схемы произошло за счет отсутствия в новой схеме некоторых сочетаний доз, имеющихся в полной схеме: здесь 0 сочетается с 2 и 1 с 3, но нет сочетаний 0 и 2 с 1 и 3. В терминах *A, B, C* и *S* опыт факториальный, в терминах же основных факторов *A, B* и *C* он не является таковым, в связи с чем ему подходит название «квазифакториальный».

Блокировка такого опыта подчиняется правилам блокировки полных факториальных опытов: в каждом блоке сумма доз каждого из трех факторов составляет 12, а сумма произведений попарно взятых факторов — 20 (более общий контроль: сумма чисел каждого блока 1332, сумма квадратов их 327228).

Теперь расширим задачу: допустим следует изучить шесть доз каждого фактора *A, B, C,* то есть произвести при помощи условного фактора выборку из полной факториальной схемы 6*6*6. Взяв S_0=000, S_1=111 и S_2=222, а основные факторы *A, B* и *C* в дозах 0 и 3, имеем для квазифакториальной схемы формулу 2*2*2*3. Если обратиться к соответствующей схеме и в согласии с новыми условиями заменить для факторов *A, B* и *C* 1 на 3, то получим:

Первый блок: 0000, 0330, 3030, 3300, 0001, 0331, 3031, 3301, 0002, 0332, 3032, 3302;
Второй блок: 3330, 0030, 0300, 3000, 3331, 0031, 0301, 3001, 3332, 0032, 0302, 3002.

Теперь следует цифры 0; 1 и 2, стоящие в конце этих четырехзначных чисел и относящиеся к условному фактору *S*, заменить соответственно на 000, 111 и 222 и сложить с предыдущими трехзначными числами. В результате имеем:

Первый блок: 000, 033, 303, 330, 111, 144, 414, 441, 222, 255, 525, 552;
Второй блок: 333, 003, 030, 300, 444, 114, 141, 411, 555, 225, 252, 522.

(Контроль: сумма чисел блока 3330 и сумма их квадратов 1295370).

Остановившись пока на этих простейших случаях применения метода условного фактора для создания квазифакториальной схемы, отметим его особенности. Условный фактор *S=ABC,* принимающий значения S_0=000 и S_1=111 в пер-

вой схеме и добавочное значение S_2=222 – во второй, с агрономической точки зрения может рассматриваться как меняющийся фон, на котором изучается восьмерная схема факторов *A, B* и *C* с интервалом доз 0-2 в первом и 0-3 во втором случае. Если представить себе оси координат в трехмерном пространстве *A, B* и *C,* то геометрически в первом случае область доз будет являться кубом со сторонами, равными трем единицам, а во втором – пяти единицам. Внутри этого куба проходит диагональ через точки 000, 111, 222, 333 в первом случае и через точки 000, 111, 222, 333,444, 555 – во втором случае. Поскольку восьмерная схема геометрически также может быть представлена в виде куба, наши новые схемы представляют собой особое соединение таких элементарных кубов: в первом случае двух, а во втором трех. Особенность этих схем заключается в том, что в первой из них начальная точка (111) второго куба содержится внутри первого, а во второй схеме внутри первого куба содержатся начальные точки (111 и 222) двух последующих кубов. Из-за этого последовательность кубов имеет своей осью диагональ области доз. Эта особенность схемы представлена на рисунке:

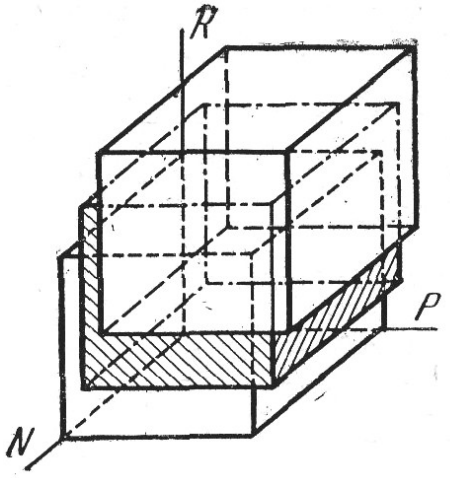


Схема 2^3*3

Здесь ясно видно диагональное расположение кубов. В связи с этим происходит концентрация наблюдаемых точек (вершин элементарных кубов) вдоль диагонали и отсутствие их в верхнем левом и нижнем правом углу. Это означает, что из опыта исключены слишком контрастные сочетания доз. Агрономически это обстоятельство нельзя назвать большим недостатком, так как практически такие сочетания обычно не представляют большого интереса. С математической же точки зрения при использовании регрессионного анализа данное обстоятельство следует рассматривать, как хотя и небольшой, но все же недостаток, так как именно контрастные сочетания имеют большее значение для точности вычисляемых параметров, чем менее контрастные.

Теперь рассмотрим применение метода условного фактора для 32-вариантного опыта, сводимого к полной факториальной схеме 2^5. Условимся в обозначениях. В предыдущих квазифакториальных схемах была взята восьмерная схема 2^3 при двух дозах условного фактора S_0 и S_1 в первой из них и трех дозах S_0, S_1, и S_2 во второй. Поэтому применима 2^3*2 для первой схемы и 2^3*3 для второй, условившись считать последний множитель указателем числа доз условного фактора.

Для взятой 32-вариантной схемы будем иметь формулу 2^3*4, то есть возьмем четыре дозы фона *S=ABC*: S_0=000, S_1=111, S_2=222, S_3=333. Тогда, полагая *A*=4, *B*=4, *C*=4, *D*=111, *E*=222 и *DE*=333, можно блокировку, представленную на странице 48, изобразить в цифровом шифре так:

Первый блок:	000,	440,	515,	155,	626,	266,	333,	773;
Второй блок:	404,	044,	111,	551,	222,	662,	737,	377;
Третий блок:	400,	040,	115,	555,	226,	666,	733,	373;
Четвертый блок:	004,	444,	511,	151,	622,	262,	337,	777.

(Контроль: $\Sigma x = 3108$, $\Sigma x^2 = 1653900$ для каждого блока.)

Особой маневренностью описанного вида обладает схема 2^6 с 64 вариантами, в виде квазилатинского квадрата 8*8. Это ее свойство может быть сохранено во всех произведенных от нее схемах. Прежде всего, если фактору *F* придать значения 1 (отсутствие этого фактора) и 2 (наличие его), которые будут означать номера повторений, и произвести соответствующие перестановки, то получим факториальную схему 2^5 с 32 вариантами в двукратной повторности, размещенную по форме квазилатинского квадрата. К этой схеме приложимы все преобразования, о которых говорилось выше. Последнее из описанных преобразований даст опыт 4^4; ранее описанные модификации могут дать трехфакторные опыты соответственно 8*8*8, 7*7*7, 6*6*6 и другие. Применяя к схеме 2^6 метод условного фактора при условии *F=S* с дозами 00000 и 11111, можно получить производную схему пятифакторного опыта 4^5 с квазилатинским размещением вариантов.

До сих пор в основу выборочных схем была положена полная факториальная схема 2^m. Данный принцип естественным порядком может быть распространен и на схему 3^n. Обратимся к опыту 3^4 с двойной блокировкой. Если здесь первые три цифры (относящиеся к факторам *A, B* и *C)* 0, 1 и 2 заменить соответственно на 0; 3 и 6, а четвертые цифры (фактор *D=S)* 0; 1 и 2 на трехзначные 000, 111 и 222 и сложить их с трансформированными указанным образом предыдущими трехзначными числами, то полученная этим путем 81-вариантная схема будет выборкой из более обширной факториальной схемы 9*9*9 (в полном составе 729 вариантов). Таким образом, переход к новым будет производиться так: вариант 2210 перейдет в вариант 663+000=663, вариант 2011 в 603+111=714, вариант 0122 в 036+222=258 и т. д.

Как указывалось, при построении таблицы, на основе которой сконструирована данная выборочная схема 9*9*9, были смешаны взаимодействия *ABC* I, *ABD* III, *ACD* II и *BCD* IV по горизонтали, взаимодействия *ABC* II, *ABD* IV, *ACD* III и *BCD* I по вертикали, а также в связи с балансированием смешивания возникло непроизвольное смешивание «диагональных» систем квадратов с взаимодействиями *ACD* I и *BCD* III (по две степени свободы). Теперь, когда принято *D=S=ABC,* интерпретация процесса смешивания в некоторых отношениях усложнена, но правомерность основанной на смешивании блокировки опыта остается в силе.

Выборочная схема 9*9*9 с тройной блокировкой

Блоки-строки	Блоки-столбцы								
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	330	066	603	222	858	585	771	417	144
2	882	528	255	441	177	714	000	636	363
3	111	747	474	660	306	033	552	288	825
4	606	333	060	588	225	852	147	774	411
5	258	885	522	717	444	171	366	003	630
6	477	114	741	036	663	300	828	555	282
7	063	600	336	855	582	228	414	141	777
8	525	252	888	174	711	447	633	360	006
9	744	471	117	303	030	666	285	822	558

(Контроль: $\Sigma x=3996$, $\Sigma x^2 = 2393604$ для каждой строки, столбца и квадрата)

В случае проведения опыта в двух повторениях представляется возможным во втором повторении смешать новую систему взаимодействий, которая имеет самостоятельный характер и не зависит от первой. Это новая система в терминах *A, B, C* и *S* будет такой:

по горизонтали: *ABC* III, *ABS*II, *ACS* I, *BCS* II;
по вертикали: *ABC* IV, *ABS* I, *ACS* IV, *BCS* III.

