**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ**

**Таврический национальный университет
им. В.И. Вернадского**

Т.Я. АЗИЗОВ, Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

АБСТРАКТНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Специальный курс лекций
для студентов-магистрантов специальности ”Математика”**

Симферополь
2011

ББК 22.311
А35
УДК 517.[958+983+984]

Рекомендовано к печати научно-методической комиссией факультета математики и информатики ТНУ им. В.И. Вернадского (протокол № 5 от 10.06.2011 г.)

Рецензенты :

Белан Е.П. – д. ф.-м. н., профессор кафедры дифференциальных уравнений и геометрии Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
Закора Д.А. – к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

А35 Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. ***Абстрактная формула Грина и ее приложения*****:** Специальный курс лекций. – Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.А.", 2011. – 136 с. – На русском языке.

Учебное пособие посвящено изучению нового направления исследований краевых и спектральных задач, возникающих в приложениях. Оно основано на использовании так называемой формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа.

С использованием простых методов функционального анализа и теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, доказывается существование абстрактной формулы Грина, являющейся обобщением первой формулы Грина для оператора Лапласа. Рассматриваются примеры таких формул Грина в области с липшицевой границей.

На этой основе в общей постановке изучаются вопросы разрешимости абстрактных краевых задач, а также спектральных задач, как классических, так и некоторых несамосопряженных.

Изложение теоретических положений сопровождается примерами и упражнениями, рассмотрение которых позволяет полнее усвоить излагаемый учебный материал.

Для студентов, аспирантов и специалистов, специализирующихся в области математики и прикладной математики.

Оглавление

Предисловие

Данное учебное пособие предназначено для студентов–магистрантов специальности "классическая математика" , однако оно будет полезно также студентам специальности "прикладная математика" , аспирантам и преподавателям, интересующимся приложениями функционального анализа к задачам, возникающим в теории уравнений в частных производных.

Пособие основано на использовании так называемой абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств. Конкретные формулы Грина подобного вида играют важную роль в задачах математической физики, механики сплошных сред, теории упругости и в других естественных науках. На основе этих формул исследуются общие классы эллиптических краевых задач, а также спектральных проблем, в частности, задач, содержащих спектральный параметр в уравнениях и краевых условиях.

Содержание пособия разбито на три главы. В первой главе при определенных условиях, которые, как правило, выполнены в приложениях, выводится абстрактная формула Грина. В качестве иллюстрации рассматривается основной пример, связанный с первой формулой Грина для оператора Лапласа. Затем приводятся также примеры формул Грина для равномерно эллиптического уравнения, для системы эллиптических уравнений, а также соответствующие формулы Грина линейной теории упругости и гидродинамика.

Во второй главе на основе абстрактной формулы Грина изучаются абстрактные краевые задачи и, как следствие общих рассмотрений, – классические краевые задачи для скалярных функций и векторных полей (теория упругости и гидродинамики).

В третьей главе рассматриваются спектральные проблемы, как абстрактные, так и конкретные, возникающие опять-таки в классических задачах математической физики, а также в самосопряженных и несамосопряженных задачах, имеющих актуальные приложения.

Отметим еще, что изложение теоретических положений сопровождается примерами и упражнениями, рассмотрение которых позволяет полнее усвоить излагаемый учебный материал.

Глава 1

Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств

1.1 Введение

1.1.1 Классические формулы Грина для оператора Лапласа

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – произвольная область с достаточно гладкой границей $\Gamma := \partial\Omega$. Пусть $u = u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, т.е. она дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, а $v = v(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Напомним, что в пространстве $\mathbb{R}^m$ оператор Лапласа Δ действует по закону

$$\Delta u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},$$

а градиент функции $u = u(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, вычисляется по формуле

$$\nabla u := \operatorname{grad} u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, \vec{e}_k,$$

где $\vec{e}_k$ – орты осей Ox_k, $k = 1, \ldots, m$. Отметим еще, что производная

$(\partial u/\partial n)|_\Gamma$ по внешней нормали $\vec{n}$ к Γ находится по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = \nabla u \cdot \vec{n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, n_k, \quad \vec{n} = \sum_{k=1}^{m} n_k\, \vec{e}_k,$$

где n_k – направляющие косинусы внешней нормали $\vec{n}$.