Можно определить размещение вариантов по блокам второго повторения при указанной здесь новой системе смешивания в двух направлениях. В данном случае непроизвольное смешивание с «диагональными» квадратами коснулось взаимодействий *ACS* II и *BCS* I. В таблице наблюдаются равенства по блокам $\Sigma x = 3996$ и $\Sigma x^2=2393604$.

Выборочная схема 9*9*9, второе повторение

Блоки-строки	Блоки-столбцы								
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	**330**	006	663	822	588	255	171	747	414
2	282	**858**	525	441	117	774	600	366	033
3	711	477	**144**	060	636	303	552	228	885
4	666	333	000	258	825	582	**417**	174	741
5	528	285	852	777	444	111	036	**603**	360
6	147	714	471	306	063	630	888	555	222
7	003	660	336	**585**	252	828	744	411	177
8	855	522	288	114	**771**	447	363	030	606
9	474	141	717	633	300	**066**	225	882	558

Если диагональное направление не представляет интереса, то следует произвести рандомизацию всех девяти строк и девяти столбцов, нарушив тем самым целостность квадратов. Если же блокировка по квадратам должна быть сохранена (за счет потери указанных выше взаимодействий), то сначала следует рандомизировать горизонтальные и вертикальные полосы, а потом соответственно строки и столбцы внутри этих полос. Возрастание доз каждого из изучаемых факторов проводит к увеличению относительного количества взаимодействий

высшего порядка, которые обычно столь малозначащи, что фактически не дают никакой полезной информации. Правда, они могут быть употреблены для укрепления базы сравнения, то есть берут на себя роль повторности. Но, начиная с некоторого момента, эта роль становится малозаметной. Отсюда, как это было указано, такие взаимодействия становятся в известном смысле бесполезными. В связи с этим представляет интерес установить влияние описанного здесь способа образования выборочной системы вариантов на потери актуальной информации и на уменьшение указанной практически бесполезной информации.

Возьмем полный факториальный опыт 9*9*9. Здесь то, что ранее было названо актуальной информацией, обладает 217 степенями свободы, а дополнительная информация (взаимодействия высшего порядка) — 512 степенями свободы. Теперь на основе этой полной факториальной схемы, состоящей из 729 вариантов, конструируется выборочная квазифакториальная схема 3*3* *3*3, содержащая 81 вариант. Следовательно, общая информация уменьшена в девять раз. Однако в этой новой схеме актуальная информация обладает 33 степенями свободы, то есть уменьшена по сравнению с предыдущей примерно в семь раз. С другой стороны, к дополнительной (в основном балластной) информации теперь относится 48 степеней свободы, то есть она уменьшилась почти в 11 раз. Таким образом, здесь переход от факториальной схемы 9*9*9 (практически неосуществимой) к квазпфакториальной схеме 3*3*3*3 с 81 вариантом произведен так, что наибольшие потери несет наименее значимая дополнительная информация и максимально сохраняется наиболее ценная информация, относящаяся к главным эффектам и взаимодействиям первого порядка. Это означает, что данная выборка построена в известном смысле рационально.

Основная учебная литература:

1. Григорьев, Ю.Д. Методы оптимального планирования эксперимента: линейные модели : учебное пособие / Ю.Д. Григорьев. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 320 с. — Режим доступа. — URL: https://e.lanbook.com/book/65949 . — ISBN 978-5-8114-1937-1. — Текст : электронный.

Дополнительная учебная литература:

1. Дрейпер, Н. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. [Текст] : переводное издание. Кн. 1 / Н. Дрейпер, Г. Смит ; пер. с англ. Ю. П. Адлер. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Финансы и статистика, 1986. - 366 с. : ил.
2. Медведев, П.В. Математическое планирование эксперимента / П.В. Медведев, В.А. Федотов. – Оренбург : Оренбургский государственный университет, 2017. – 98 с. : табл., граф., схем., ил. – Режим доступа. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481785 . – Библиогр.: с. 72-74. – ISBN 978-5-7410-1759-3. – Текст : электронный.
3. Моисеев, Н.Г. Теория планирования и обработки эксперимента / Н.Г. Моисеев, Ю.В. Захаров. – Йошкар-Ола : ПГТУ, 2018. – 124 с. : ил. – Режим доступа. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=494313 . – Библиогр.: с. 121.

– ISBN 978-5-8158-2010-4. – Текст : электронный.
4. Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум / К.В. Щурин, Д.А. Косых. – Оренбург : Оренбургский государственный университет, 2012. – 185 с. : ил. – Режим доступа. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761 . – Библиогр.: с. 177-178. – Текст : электронный.

Контрольные вопросы:

1. Опишите способ оценки информативности схем полевых опытов на основе числа степеней свободы в соответствии с категориями информации.
2. Охарактеризуйте информативность факториальных схем в соответствии с их повторностью и числом вариантов (факторов).
3. Охарактеризуйте информативность факториальных схем в соответствии с их повторностью и числом вариантов (градаций факторов).
4. Изложите проблему, связанную с многовариантностью полных факториальных схем и её перегруженностью неактуальной информацией.
5. Опишите принципы конструирования квазифакториальных схем полевых опытов.
6. Приведите пример конструирования квазифакториальных схем полевых опытов на основе комплексов 2^n.
7. Изложите порядок блокировки квазифакториальных 2^n.
8. Охарактеризуйте особенность квазифакториальных схем, построенных на основе использования условного фактора.
9. Опишите принципы конструирования квазифакториальных схем на основе комплексов 3^n.
10. Охарактеризуйте особенность размещения квазифакториальных схем $^1/_9$(9*9*9) в квазилатинском квадрате 9*9.

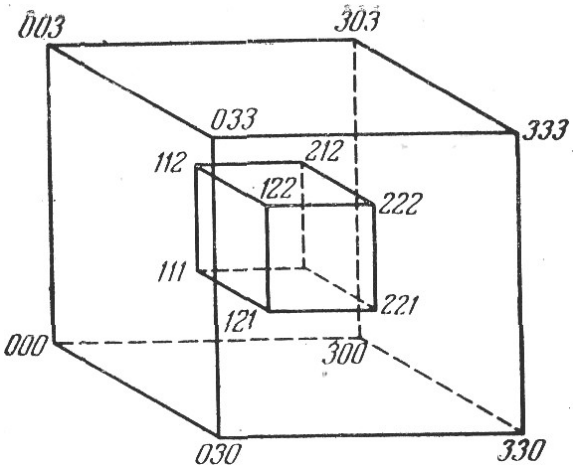
Лекция 1.3. Неполные факториальные схемы на основе «вписанных кубов» и фрагментов схемы 3*3*3

Вопросы:

1. Принципы разработки неполных схем опытов на основе вписанных кубов
2. Разворачивание схем полевых опытов на основе вписанных кубов
3. Разработка схем опытов из фрагментов факториальной схемы 3*3*3
4. Разворачивание схем полевых опытов из фрагментов схемы 3*3*3

Рассмотрим способ проведения выборки из многовариантной факториальной схемы, который назовем способом вписанных кубов, на примере трехфакторного опыта (не представляет труда распространить этот способ на случай четырех и более факторов, имея в таком случае дело с так называемым гиперкубами). Возьмем схему 2^3 с шагом, равным трем дозам, то есть куб, построенный в пространстве с координатами А, В и С (или в опыте с удобрениями N, P и K). Впишем в него меньший куб с ребром 1. В результате получим систему из 16 вариантов:

Внешний куб: 000, 003, 030, 300, 033, 303, 330, 333;
Внутренний куб: 111, 112, 121, 211, 122, 212, 221, 222.



Куб с ребром 1, вписанный в куб с ребром 3

Здесь изучаются дозы от 0 до 3, то есть 4 дозы (включая нулевую) каждого из трех факторов. Если бы опыт с таким числом доз трех факторов был поставлен по полной факториальной схеме, то понадобилось бы 4*4*4=64 варианта, в число которых входят и перечисленные выше 16 вариантов. Следовательно, это новая схема представляет собой 1/4 полной факториальной схемы и является выборкой из нее. В этой схеме количество информации (измеряемой в степенях свободы) таково:

	Внешний куб	Внутренний куб	Всего
1. Средний уровень	1	1	2
2. Главные эффекты	3	3	6
3. Парные взаимодействия	3	3	6
4. Тройные взаимодействия	1	1	2

Здесь в опыте в одном повторении за базу оценки значимости приходится брать две степени свободы тройного взаимодействия, что при F=18,51 дает низкий поправочный коэффициент 3,84:18,51=0,207 и малую информативность всего опыта 14*0,207=2,9 единицы информации. Такой опыт не следует ставить без повторности. Но при двукратной повторности, когда база оценки значимости опирается уже на 17 степеней свободы (объединение остаточной дисперсии с тройным взаимодействием), поправочный коэффициент возрастает до 3,84:4,45 = 0,863 и количество информации составит 12,1 единицы. Сравнивая этот результат с расчетами для такой же, ранее полученной квазифакториальной 16-вариантной схемы $4*2^2$ при n=4, видим, что новая выборочная схема (обозначим ее 2^3+2^3) дает то же количество информации, но позволяет, во-первых, увеличить число доз двух факторов с 2 до 4 и, во-вторых, снизить повторность опыта с четырехкратной до двукратной. Если считать, что повторение, состоящее из 16 вариантов, велико, то можно применить блокировку, используя для этого одну степень свободы тройного взаимодействия. Разбив варианты каждого из кубов на две группы по правилам образования блоков при восьмерной схеме:

	Группа *а*	Группа *в*
Внешний куб:	000, 033, 303, 330	333, 300, 030; 003
Внутренний куб:	111, 122, 212, 221	222, 211, 121, 112

и соединяя эти группы накрест, получим два блока:

Первый блок: 000, 033, 303, 330, 222, 211, 121, 112,
Второй блок: 333, 300, 030, 003, 111, 122, 212, 221.

(Контроль: Σx=1332, Σx^2=322788)

Объединение двух кубов 2^3+2^3 пока не вывело нас из пределов 4 доз, хотя и оказалось в указанном выше смысле эффективным по отношению полной факториальной схемы $4*2^2$ и тем более схемы 4^3. Иногда желательно иметь в опыте большее число доз. Это можно достигнуть, если построить еще один внешний куб, то есть взять три куба с разными шагами доз (1; 3 и 5) каждого из факторов:

	Первый блок	Второй блок
Внешний куб:	000, 550, 505, 055;	555, 500, 050, 005
Серединный куб:	111, 441, 414, 144;	444, 411, 141, 114
Внутренний куб:	222, 232, 323, 233;	333, 322, 232, 223,
Контроль:	Σx=3330, Σx^2= 1277610	

Систему вписанных друг в друга кубов 2^3 (подобную деревянным «матрешкам») можно расширить и далее, например, система из четырех кубов $2^3+2^3+2^3+2^3$, содержащая 32 варианта, может быть размещена в четырех блоках по восемь вариантов в каждом:

Первый блок	Второй блок
000, 770, 707, 007;	777, 700, 070, 007;
444, 334, 343, 433;	333, 344, 434, 443;
Третий блок	**Четвертый блок**
111, 661, 616, 166;	666, 611, 161, 116;
555, 225, 252, 522;	222, 255, 525, 552.

В данном случае наш прежний контроль — постоянство по блокам Σx^2 уже не имеет силы. Это объясняется тем, что в предыдущих схемах все испытываемые дозы одинаково представлены во всех блоках (например, в схеме $2^3+2^3+2^3$ каждая из доз любого фактора 0 и 5; 1 и 4; 2 и 3 дважды встречается в каждом из двух блоков). Вследствие этого суммы квадратов доз, которые входят в сумму квадратов трехзначных чисел Σx^2, также одинаковы. В последней же четырехблочной схеме в первом и втором блоках дважды встречаются дозы 0; 7; 3 и 4, а в третьем и четвертом блоках дозы 1; 6; 2 и 5; сумма квадратов первых составляет 74, а вторых – 66. Отсюда алгебраически следует, что Σx^2 по блокам не может быть одинакова. В таких случаях (они встретятся нам и далее) контролем будет равенство по блокам Σx и суммы произведений доз каждой пары факторов, которые обозначим Σzv. В последней из приведенных выше схем имеем Σx=3108 и Σzv=98. (Следовательно, здесь контроль выражен в менее компактной форме).

Несмотря на простоту этой схемы и относительную малочисленность ее вариантов (она представляет собой выборку 32 вариантов из полной факториальной схемы 8^3, состоящей из 512 вариантов, то есть является $^1/_{16}$ этой последней), она в агрономическом отношении вряд ли может считаться удачной. Дело в том, что в ней большое относительное количество имеют слишком контрастные сочетания доз факторов, такие, как 700, 070, 770 или 611, 161, 661, что агрономически воспринимается весьма критически. Правда, эти контрастные варианты содержатся и в полной факториальной схеме 8^3, откуда они и попадают в выборку, однако относительное количество их в этой полной схеме значительно меньше, чем в данной выборке. С математической точки зрения в особенности тогда, когда опытные данные подлежат обработке регрессионным методом, в указанной контрастности нет ничего плохого, и даже, наоборот, данное обстоятельство содействует получению более надежных параметров уравнения регрессии. По-видимому, здесь необходим некоторый компромисс между этими двумя противоположными точками зрения.

Недостатком описанных выше схем, построенных на основе стандартной схемы 2^3, является то обстоятельство, что во внутренней части изучаемой области доз сеть наблюденных точек более густая, а во внешней части несоразмерно редкая. Выборка охватывает эту область неравномерно. Этот недостаток можно исправить, если вместо стандартного куба 2^3 взять за основу систему расширяющихся и в то же время более насыщенных фиксированными точками кубов. Так, первый внутренний куб можно построить по прежней формуле 2^3, что даст восемь вариантов, но второй – внешний куб можно взять в виде 3^3, что дает 27 вариантов. Так как схема 3^3 имеет центральную точку, то чтобы не вводить дробный код для доз, шаг схемы 2^3 (ребро внутреннего куба) следует взять равным двум, тогда и шаг схемы 3^3 будет также два. В целом набор вариантов в этом случае будет таким:

Внутренний куб:	111, 113,	131,	311,	133,	313,	331,	333	
Внешний куб: {	000, 002,	004,	020,	022,	024,	040,	042,	044;
	200, 202,	204,	220,	222,	224,	240,	242,	244;
	400, 402,	404,	420,	422,	424,	440,	442,	444.

Повторение, состоящее из 8+27=35 вариантов, по принятому у нас условию, слишком велико (более 15-16), и поэтому осуществление такого опыта в натуре требует блокировки вариантов. В данном случае удобно воспользоваться системой блоков, построенной для схемы 3^3. Каждый из трех блоков внешнего куба будет иметь по девять вариантов. За четвертый блок следует взять внутренний куб с восемью вариантами, но, чтобы сделать его равным по числу вариантов с первыми тремя блоками, можно добавить «нейтральный» вариант, каким является центр схемы – 222. Этот вариант будет участвовать дважды: в схеме 3^3 и в качестве добавочного члена к схеме 2^3. В целом схема, которая символически может быть обозначена $1 + 2^3 + 3^3 = 36$, будет после блокировки такой:

Первый блок:	000,	204,	402,	022,	220,	424,	044,	242,	440;
Второй блок:	002,	200,	404,	024,	222,	420,	040,	244,	442;
Третий блок-	004,	202,	400,	020,	224,	422,	042,	240,	444;
Четвертый блок:	111,	113,	131,	133,	311,	313,	331,	333,	222.

(Контроль: $\Sigma x=1998$, $\Sigma zv = 36$.)

Конечно, как и во всех других случаях, внутри каждого блока должна быть проведена рендомизации. Приведенная выше схема является выборкой 36 вариантов из полной факториальной схемы 5*5*5, состоящей из 125 вариантов. Если бы было желательным расширить область изучаемых доз объема 7*7*7 = 343, то логично было бы построить новый внешний куб, который для сохранения того же шага в две единицы должен соответствовать схеме 4*4*4. Следовательно, в этом случае общее количество вариантов достигло бы 36+64=100 (при блокировке потребовалось бы еще несколько добавочных дублирующих друг друга центральных вариантов). Такое большое число вариантов в условиях полевого опыта явно непосильно.

В связи с этим при переходе к схеме 7*7*7 можно внешний куб 4^3 заменить на 3^3, то есть повторить эту последнюю схему дважды, но с различной величиной шага (2 и 3 единицы). В этом случае схема будет содержать 36+27=63 варианта и число блоков по девять вариантов возрастет до семи:

Первый блок:	000,	306,	603,	033,	330,	636,	066,	363,	660;
Второй блок:	003,	300.	606,	036,	333,	630,	060,	366,	663;
Третий блок:	006,	303,	600,	030,	336,	633,	063,	360,	666;
Четвертый блок:	111,	135,	153,	313,	331,	355,	515,	533,	551;
Пятый блок:	113,	131,	155,	315,	333,	351,	511,	535,	553;
Шестой блок	115,	133,	151,	311,	335,	353,	513,	531,	555;
Седьмой блок:	222,	442,	424,	244,	422,	242,	224	444,	333.

(Контроль: $\Sigma x=2997$, $\Sigma zv=81$.)

Рекомендуется в двух участвующих здесь схемах 3^3 произвести смешивание с блоками различных пар степеней свободы взаимодействия второго порядка. У нас во внешней схеме 3^3 смешана пара степеней свободы *ABC* I, а в промежуточной схеме 3^3 – пара *ABC* II (параграф 7).

Если и эта схема окажется неприемлемой ввиду ее громоздкости, можно промежуточную схему 3^3 заменить на более короткую 2^3, что даст (вместе с доба-

вочным центральным вариантом) схему из 36+9=45 вариантов. Она может быть такой:

Первый блок:	000,	306,	603,	033,	330,	636,	066,	363,	660;
Второй блок:	003,	300,	606,	036,	333,	630,	060,	366,	663;
Третий блок:	006,	303,	600,	030,	336,	633,	063,	360,	666;
Четвертый блок:	111,	155,	515,	551,	444,	422,	242,	224,	333;
Пятый блок:	555,	511,	151,	115,	222,	244,	424,	442,	333.