С учетом этих обозначений первая формула Грина для оператора Лапласа Δ записывается в следующем виде:

$$-\int_\Omega (\Delta u) v\, d\Omega = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\Gamma,\ u \in C^2(\overline{\Omega}),\ v \in C^1(\overline{\Omega}). \qquad (1.1.1)$$

Ее легко вывести из известной формулы Гаусса–Остроградского

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{A}\, d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{n}\, d\Gamma,$$

если положить $\vec{A} = v\nabla u$ и воспользоваться свойством

$$\operatorname{div} \vec{A} = v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u.$$

Меняя местами в (1.1.1) функции $u(x)$ и $v(x)$, а затем вычитая соответствующие левые и правые части этих формул, получим вторую формулу Грина для оператора Лапласа:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, d\Omega = \int_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma. \qquad (1.1.2)$$

1.1.2 Первая формула Грина в терминах скалярных произведений

Формулу (1.1.1) можно переписать в ином виде, используя скалярные произведения в гильбертовых пространствах, наиболее часто встречающихся при исследовании классических задач математической физики.

Введем гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ вещественнозначных скалярных функций $u(x)$, $x \in \Omega$, со скалярным произведением

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} := \int_\Omega u(x)\, v(x)\, d\Omega, \quad u, v \in L_2(\Omega), \qquad (1.1.3)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Введем также гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{L_2(\Gamma)} := \int\limits_{\Gamma} \varphi\, \psi \, d\Gamma, \quad \varphi, \psi \in L_2(\Gamma). \tag{1.1.4}$$

Введем, наконец, пространство Соболева $H^1(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, d\Omega, \quad u, v \in H^1(\Omega), \tag{1.1.5}$$

и соответствующей нормой.

Тогда в терминах введенных скалярных произведений формулу Грина (1.1.1) можно переписать в виде (проверьте!)

$$\Big(v, u - \Delta u\Big)_{L_2(\Omega)} = (v, u)_{H^1(\Omega)} - \Big(\gamma v, \frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{L_2(\Gamma)}, \tag{1.1.6}$$

$$u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad v \in C^1(\overline{\Omega}); \quad \gamma v := v|_{\Gamma}, \quad \forall v \in H^1(\Omega); \tag{1.1.7}$$

здесь γ – так называемый оператор следа, сопоставляющий каждой функции $v \in H^1(\Omega) \supset C^1(\overline{\Omega})$ ее след $v|_{\Gamma}$ на границе $\Gamma = \partial\Omega$.

1.1.3 Обобщения

В данном пособии будет получено обобщение формулы Грина (1.1.6) по нескольким направлениям.

Во-первых, граница $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω может быть не обязательно гладкой, а так называемой липшицевой, т.е. удовлетворяющей условию Липшица (см. п. 2.3). В частности, она может быть кусочно гладкой с ненулевыми внутренними и внешними двугранными углами между ее гладкими частями.

Во-вторых, вместо скалярных произведений в (1.1.6) будут стоять соответствующие функционалы, являющиеся расширениями этих скалярных произведений по непрерывности на случай, когда основное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ имеет оснащение. Тогда второй "сомножитель" в функционале можно брать из так называемого пространства с негативной нормой (см. п. 2.1.3). Например, для оснащения

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))^*$$

слагаемое слева в (1.1.6) можно будет записать в виде $\langle v, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)}$, т.е. в виде применения линейного ограниченного функционала $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$ к элементу $v \in H^1(\Omega)$.

В-третьих, элементы $u(x)$ и $v(x)$ в (1.1.6) можно брать не из $C^2(\overline{\Omega})$ и $C^1(\overline{\Omega})$ соответственно, а считать, что $u(x)$ и $v(x)$ принадлежат более широкому множеству — пространству $H^1(\Omega)$.

Наконец, в-четвертых, вместо конкретных гильбертовых пространств $L_2(\Omega), H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, а также оператора следа (1.1.7), фигурирующих в (1.1.6), можно получить абстрактную формулу Грина для тройки произвольных гильбертовых пространств E, F и G, а также абстрактного оператора следа γ, подчиненных определенным связям (см. п. 2.2). Доказывается, что эта формула имеет вид

$$\langle v, Lu \rangle_E = (v, u)_F - \langle \gamma v, \partial u \rangle_G, \tag{1.1.8}$$

где Lu — абстрактное дифференциальное выражение, заменяющее выражение $u - \Delta u$ в (1.1.6), а ∂u — абстрактный оператор производной по внешней нормали, заменяющий $(\partial u/\partial n)_\Gamma$ в (1.1.6).