(Контроль: Σx=2997, Σzv=81)

В случае еще большего расширения области изучаемых доз (при неизменной единичной дозе каждого фактора) можно путем прибавления к схеме $1+2^3+3^3+3^3$ новой восьмерной схемы 2^3 получить схему с $2+2^3+2^3+ +3^3+3^3=72$ вариантами при интервале доз от 0 до 8, являющуюся выборкой из полной факториальной схемы 9*9*9, состоящей из 729 вариантов. Эта схема конкурирует с ранее описанной 81-вариантной схемой, построенной по принципу квазилатинского квадрата. Новая схема, относящаяся к той же, что и ранее, области изучаемых доз 9*9*9, обладает тем преимуществом, что более или менее равномерно охватывает всю эту область и в то же время имеет уменьшенное число вариантов (72), но вместе с тем здесь возможна только одинарная блокировка опыта. Прежняя схема из 81 варианта допускала двойную (и даже тройную) блокировку, но имела ту особенность, которая была названа «диагональным» расположением опыта.

Схемы, построенные из фрагментов факториальной схемы 3*3*3. Метод планирования опыта по системе центральных и облекающих друг друга кубов в своем чистом виде, например в форме $1+2^3+3^3+4^3$, имеет ту положительную сторону, что равномерно репрезентирует изучаемую область доз. Однако недостатком этих схем является то, что число фиксируемых точек (вариантов опыта) весьма быстро возрастает по мере увеличения области доз: $1+2^3=9$, $1+2^3+3^3=36$, $1+2^3+3^3+4^3=100$ и т.д. Существуют некоторые способы смягчения этого недостатка, нарушающие однако равномерность распределения точек наблюдения в области доз. Такое планирование опыта является определенным компромиссом между требованиями строгой теории и практическими возможностями. Но даже этот компромисс может оказаться для практических условий не всегда приемлемым. Например, такая упрощенная схема, как $1+2^3+3^3+3^3$, все же требует осуществления 63 вариантов, что в ряде случаев весьма затруднительно. Возникает вопрос: нельзя ли по линии компромисса идти далее и еще больше облегчить схему в пределах заданной области доз?

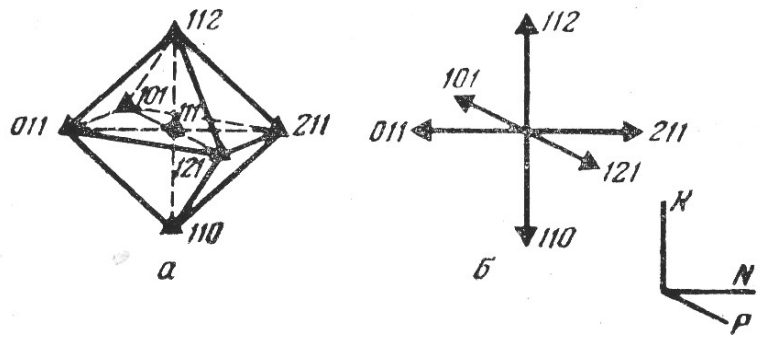
Этот путь открывает одно благоприятное обстоятельство. Дело в том, что схема 3*3*3, состоящая из 27 вариантов, может быть разбита на несколько частей — фрагментов, которые в известном смысле равнозначны. Эти фрагменты при дозах факторов 0; 1 и 2 такие:

Центр схемы:	111;
Октаэдр:	011, 211, 101, 121, 110, 112;
Куб 2^3	000, 200, 020, 002, 220, 202, 022, 222;
Кубоктаэдр:	100, 120, 102, 122, 010, 210, 012, 212, 001, 201, 021, 221.

Во-первых, легко убедиться, что здесь в наличии все 27 вариантов схемы 3*3*3. Во-вторых, эта группировка вариантов подчинена такой закономерности:

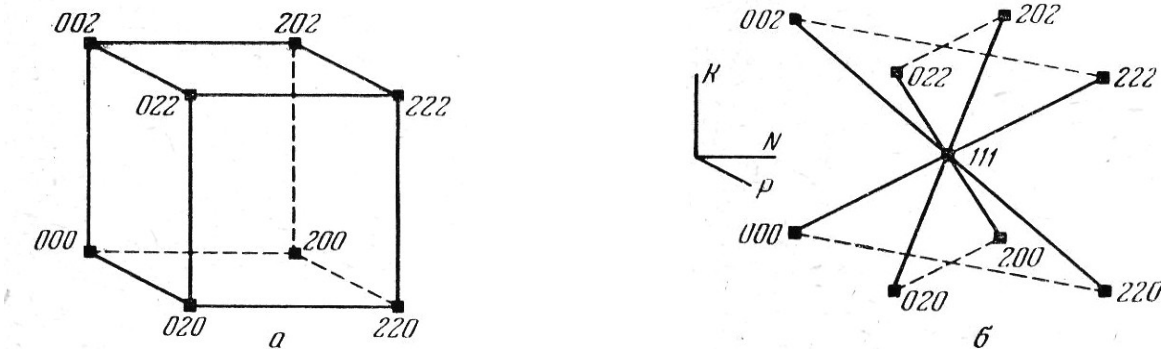
Фрагмент	Число вариантов	Сумма доз фактора	Сумма попарных произведений доз
Центр	1	1	1
Октаэдр	6	6	6
Куб 2^3	8	8	8
Кубоктаэдр	12	12	12
В целом	27	27	27

Таким образом, данные здесь четыре группы вариантов характерны тем, что сумма доз каждого фактора и сумма произведений доз попарно взятых факторов равна числу вариантов в группе. Это означает, что средняя доза фактора и среднее произведение попарных доз в каждой из этих групп и во всей схеме 3*3*3 одинаковы и равны единице. Именно в этом смысле фрагменты равнозначны между собой и схеме 3*3*3 в целом и репрезентируют ее, хотя и с различной степенью детализации. Объясним геометрические названия этих групп вариантов. Первое из них – центр схемы не требует истолкования (это серединная точка схемы 3*3*3). Октаэдр – многогранник с шестью вершинами, соответствующими шести вариантам второй группы, представленный на рисунке (*а*). Этой группе вариантов можно дать и другое наглядное истолкование: они являются концами взаимно перпендикулярных отрезков прямых, проходящих через центр и параллельных осям координат (*б*).



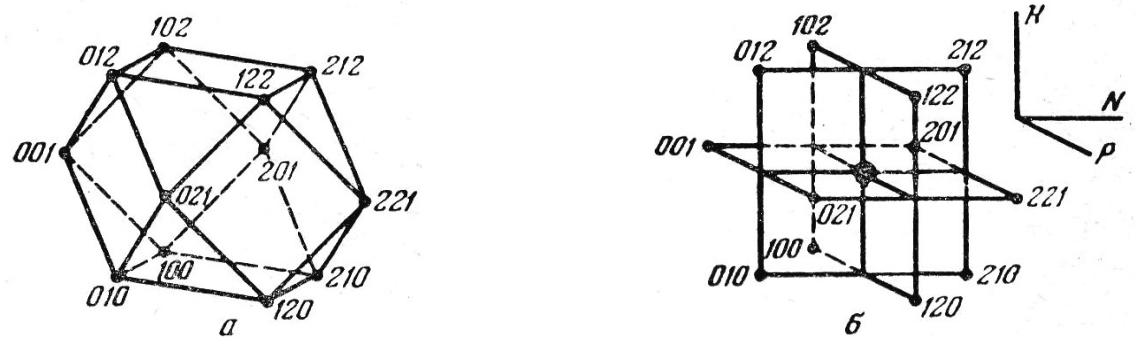
Варианты по вершинам октаэдра и в центре

Третья группа – куб 2^3 (рис. *а*) или пересечение четырех диагоналей (рис. *б)* не требует специального объяснения.



Варианты восьмерной схемы (куб)

Наконец, четвертая группа, состоящая из 12 вариантов, образует кубоктаэдр, который получается, если у куба отсечь у вершин равновеликие трехгранные пирамиды (рис. а).



Варианты по вершинам кубоктаэдра.

Данная группа может иметь и другое геометрическое истолкование: она представляет собой вершины трех квадратов, лежащих на трех взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через центр и параллельных трем координатным плоскостям (рис. *б)*.

Объединение этих четырех геометрических фигур, дает куб 3*3*3:

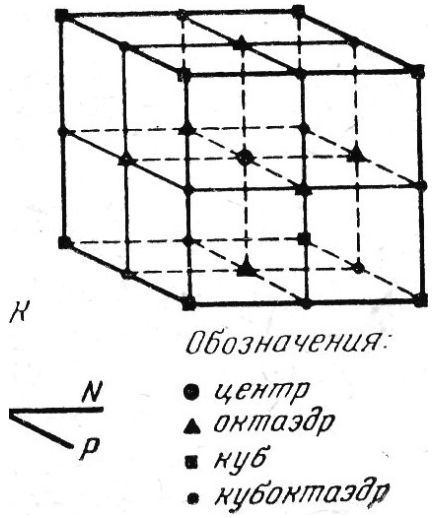


Схема 3*3*3 и ее фрагменты

Четыре фрагмента схемы 3*3*3 и их различные сочетания позволяют репрезентировать данный объем доз 3^3; степень репрезентирования будет зависеть от числа вариантов в фрагменте в том или ином их сочетании. Так, центральный вариант 111 в некоторой мере, хотя и слабо, репрезентирует этот объем. Если к этой точке присоединить октаэдр, то совокупность из семи вариантов (111, 011, 211, 101, 121, 110, 112) будет уже несколько лучше представлять этот объем. Лучше это делает соединение центра с кубом 2^3, содержащее девять вариантов. Еще лучше будет, если к центральной точке присоединить кубоктаэдр, что даст 13 точек. Комбинация центр – октаэдр – куб дает 15 точек, комбинация центр – октаэдр – кубоктаэдр – 19 точек, сочетание центр – куб – кубоктаэдр – 21 точку и, наконец, центр – октаэдр – куб – кубоктаэдр дает все 27 точек полный факториальной схемы 3*3*3. Во всех перечисленных случаях основное свойство – равенство

средних доз каждого фактора и средних произведений попарных доз факторов – полностью сохраняется.

Данное обстоятельство позволяет вместо того, чтобы строить последовательно расширяющиеся объемы доз путем перехода от одной факториальной схемы 2^3 (первая «оболочка») к следующей полной схеме 3^3 (вторая «оболочка»), далее к схеме еще более высокого порядка (третья «оболочка») и т. д. (что, как сказано, быстро усложняет схему опыта), строить такие расширяющиеся схемы на основе указанных фрагментов куба 3^3. При этом, как и в случае, когда «оболочки» строились на основе полных факториальных схем, при переходе от внутренних «оболочек» к внешним шаг дозировок факторов последовательно будет соответствующим образом увеличиваться. В целом этом процесс представлен в таблице:

№ оболочки	Фрагменты и их сочетания	Число точек	Общее число точек	Число доз фактора *(a)*	В полной схеме (a^3)	% выборки
0	Центр	1	1	1	1	100
1	Октаэдр	6	7	3	27	25,9
2	Куб 2^3	8	15	5	125	12,0
3	Кубоктаэдр	12	27	7	343	7,9
4	Октаэдр+куб	14	41	9	729	5,6
5	Октаэдр +кубоктаэдр	18	59	11	1331	4,4
6	Куб+кубоктаэдр	20	79	13	2197	3,6
7	Полная схема 3^3	26	105	15	3375	3,1

Здесь в графах последовательно указано: число точек в каждой «оболочке»; суммарное число точек в данной «оболочке» и всех внутренних по отношению к ней; далее дано число доз каждого фактора (a) на каждой стадии наращивания «оболочек»; следующая графа дает общее число точек (a^3), которое понадобилось бы при осуществлении полной факториальной схемы, и, наконец, последняя графа показывает, какой процент от числа вариантов полной факториальной схемы составляет выборка вариантов, соответствующая той или иной стадии последовательного наращивания «оболочек», составленных из фрагментов схемы 3^3.

Следует заметить, что при данной системе отбора вариантов равномерность распределения наблюденных точек по всей области доз в известной мере нарушается. В центре этой области наблюдения будут плотней, в направлении периферии они будут встречаться все реже и реже. Но это явление будет менее выражено, чем тогда, когда все «оболочки» строятся на основе одной и той же схемы 2^3. Ради сокращения числа вариантов в схеме опыта с широкой амплитудой изучаемых доз с этим обстоятельством приходится мириться.

Полное развертывание системы «оболочек», представленное в рассматриваемой таблице, на практике чаще всего оказывается излишним. Ее всегда можно сократить, остановившись на каком-либо более раннем этапе, например на пятом, где необходимо иметь около 60 вариантов, или на четвертом при примерно 40 ва-

риантах. Рассмотрим в качестве примера эту последнюю схему (четвертого этапа) более детально. Так как в этом случае число доз каждого фактора равно 9, то если считать начальной нулевую дозу, а конечной — восьмую, серединная доза (центральная точка) будет 444. Первая «оболочка» будет иметь дозы: центр±1, то есть здесь эти дозы 3 и 5; структурно эта «оболочка» соответствует октаэдру, то есть при неизменном среднем уровне двух факторов (доза 4) третий фактор будет принимать указанные значения 3 и 5. Вторая «оболочка» строится на основе доз: центр±2, то есть 2 и 6, и структурно имеет форму знакомой восьмерной схемы с начальным вариантом 222. Третья «оболочка» будет иметь дозы факторов: центр±3, причем строиться будет так: один из факторов имеет среднее значение (доза 4), а два других будут представлены всеми четырьмя сочетаниями их доз 1 и 7. Наконец, последняя – четвертая «оболочка» будет иметь дозы центр±4, то есть 0 и 8, взятых в сочетаниях октаэдра и куба 2^3. В целом эта фрагментарная схема будет состоять из следующих вариантов:

Нулевая «оболочка» : 444;
Первая : 344, 544, 434, 454, 443, 445;
Вторая : 222, 226, 262, 622, 662, 626, 266, 666;
Третья : 114, 174, 714, 774, 141, 147, 741, 747, 411, 417, 471, 477;
Четвертая : 044, 844, 404, 484, 440, 448, 000, 008, 080, 800, 880, 808, 088, 888

Во всех «оболочках» средняя доза каждого фактора равна 4, а среднее произведение попарных доз – 16, то есть по этим признакам, лежащим в основе планирования схем таблицы, «оболочки» сравнимы.

Берется ли схема таблицы полностью или она используется в своем незавершенном виде на том или ином этапе ее развертывания, общее число вариантов опыта, если не считать первых этапов, слишком велико для единичного повторения. Следовательно, актуальным становится вопрос и блокировки вариантов внутри повторения. Этот вопрос легко разрешается, если дублировать центральный вариант схемы 111, и присоединить его к октаэдру, в результате чего 27-вариантная схема превратится в 28-вариантную. В этом случае представляется возможным 128 вариантов разбить на семь групп (блоков) по четыре варианта в каждой:

Первый блок:	111, 111, 110, 112	Октаэдр+два центра
Второй блок:	011, 211, 101, 121	
Третий блок:	000, 022, 202, 220	Куб 2^3
Четвертый блок:	002, 020, 200, 222	
Пятый блок:	001, 021, 201, 221	Кубоктаэдр
Шестой блок:	010, 012, 210, 212	
Седьмой блок:	100, 102, 120, 122	

Так как внутри каждого из этих блоков сумма доз любого фактора составляет 4 и сумма попарных произведений доз также 4, то блоки по этим признакам сравнимы. В следующей таблице дана блокировка опыта 9*9*9 при выборке по методу фрагментов, рассмотренного выше.

Оболочка	Первая	Вторая	Третья	Четвертая

Первый блок	344	434	222	626	114	714	044	404
	544	454	662	266	174	774	844	484
Второй блок	443	444	226	622	141	741	440	444
	445	444	262	666	147	747	448	444
Третий блок	–	–	–	–	411	471	000	808
	–	–	–	–	417	477	088	880
Четвертый блок	–	–	–	–	–	–	008	800
	–	–	–	–	–	–	080	888

Здесь в связи с наличием двух октаэдров пришлось ввести три дополнительных центральных варианта.

Таким образом, при 4-«оболочной» схеме фрагментов можно изучить различные сочетания 9 доз (от 0 до 8) каждого из трех факторов, взяв всего 44 варианта (из них центральный вариант 444 повторен четыре раза), расположенных в систему 11 блоков по четыре варианта в каждом. При этой системе блокировки, где 4 и Σzv=4, можно считать, что главные эффекты факторов и их парные взаимодействия остаются несмешанными. Однако это требует своего уточнения, что и будет сделано в дальнейшем.

В параграфе 9 была рассмотрена выборочная из факториального плана 9*9*9=729 схема с 81 вариантом. На странице 92 была показана схема из того же факториального плана с 72 вариантами. Теперь получена новая 44-вариантная схема, относящаяся к тому же исходному плану. Каждая из этих схем имеет свои преимущества и свои недостатки, ориентируясь на которые экспериментатор имеет возможность сделать удовлетворяющий его выбор схемы.

Описанный принцип блокировки, относящийся к 4-оболочной схеме, легко распространить и на большее число «оболочек» таблицы II—19 (и даже выйти за ее границы). Точно так же можно распространить метод фрагментов и на более сложные случаи, например на случай «гиперкуба» 3^4.

Основная учебная литература:

1. Григорьев, Ю.Д. Методы оптимального планирования эксперимента: линейные модели : учебное пособие / Ю.Д. Григорьев. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 320 с. — Режим доступа. — URL: https://e.lanbook.com/book/65949 . — ISBN 978-5-8114-1937-1. — Текст : электронный.

Дополнительная учебная литература:

1. Медведев, П.В. Математическое планирование эксперимента / П.В. Медведев, В.А. Федотов. – Оренбург : Оренбургский государственный университет, 2017. – 98 с. : табл., граф., схем., ил. – Режим доступа. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481785 . – Библиогр.: с. 72-74. – ISBN 978-5-7410-1759-3. – Текст : электронный.
2. Моисеев, Н.Г. Теория планирования и обработки эксперимента / Н.Г. Моисеев, Ю.В. Захаров. – Йошкар-Ола : ПГТУ, 2018. – 124 с. : ил. – Режим доступа. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=494313 . – Библиогр.: с. 121.