1.1.4 Классические формулы Грина линейной теории упругости и гидродинамики вязкой жидкости

В данном пособии будут встречаться формулы Грина не только для скалярных функций, но также и для векторных полей. Такие формулы находят широкое применение, например, при изучении задач теории упругости и проблем гидродинамики как сжимаемой, так и несжимаемой жидкости.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – произвольная область с достаточно гладкой границей, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \overline{\Omega}$.

Покажем, что в этом случае имеет место следующая формула, которую также называют формулой Грина (она обобщает формулу интегрирования по частям, отвечающую одномерному случаю):

$$-\int\limits_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, \psi \, d\Omega = \int\limits_\Omega \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, d\Omega - \int\limits_\Gamma \varphi\psi \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i})\, d\Gamma, \tag{1.1.9}$$

где $\vec{n} = \sum\limits_{k=1}^{m} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k})\vec{e}_k$– внешняя нормаль к Ω.

В самом деле, по формуле Гаусса–Остроградского имеем

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{u}\psi)\,d\Omega = \int\limits_{\Gamma} (\vec{u}\psi)\cdot\vec{n}\,d\Gamma = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\vec{u})\psi\,d\Omega + \int\limits_{\Omega} \vec{u}\cdot\nabla\psi\,d\Omega \qquad (1.1.10)$$

для любого непрерывно дифференцируемого поля $\vec{u}$. Полагая здесь $\vec{u} = \varphi\vec{e}_i$, приходим к (1.1.9).

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Далее понадобится формула Грина вида (1.1.1), в которой, во-первых, использованы векторные поля, а во-вторых, слева вместо выражения $-\Delta u$ теперь стоит векторное дифференциальное выражение

$$L\vec{u} := -[\mu\,\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\,\nabla\operatorname{div}\vec{u}], \qquad (1.1.11)$$

где λ и μ – физические положительные константы. В теории упругости функция $\vec{u}(x), x \in \Omega$, описывает поле смещений упругой среды относительно состояния ее равновесия, а $L\vec{u}$ – основное дифференциальное выражение в этой теории.

Таким образом, необходимо далее аналогично (1.1.1) преобразовать выражение

$$\int\limits_{\Omega} (L\vec{u})\cdot\vec{v}\,d\Omega = -\mu\int\limits_{\Omega} \Delta\vec{u}\cdot\vec{v}\,d\Omega - (\lambda+\mu)\int\limits_{\Omega} (\nabla\operatorname{div}\vec{u})\cdot\vec{v}\,d\Omega \qquad (1.1.12)$$

и получить сумму билинейной формы относительно полей $\vec{u}$ и $\vec{v}$, а также некоторое выражение в виде поверхностного интеграла.

Преобразуем сначала второе слагаемое в правой части (1.1.12), имеем

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\Omega} (\nabla\operatorname{div}\vec{u})\cdot\vec{v}\,d\Omega &= -\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}((\operatorname{div}\vec{u})\vec{v})\,d\Omega + \int\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\vec{u})(\operatorname{div}\vec{v})\,d\Omega = \\ &= \int\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\vec{u})(\operatorname{div}\vec{v})\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma} (\operatorname{div}\vec{u})\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\Gamma. \end{aligned} \qquad (1.1.13)$$

Преобразуем теперь выражение $-\int\limits_{\Omega}(\Delta\vec{u})\cdot\vec{v}\,d\Omega$, воспользовавшись предварительно тождеством

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) = \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\,, \end{aligned} \qquad (1.1.14)$$

справедливым для дважды непрерывно дифференцируемой функции $u_i(x)$. Отсюда получаем, с использованием (1.1.9), что