– ISBN 978-5-8158-2010-4. – Текст : электронный.
3. Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум / К.В. Щурин, Д.А. Косых. – Оренбург : Оренбургский государственный университет, 2012. – 185 с. : ил. – Режим доступа. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761 . – Библиогр.: с. 177-178. – Текст : электронный.

Контрольные вопросы:

1. Опишите принципы конструирования неполных схем многофакторных опытов на основе вписанных кубов.
2. Изложите особенности «насыщения» экспериментальными точками факториального пространства в выборочных схемах на основе расширяющихся оболочек вписанных кубов.
3. Охарактеризуйте информативность неполных схем опытов на основе вписанных кубов.
4. Опишите принципы блокировки выборочных схем на основе писанных кубов. Укажите особенности контроля состава блоков.
5. Изложите принципы разработки схем полевых опытов из фрагментов факториальной схемы 3*3*3.
6. Охарактеризуйте фрагменты факториальной схемы 3*3*3 «Центр схемы» и «Октаэдр».
7. Охарактеризуйте фрагменты факториальной схемы 3*3*3 «Куб 2^3» и «Куб-октаэдр».
8. Опишите принципы конструирования выборочных схем на основе расширяющихся оболочек – фрагментов факториальной схемы 3*3*3.
9. Изложите принципы блокировок выборочных схем на основе расширяющихся оболочек – фрагментов факториальной схемы 3*3*3. Укажите порядок контроля состава блоков.

Лекция 1.4. Дисперсионный анализ многофакторных опытов с полными факториальными схемами

Вопросы:

1. Дисперсионный анализ данных вегетационного эксперимента
2. Дисперсионный анализ данных полевого опыта по методу рандомизированных повторений
3. Дисперсионный анализ данных полевого опыта по методу расщеплённых делянок
4. Дисперсионный анализ данных полевого опыта по методу расщеплённых блоков (наложения вариантов)

Дисперсионный анализ данных многофакторного вегетационного опыта, поставленного методом полной рандомизации, проводится в два этапа. Первый этап – разложение общей вариации результативного признака на варьирование вариантов и остаточное:

$C_Y=C_V+C_Z$.

На втором этапе сумма квадратов отклонения для вариантов разлагается на компоненты, соответствующие источникам варьирования, – главные эффекты изучаемых факторов и их взаимодействия. В двухфакторном опыте:

$C_v= C_A+C_B+C_{AB}$.

В трехфакторном опыте:

$C_V=C_A+C_B+C_C+C_{AB}+C_{AC}+C_{BC} + C_{ABC}$.

Алгоритм анализа рассмотрим на примере двухфакторного опыта, поставленного методом полной рандомизации.

Урожай зерна ячменя в двухфакторном опыте 2*3 (г на сосуд)

Азот *A*	Фосфор *B*	Урожай, X	Суммы *V*	Средние
a_0	b_0	24,1 25,8 23,0 27,0	99,9	25,0
	b_1	28,4 29,7 30,1 27,4	115,6	28,0
	b_2	28,7 30,4 32,0 27,0	118,1	29,5
a_1	b_0	30,7 34,4 34,0 31,0	130,1	32,5
	b_1	46,7 45,4 47,1 46,3	185,5	46,4
	b_2	59,4 50,7 64,5 60,1	234,7	58,7
		Общая сумма	883,9 = ΣX	36,8 $=x_{ср}$

Дисперсионный анализ двухфакторного опыта по изучению двух градаций фактора *A* (число вариантов L_A=2) и трех градаций фактора *B* (число вариантов L_B=3), проведенного в четырех повторностях (n=4), идёт в четыре этапа.

1 Определяют суммы и средние по вариантам, общую сумму и средний урожай по опыту.

2 Вычисляют общую сумму квадратов отклонений, сумму квадратов для вариантов и остатка:

$N = L_A \cdot L_\beta \cdot n = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$;

$C = (\Sigma X)^2 : N = (883{,}9)^2 : 24 = 32553{,}3$;

$C_Y = \Sigma X^2 - C = (24{,}1^2 + 25{,}8^2 + ... + 60{,}1^2) - 32553{,}3 = 3515{,}5$;

$C_V = \Sigma V^2 : n - C = (99{,}9^2 + 115{,}6^2 + ... + 234{,}7^2) : 4 - 32553{,}3 = 3374{,}5$;

$C_Z = C_Y - C_V = 3515{,}5 - 3374{,}5 = 141{,}0$.

3. Для вычисления сумм квадратов по факторам А, В и взаимодействию АВ составляют вспомогательную таблицу, в которую записывают суммы урожаев по вариантам. Суммируя цифры, находят суммы А, суммы В и вычисляют суммы квадратов отклонений:

Азот *A*	Фосфор *B*			Суммы *A*
	b_0	b_1	b_2	
a_0	99,9	115,6	118,1	333,6
a_1	130,1	185,5	234,7	550,3
Суммы *B*	230,0	301,1	352,8	883,9=Σ*X*

Сумма квадратов для фактора *A* (азот)

$C_A = \Sigma A^2 : L_B n - C = (333{,}6^2 + 550{,}3^2) : 3 \cdot 4 - 32553{,}3 = 1956{,}6$;

при $(L_A - 1) = (2 - 1) = 1$ степени свободы.

Сумма квадратов для фактора В (фосфор)

$C_B = \Sigma B^2 : L_A n - C = (230{,}0^2 + 301{,}1^2 + 352{,}8^2) : 2 \cdot 4 - 32553{,}3 = 950{,}3$

при $(L_B - 1) = (3 - 1) = 2$ степенях свободы.

Сумма квадратов для взаимодействия АВ (NP) находят по разности

$C_{AB} = C_V - C_A - C_B = 3374{,}5 - 1956{,}6 - 950{,}3 = 467{,}6$;

при $(L_A - 1)(L_B - 1) = (2 - 1)(3 - 1) = 2$ степенях свободы.

Суммы квадратов записывают в таблицу дисперсионного анализа и определяют фактические значения критерия *F*:

Дисперсия	Сумма квадратов	Степени свободы	Средний квадрат	$F_Ф$	F_{05}
Общая	3515,5	23	—	—	—
Азота *A*	1956,6	1	1956,60	249,88	4,41
Фосфора *B*	950,3	2	475,15	60,68	3,55
Взаимодействия *AB*	467,6	2	233,80	29,85	3,55
Остаток (ошибки)	141,0	18	7,83	—	—

Значение F_{05} берут из статистической таблицы, исходя из степеней свободы дисперсии главных эффектов и взаимодействия (числитель) и 18 степеней свободы остатка (знаменатель). В нашем примере – действие и взаимодействие изучаемых факторов значимо на 5%-ном уровне ($F_ф > F_{05}$). нулевая гипотеза $Ho{:}d=0$ отвергается.

4 Для оценки существенности частных различий вычисляют

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \sqrt{\frac{7,83}{4}} = 1,40 \text{ г};$$

$$s_d = \sqrt{2s^2 : n} = \sqrt{2 \cdot 7,83 : 4} = 1,98 \text{ г};$$

$$\text{НСР}_{05} = t_{05} s_d = 2,10 \cdot 1,98 = 4,15 \simeq 4,2 \text{ г}.$$

Значение критерия t_{05}>2,10 берут из статистической таблицы для 18 степеней свободы дисперсии остатка (ошибки).

Результаты опыта и статистической обработки данных можно представить в виде таблицы:

Действие азота и фосфора на урожай ячменя (г на сосуд, $НСР_{05}$=4,2)

Дозы азота	Дозы фосфора		
	0	1	2
0	25,0	28,9	29,5
1	32,5	46,4	58,7

Дисперсионный анализ данных многофакторного полевого опыта, проведенного методом рендомизированных повторений.

Статистическую обработку данных проводят в такой последовательности:

1. Исходные даты заносят в таблицу урожаев, определяют суммы и средние, правильность вычислений проверяют по соотношению·$\Sigma P=\Sigma V=\Sigma X$;
2. Вычисляют суммы квадратов для общего варьирования C_Y, варьирования повторений C_P, вариантов C_V и остатка C_Z, т. е. обрабатывают данные так же, как и результаты однофакторного опыта;
   $N = L_A L_B n$
   $C = (\Sigma x)^2 : N$
   $C_Y = \Sigma X^2 - C$
   $C_P = \Sigma P^2 : L - C$
   $C_V = \Sigma V^2 : n - C$
   $C_Z = C_Y - C_P - C_V$
3. Общее варьирование вариантов C_V разлагают на компоненты – главные эффекты изучаемых факторов и их взаимодействия;
   $C_A = \Sigma A^2 : L_B n - C$
   $C_B = \Sigma B^2 : L_A n - C$
   $C_{AB} - C_Y - C_A - C_B$
4. Составляют таблицу дисперсионного анализа и проверяют нулевую гипотезу о существенности действия и взаимодействия факторов по F-критерию.

Многофакторный дисперсионный комплекс — это совокупность исходных наблюдений (дат), позволяющих статистически оценить действие и взаимодействие нескольких изучаемых факторов на изменчивость результативного признака. Эффект взаимодействия составляет ту часть общего варьирования, которая вызвана различным действием одного фактора при разных рра- дациях другого. Специфическое действие сочетаний в ПФЭ выявляется тогда, когда при одной градации первого· фактора второй действует слабо или угнетающе, а при другой

градации он проявляется сильно и стимулирует развитие результативного признака.