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_{\Omega} \Delta \vec{u} \cdot \vec{v} \, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \Big[\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)\Big] v_i \, d\Omega + \\
+ \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\operatorname{div} \vec{u})\Big) v_i \, d\Omega = \Big\{ \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, d\Omega - \\
- \int\limits_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) v_i \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_j}) \, d\Gamma \Big\} + \\
+ \Big\{ -\int\limits_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{u})(\operatorname{div} \vec{v}) \, d\Omega + \int\limits_{\Gamma} (\operatorname{div} \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{n}) \, d\Gamma \Big\}.
\end{gathered}
\tag{1.1.15}
$$

С помощью тождеств (1.1.13) и (1.1.15) вычисляем правую часть (1.1.12), имеем

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_{\Omega} \Big(\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u}\Big) \cdot \vec{v} \, d\Omega = \\
= \mu \Big\{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big) \, d\Omega - \\
- \int\limits_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) v_i \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_j}) \, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{u})(\operatorname{div} \vec{v}) \, d\Omega + \\
+ \int\limits_{\Gamma} (\operatorname{div} \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{n}) \, d\Gamma \Big\} + \\
+ (\lambda + \mu) \Big\{ \int\limits_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{u})(\operatorname{div} \vec{v}) \, d\Omega - \int\limits_{\Gamma} (\operatorname{div} \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{n}) \, d\Gamma \Big\}.
\end{gathered}
\tag{1.1.16}
$$

Введем обозначения:

$$
\tau_{ij}(\vec{u}) := \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad E(\vec{u}, \vec{v}) := \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \tau_{ij}(\vec{u}) \tau_{ij}(\vec{v}) \, d\Omega. \tag{1.1.17}
$$

В теории упругости $\tau_{ij}(\vec{u})$ – удвоенные элементы тензора деформаций, отвечающего полю перемещений $\vec{u}(x)$; в гидродинамике $E(\vec{u}, \vec{u})$

пропорционально скорости диссипации в объеме Ω энергии несжимаемой жидкости для поля скорости $\vec{u}(x)$.

С учетом обозначений (1.1.17) тождество (1.1.16) принимает следующий окончательный вид

$$-\int\limits_{\Omega}\Big[\mu\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\vec{u}\Big]\cdot\vec{v}\,d\Omega=\mu\,E(\vec{u},\vec{v})+\lambda\int\limits_{\Omega}(\mathrm{div}\,\vec{u})(\mathrm{div}\,\vec{v})\,d\Omega-$$

$$-\int\limits_{\Gamma}\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\mu\tau_{ij}(\vec{u})+\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,\delta_{ij}\Big)v_i\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_j})\,d\Gamma. \tag{1.1.18}$$

(Здесь использована формула $\vec{v}\cdot\vec{n}=\sum\limits_{i,j=1}^{3}v_i\,\delta_{ij}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_j})$.)

Тождество (1.1.18) имеет место в произвольной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ для дважды непрерывно дифференцируемого поля $\vec{u}(x)$ и непрерывно дифференцируемого поля $\vec{v}(x)$, $x\in\overline{\Omega}$. Это тождество называют *формулой Грина линейной теории упругости*.

Пусть теперь $\vec{u}=\vec{u}(x)$ – поле скоростей в вязкой жидкости. Тогда, как это устанавливается в учебниках по гидродинамике (см., например, [1], глава 2, параграф 15), основное дифференциальное выражение, в отличие от (1.1.11), принимает вид

$$L\vec{u}:=-[\mu\,\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)\,\nabla\mathrm{div}\,\vec{u}]+\nabla p, \tag{1.1.19}$$

где $p=p\,(x)$ – скалярное поле давлений в жидкости, а λ и μ – первый и второй коэффициенты вязкости жидкости.

Используем далее формулу

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\nabla p\cdot\vec{v}\,d\Omega&=\int\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,(p\vec{v})\,d\Omega-\int\limits_{\Omega}p\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\Omega=\\&=\int\limits_{\Gamma}p\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\Gamma-\int\limits_{\Omega}p\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\Omega.\end{aligned} \tag{1.1.20}$$

Складывая левые и правые части формул (1.1.18) и (1.1.20), приходим к *формуле Грина линейной гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости*:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \Big[-\Big(\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\,\vec{u}\Big) + \nabla p\Big] \cdot \vec{v}\, d\Omega = \mu\, E(\vec{u},\vec{v}) + \\
&+ \int\limits_{\Omega} (\lambda \mathrm{div}\,\vec{u} - p)\mathrm{div}\,\vec{v}\, d\Omega - \\
&- \int\limits_{\Gamma} \Big[\sum_{i,j=1}^{3} \Big(\mu\tau_{ij}(\vec{u}) + (\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u} - p)\delta_{ij}\Big) v_i \cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_j})\Big]\, d\Gamma.
\end{aligned}
\tag{1.1.21}
$$

Здесь

$$
\mu\tau_{ij}(\vec{u}) + (\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u} - p)\delta_{ij} =: \sigma_{ij}, \quad i,j = 1,\,2,\,3, \tag{1.1.22}
$$

— это элементы тензора напряжений в вязкой жидкости.

Если жидкость – несжимаемая, то, как известно (и этот факт следует из уравнения неразрывности), поле скоростей $\vec{u}$ *соленоидально*, т.е. $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$. Для такого поля формула (1.1.21) упрощается и принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} (-\mu\Delta\vec{u} + \nabla p) \cdot \vec{v}\, d\Omega = \\
&= \mu\, E(\vec{u},\vec{v}) - \int\limits_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\mu\tau_{ij}(\vec{u}) - p\,\delta_{ij}\Big) v_i \cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_j})\, d\Gamma.
\end{aligned}
\tag{1.1.23}
$$

Далее ее будем использовать для соленоидальных полей, когда

$$
\mathrm{div}\,\vec{u} = \mathrm{div}\,\vec{v} = 0. \tag{1.1.24}
$$

Формулу (1.1.23) называют *формулой Грина линейной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости.*

Классические формулы Грина (1.1.17), (1.1.21) и (1.1.23), как выяснится далее, допускают расширение на случай негладкой (липшицевой) границы области Ω, причем векторные поля $\vec{u}$ и $\vec{v}$ могут иметь компоненты (проекции на оси координат) из пространства $H^1(\Omega)$.

1.2 Общая схема рассмотрения краевых задач

1.2.1 Гильбертовы пары пространств

Пусть F и E – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_F$ и $(\cdot,\cdot)_E$ соответственно, причем $F \subset E$. Будем говорить, что гильбертово пространство F *плотно вложено* в гильбертово пространство E и обозначать $F \hookrightarrow E$, если F является плотным линейным подмножеством в E и существует такая константа $a > 0$, что

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1.2.1}$$

Говорят, что пространства F и E с указанными свойствами образуют *гильбертову пару* $(F; E)$.

Классическим примером гильбертовой пары пространств является пара $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – произвольная ограниченная область, а скалярные произведения определены (в комплексных пространствах) формулами

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} := \int\limits_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,d\Omega, \quad (u,v)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega [\nabla u\cdot\overline{\nabla v}+u\overline{v}\,]\,d\Omega. \tag{1.2.2}$$

Здесь очевидно, $H^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, так как $H^1(\Omega)$ содержит плотное в $L_2(\Omega)$ множество бесконечно дифференцируемых финитных функций. При этом для норм, порожденных скалярными произведениями (1.2.2), имеет место оценка (1.2.1) с константой $a = 1$.

Введем теперь важное понятие оператора гильбертовой пары. Пусть $u \in F$, $v \in E$. Тогда выражение $(u,v)_E$ является линейным ограниченным функционалом в пространстве F. В самом деле,

$$|(u,v)_E| \leqslant \|u\|_E \cdot \|v\|_E \leqslant (a\|v\|_E)\|u\|_F. \tag{1.2.3}$$

Поэтому по теореме Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве заключаем, что найдется единственный элемент $v_* \in F$ такой, что

$$(u,v)_E = (u,v_*)_F, \quad u \in F, \quad v \in E. \tag{1.2.4}$$

Возникает отображение $Vv := v_*$, где $V : E \to F$ – линейный ограниченный оператор. Свойства линейности для V очевидны, а ограниченность следует из соотношения

$$(u,v)_E = (u,Vv)_F, \quad u \in F, \quad v \in E, \tag{1.2.5}$$

при $u = Vv$. В самом деле, имеем с учетом (1.2.1)

$$\|Vv\|_F^2 = (Vv, Vv)_F = (Vv, v)_E \leqslant \|Vv\|_E \cdot \|v\|_E \leqslant a\|Vv\|_F\|v\|_E, \quad (1.2.6)$$