В полевом эксперименте часто эффект от совместного применения изучаемых факторов больше (синергизм) или меньше (антагонизм) суммы эффектов от раздельного применения каждого из них. Следовательно, существует взаимодействие факторов: в первом случае положительное, а во втором – отрицательное. Когда факторы не взаимодействуют, прибавка от совместного применения их равна сумме прибавок от раздельного воздействия (аддитивизм).

Пример результатов дисперсионного анализа двухфакторного опыта 3*4 проведенного методом рендомизированных блоков

Дисперсия	Сумма квадратов	Степени свободы	Средний квадрат	$F_Ф$	F_{05}
Общая	5494,8	47	–	–	–
Повторений	215,6	3	–	–	–
Орошения Л	3182,0	2	1591,0	205,8	3,30
Азота *B*	1231,2	3	410,4	53,1	2,90
Взаимодействия *AB*	610,9	6	101,8	13,2	2,4
Остаток (ошибки)	255,1	33	7,73	–	–

4. Для оценки существенности частных различий определяют:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \sqrt{\frac{7,73}{4}} = 1,39 \text{ ц};$$

$$s_d = \sqrt{\frac{2s^2}{n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7,73}{4}} = 1,97 \text{ ц};$$

$$НСР_{05} = t_{05} s_d = 2,0 \cdot 1,97 = 3,94 \text{ ц}.$$

5. Оценка существенности главных эффектов и взаимодействия по $НСР_{05}$ В этом примере частные средние опираются на n=4, а средние для главного эффекта *A* – на nL_B=4*4=16 и средние для главного эффекта *B* — на nL_A= 4*3=12 наблюдений. Вычисляют *Sd* и $НСР_{05}$ для главных эффектов:

для фактора *A:*

$$s_d = \sqrt{\frac{2s^2}{nl_B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7,73}{4 \cdot 4}} = 0,98 \text{ ц};$$

$$НСР_{05} = t_{05} s_d = 2,0 \cdot 0,98 = 1,96 \text{ ц};$$

для фактора *B* и взаимодействия *AB:*

$$s_d = \sqrt{\frac{2s^2}{nl_B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7,73}{4 \cdot 3}} = 1,13 \text{ ц};$$

$$НСР_{05} = t_{05} s_d = 2,0 \cdot 1,13 = 2,26 \text{ ц}.$$

В заключение составляют итоговую таблицу($НСР_{05}$=3,94 для ч.р.):

Орошение *A*	Дозы азота *B*				Средние по фактору *A* ($НСР_{05}$=1,96)
	0	60	120	240	
Без орошения	17,3	19,5	18,5	19,0	18,6
Умеренное	25,0	36,5	38,5	41,3	35,3
Обильное	24,8	34,5	36,8	49,3	36,4
Средние по фактору *B* ($НСР_{05}$=2,26)	22,4	30,2	31,2	36,5	30,1

Дисперсионный анализ данных полевого опыта по методу расщеплённых делянок. Схема расщепленных делянок часто используется для факториальных экспериментов, в которых природа экспериментального материала или операции, связанные с его проведением, затрудняют возможность одинакового воздействия на все сочетания факторов или в тех случаях·, когда исследователь желает увеличить точность оценки одних эффектов, жертвуя точностью оценки других. Основу схемы расщепленных делянок составляет размещение вариантов одного фактора по главным делянкам (делянкам 1-го порядка), расположенным, в свою очередь, по схеме полной рандомизации, рендомизированных блоков или латинского квадрата. Варианты другого фактора размещаются по субделянкам (делянки 2-го порядка) каждой главной делянки. Схема обычно жертвует точностью оценки средних эффектов вариантов главных делянок. Часто она повышает точность сравнения средних эффектов вариантов, расположенных по субделянкам, и при наличии взаимодействия сравнения эффектов вариантов субделянок одной главной делянки. Это связано с тем, что экспериментальная ошибка для главных делянок обычно больше, чем экспериментальная ошибка, используемая для сравнения вариантов субделянок. Обычно величина ошибки для вариантов субделянок меньше, чем ошибка, получаемая в случае размещения всех сочетаний вариантов по схеме рендомизированных блоков.

Пример включает два фактора: азотное удобрение *(N)* в двух градациях (n=2) и зеленое удобрение (G) четырех видов g=4). Общее количество вариантов этого опыта составит $n*g$=8. Все восемь вариантов встречаются однажды в каждом из трех блоков, а внутри одного блока мы находим все варианты принятых уровней азота вместе. При использовании разных источников азота необходимо применять схему рендомизированных блоков с двумя вариантами в трех блоках. Степени свободы для этих шести главных делянок распределяются аналогично схеме рендомизированных блоков.

Ограничение рандомизации при размещении вариантов внутри блока дает в результате две величины ошибок для схемы расщепленных делянок. Ошибка для главных делянок больше, поскольку она включает вариабельность между большими по размеру и удлиненными делянками, а ошибка для субделянок обычно меньше, поскольку она включает вариабельность между близко расположенными субделянками внутри главных делянок.

Схема расщепленных делянок (сплит-плот) может быть использована и для большего, чем два, числа факторов, поскольку нет необходимости в дополнительном расщеплении делянок для каждого нового фактора. Например, в опыте по оценке двух сортов на фоне двух уровней азотного удобрения, вносимого в два срока, на главных делянках можно разместить четыре сочетания как сортов, так и удобрений, причем эти делянки могут быть расщеплены на субделянки для оценки влияния сроков внесения азота. Для трех факторов (*A, B, C*) при двух или большем числеградаций каждого из них имеется шесть различных возможностей для выбора главных делянок: A, B, C, AB, AC, BC.

Всякая модификация схемы расщепленных делянок вносит дополнительные значения величины экспериментальной ошибки, которые следует использо-

вать для оценки тех или иных эффектов вариантов. Поэтому важно расположить факторы таким образом, чтобы получить самую высокую точность оценки взаимодействия и средних эффектов вариантов, представляющих для экспериментатора наибольший интерес.

План дисперсионного анализа двухфакторного опыта по схеме расщепленных делянок, и схеме рандомизированных блоков:

Источники вариации	Степени свободы	Схема	
		расщепленных делянок	рендомизированных блоков
Субделянки (*SP*)	$ngb-1$	23	23
Главные делянки (*MP*)	$nb-1$	5	—
Блоки (*B*)	$b-1$	2	2
Азотное удобрение (N)	$n-1$	1 ←	1 ←
Ошибка (*MP*)	$(b-1)\ (n-1)$	2	—
Зеленые удобрения (*G*)	$(g-1)$	3 ←	3 ←
Взаимодействия (N×*G*)	$(n-1)\ (g-1)$	3 ←	3 ←
Ошибка (*SP*)	$(b-1)\ [(g-1)+(n-1)\ (g-1)]$	12	—
Ошибка (*RCB*) *	$(b-1)\ [(n-1)+(g-1)+(n-1)\times\times(g-1)]$		14

*Рандомизированные блоки

Стандартные ошибки и *НСР.* Для оценки результатов эксперимента необходимо определять *НСР*. Стандартные ошибки для этих оценок вычисляют на основе вариабельности между экспериментальными единицами, по которым размещают варианты. В опытах, заложенных по схеме расщепленных делянок, расчеты стандартной ошибки для необходимых сравнений вариантов усложняются в связи с тем, что мы имеем два источника экспериментальной ошибки: одна из них относится к основной делянке, а другая – к субделянкам.

Необходимо подчеркнуть, что стандартная ошибка для сравнения средних по вариантам субделянок внутри главных делянок включает только ошибку субделянок, однако если сравнение средних субделянок производится для различных главных делянок, то стандартная ошибка включает как ошибку субделянок, так и ошибку главных делянок.

Не затрагивая глубоко алгебраической стороны вопроса, находим, что стандартная ошибка для субделянок является средней взвешенной величин *Ea* и *Eb;* величина средней взвешенной для *Ea* и *Eb* составляют 1 и *b*–1 соответственно. Поскольку 1+*b*–1=*b*, знаменателем будет *br,* где *b* — число вариантов субделянок и *r* — повторность.

НСР для оценки различий между вариантами главных делянок (в примере между средними уровней азотного удобрения):

$$НСР_{05} = t_a \sqrt{\frac{2\,(Ea)}{rb}},$$

где t_a — табличная величина *t* для числа степеней свободы *Ea.*

Формулы расчета стандартных ошибок для опыта, заложенного по схеме расщепленных делянок

Пары сравниваемых средних	Стандартная ошибка средних *, $s_{\bar{y}}$
Варианты главных делянок: $A_1 - A_2$	$\sqrt{\frac{Ea}{rb}}$
Варианты субделянок: $B_1 - B_2$	$\sqrt{\frac{Eb}{ra}}$
Варианты субделянок внутри одной главной делянки: $B_1A_1 - B_2A_1$	$\sqrt{\frac{Eb}{r}}$
Варианты субделянок для разных главных делянок: $B_1A_1 - B_1A_2$ или $B_1A_1 - B_2A_2$	$\sqrt{\frac{(b-1)Eb+Ea}{rb}}$

НСР для оценки различий между вариантами субделянок (между средними зеленых удобрений):

$$НСР_{05} = t_b \sqrt{\frac{2(Eb)}{ra}},$$

НСР для оценки различий между вариантами субделянок внутри одной главной делянки (между средними зеленых удобрений на одном уровне азотного удобрения):

$$НСР_{05} = t_b \sqrt{\frac{2(Eb)}{r}}$$

НСР для оценки различий между вариантами субделянок разных главных делянок (сравнение разных средних зеленых удобрений при различных уровнях азотного удобрения или сравнение средних одного вида зеленого удобрения при разных уровнях азотного удобрения):

$$НСР_{05} = t_{ab} \sqrt{\frac{2[(b-1)Eb+Ea]}{rb}},$$

где t_{ab} — взвешенная величина t, занимающая промежуточное положение между значениями t_a и t_b, вычисляется по формуле:

$$t_{ab} = \frac{(b-1)(Eb)(t_b)+Ea(t_a)}{(b-1)Eb+Ea}$$

Схема расщепленных делянок отвечает требованиям факториальной группы вариантов. Схема включает случайное размещение вариантов одного фактора или сочетания факторов на главных делянках, которые затем расщепляются на субделянки для случайного размещения вариантов другого фактора или сочетания факторов. В сравнении со схемой рендомизированных блоков точность сравнения вариантов главных делянок и вариантов субделянок разных главных делянок снижается, однако повышается точность сравнения вариантов субделянок и вариантов субделянок, расположенных внутри одной главной делянки.

Дисперсионный анализ данных полевого опыта по методу расщеплённых блоков.

В этой модификации схемы расщепленных делянок варианты второго фактора накладывают полосами поперек целого повторения вариантов главных делянок. Если главные делянки расположены по схеме латинского квадрата, то варианты второго фактора накладывают полосами поперек целого ряда или столбца главной делянки. Такое расположение часто облегчает проведение технологических операций (полевых работ) на делянках-полосах, но снижает точность сравнения главных эффектов фактора *B*. Эта схема часто улучшает сравнение *AB*-взаимодействий, особенно сравнений *B*-средних для заданного уровня фактора *A*. Эта схема наиболее эффективна для проведения предварительных исследований в целях выявления первоначального эффекта вариантов. Прежде чем применять ее в своих исследованиях, следует получить консультацию у специалиста, знакомого с ней.

В схеме расщепленных блоков делянки второго фактора расположены поперек главных делянок целого блока, и, таким образом, каждая делянка второго порядка расщепляет блок. Другим термином, применимым к этой схеме, может быть схема — «полоса — делянки», поскольку, оба фактора *A и B* накладывают полосами. Для вариантов обоих факторов проводят независимую рендомизацию в каждом повторении.

Степени свободы для источников вариации схемы расщепленных делянок и расщепленных блоков

Источники вариации *	Степени свободы				
	формула	расщепленные			
		делянки		блоки	
Субделянки	$rab-1$	79		79	
Главные делянки	$ra-1$	19		19	
Блоки	$r-1$	3		3	
Фактор *A*	$a-1$	4		4	
MP-ошибка	$(r-1)(a-1)$	12	ошибка *a*	12	ошибка *a*
Фактор *B*	$b-1$	3		3	
$A \times B$	$(a-1)(b-1)$	12		12	
Ошибка полос-делянок	$(r-1)(b-1)$			9	ошибка *b*
Ошибка субделянок	$(r-1)(a-1)(b-1)$	45	ошибка *b***	36	ошибка *c*

* r=4 повторения, a=5 градаций фактора *A*, градации фактора *B*. Скобки и стрелки указывают необходимые ошибки (соответствующие степени свободы) для расчета *F*-критериев.

** В данном случае объединяет *df* для ошибок *b* и *c* схемы расщепленных блоков.

В таблице показано расщепление общего числа степеней свободы для обеих схем с учетом четырех повторений для каждой из них. Отмечается требование схемы расщепленных блоков о разделении ошибки *b* схемы расщепленных делянок на две ошибки, что уменьшает число степеней свободы для оценки главных эффектов вариантов фактора *B*. Однако наложение второго фактора полосами через главные делянки устраняет часть вариации из ошибки *b* схемы расщепленных делянок, поскольку из нее выделяется еще ошибка *c* для схемы расщепленных блоков, которая вследствие своей меньшей величины часто обеспечивает более точную *F*-оценку эффектов взаимодействий.

Стандартные ошибки даны в таблице с целью их использования при оценке частных различий с помощью *НСР*:

Стандартные ошибки средних для схемы расщепленных блоков *

Сравниваемые средние	Стандартные ошибки	*t*-значения
A-средние	$\sqrt{\frac{Ea}{rb}}$	t_a
B-средние	$\sqrt{\frac{Eb}{ra}}$	t_b
A-средние для одного или разных уровней *B*	$\sqrt{\frac{(b-1)\,Ec+Ea}{rb}}$	$t_{ac}=\frac{(b-1)\,Ec\,(t_c)+Ea\,(t_a)}{(b-)\,Ec+Ea}$
B-средние для одного уровня *A*	$\sqrt{\frac{(a-1)\,Ec+Eb}{ra}}$	$t_{bc}=\frac{(a-1)\,Ec\,(t_c)+Eb\,(t_b)}{(a-1)\,Ec+Eb}$

* *A* — варианты фактора, изучаемого на главных делянках, *B* – варианты фактора, изучаемого на субделянках; *a, b* и *r* – число вариантов (градаций) главных делянок, субделянок и повторность соответственно. E_a, E_b, E_c – средние квадраты ошибок; t_c–табличные величины *df, Ea, Eb, Ec* соответственно.

НСР (5%) при сравнении *N*-средних азота для одного или разных сроков уборки *(H)*:

$$НСР_{05}=t_{ac}\sqrt{\frac{2\,[(b-1)\,Ec+Ea]}{rb}};$$

$$t_{ac}=\frac{(b-1)\,Ec\,(t_c)+Ea\,(t_a)}{(b-1)\,Ec+Ea}$$

НСР (5%) при сравнении *H*-средних сроков уборки с одним уровнем азота (*N*):

$$НСР_{05}=t_{bc}\sqrt{\frac{2\,[(a-1)\,Ec+Eb]}{ra}};$$

$$t_{bc}=\frac{(a-1)\,Ec\,(t_c)+Eb\,(t_b)}{(a-1)\,Ec+Eb}$$

В схеме расщепленных блоков блоки делянок фактора *A* расщепляются таким образом, что каждый вариант фактора *B* размещается па непрерывных полосах, проходящих через весь блок. Для каждого блока делянок фактора *A* проводится независимая рандомизация вариантов фактора *B*. Преимущества этой схемы заключаются в уменьшении затрат труда на технологические операции, связанные с проведением эксперимента, а также в большей точности оценки *A*B*-взаимодействия. К недостаткам этой схемы эксперимента относят: пониженную точность определения, эффектов фактора *B,* большую комплексность расчетов и затруднения в оценке частных различий.

Основная учебная литература:

1. Полоус, Г.П. Основные элементы методики полевого опыта : учебное пособие / Г.П. Полоус. — Ставрополь : СтГАУ, 2009. — 96 с. — Режим досту-

па. — URL: https://e.lanbook.com/book/5734 . — ISBN 978-5-9596-0615-2. — Текст : электронный.

Дополнительная учебная литература:

1. Афанасьев, В.Н. Статистическая методология в научных исследованиях / В.Н. Афанасьев, Н.С. Еремеева, Т.В. Лебедева. – Оренбург : ОГУ, 2017. – 246 с. : ил. – Режим доступа. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=485266 . – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-7410-1703-6. – Текст : электронный.
2. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели [Текст] : учеб. пособие для студентов вузов / В. Д. Мятлев [и др.]. - М. : Academia, 2009. - 314, 1 с. : ил., граф. - ISBN 978-5-7695-4704-1.

Контрольные вопросы:

1. Приведите модель дисперсионного анализа трёхфакторного опыта, проведённого методом полной рандомизации. Охарактеризуйте её составные части.
2. Изложите порядок вычисления сумм квадратов и числа степеней свободы трёхфакторного опыта, проведённого методом полной рандомизации.
3. Изложите алгоритм дисперсионного анализа трёхфакторного опыта, проведённого методом полной рандомизации.
4. Приведите и охарактеризуйте модель дисперсионного анализа данных трёхфакторного опыта полевого опыта, проведённого по методу рандомизированных повторений.
5. Изложите порядок вычисления сумм квадратов и числа степеней свободы трёхфакторного опыта, проведённого методом рандомизированных повторений.
6. Приведите модель дисперсионного анализа трёхфакторного опыта, проведённого методом расщеплённых делянок.
7. Изложите особенности вычисления сумм квадратов и числа степеней свободы трёхфакторного опыта, проведённого методом расщеплённых делянок.
8. Опишите особенности дисперсионного анализа, проведённого методом расщеплённых делянок.
9. Приведите модель дисперсионного анализа трёхфакторного опыта, проведённого методом расщеплённых блоков.
10. Изложите особенности вычисления сумм квадратов и числа степеней свободы трёхфакторного опыта, проведённого методом расщеплённых блоков.
11. Опишите особенности дисперсионного анализа, проведённого методом расщеплённых блоков.