откуда при $Vv \neq 0$ получаем, что

$$\|Vv\|_F \leqslant a\|v\|_E. \quad (1.2.7)$$

Окончательно приходим к неравенствам

$$a^{-1}\|Vv\|_E \leqslant \|Vv\|_F \leqslant a\|v\|_E. \quad (1.2.8)$$

Убедимся теперь, что оператор $V : E \to E$ самосопряжен и положителен. Действительно, при $u = V\eta$, $\eta \in E$, из (1.2.5) имеем

$$\begin{aligned}(V\eta, v)_E &= \\ &= (V\eta, Vv)_F = \overline{(Vv, V\eta)_F} = \overline{(Vv, \eta)_E} = (\eta, Vv)_E, \quad \forall \eta, v \in E,\end{aligned} \quad (1.2.9)$$

т.е. $V = V^*$. Далее, из (1.2.6) получаем также, что оператор $V : E \to E$ неотрицателен. Если же $Vv = 0$, то из (1.2.5) получаем, что $(u, v)_E = 0$ при всех $u \in F$. Так как F плотно в E, то приходим к выводу, что $v = 0$. Значит, $(Vv, v)_E > 0$ при всех $v \neq 0$, т.е. оператор V является положительным.

Если F компактно вложено в E (обозначение: $F \hookrightarrow\hookrightarrow E$), т.е. каждое ограниченное множество из F является компактным в E, то оператор V компактен (вполне непрерывен). Действительно, если множество $\{v\} \subset E$ ограничено в E, то в силу правого неравенства (1.2.8) множество $\{Vv\} \subset F$ ограничено в F, а потому оно компактно в E.

Так как оператор V положителен, то он имеет обратный оператор $A := V^{-1}$. Очевидно, по определению

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(V) \subset F, \quad \mathcal{R}(A) = \mathcal{D}\left(A^{-1}\right) = \mathcal{D}(V) = E. \quad (1.2.10)$$

Отсюда (а также из спектрального разложения для $V = V^*$) следует, что A – неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор.

Из (1.2.5) приходим к тождеству (оно получается заменой v на Av)

$$(u, Av)_E = (u, v)_F, \quad u \in F, \quad v \in \mathcal{D}(A) \subset F. \quad (1.2.11)$$

Если здесь $u \in \mathcal{D}(A)$, то это тождество принимает вид

$$(A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E = (u, v)_F, \quad u, v \in \mathcal{D}(A). \quad (1.2.12)$$

Отсюда, в частности, получаем

$$\|A^{1/2}u\|_E = \|u\|_F, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A). \tag{1.2.13}$$

Напомним (см., например, [2], [3], а также [4]), что область определения квадратного корня $A^{1/2}$ оператора $A \gg 0$ получается замыканием области определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A по норме $\|A^{1/2}u\|_E$. Поэтому из (1.2.13) следует, что область определения $\mathcal{D}\left(A^{1/2}\right)$ совпадает с замыканием $\mathcal{D}(A)$ по норме пространства F, т.е. является подпространством в F. Оказывается, что на самом деле $\mathcal{D}\left(A^{1/2}\right) = F$.

Действительно, в противном случае, нашелся бы такой ненулевой элемент $u_0 \in F$, что $(u_0, v)_F = 0$ при всех $v \in \mathcal{D}(A)$ и, значит, при всех $v \in \mathcal{D}\left(A^{1/2}\right)$. Тогда в силу (1.2.11)

$$0 = (u_0, v)_F = (u_0, Av)_E, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A),$$

и так как $\mathcal{R}(A) = E$, то $u_0 = 0$, что противоречит предположению.

Таким образом, справедливо тождество

$$\|u\|_F = \|A^{1/2}u\|_E, \quad \forall u \in F. \tag{1.2.14}$$

Следовательно, пространство F является областью определения положительно определенного самосопряженного оператора $A^{1/2}$, а норма в F определяется формулой (1.2.14). При этом если F компактно вложено в E ($F \hookrightarrow\hookrightarrow E$), то оператор $A^{-1/2}$, обратный к $A^{1/2}$, компактен.

Назовем оператор A *порождающим оператором* гильбертовой пары $(F; E)$. Из проведенных выше построений следует, что он определяется единственным образом по паре $(F; E)$.

Отметим в качестве замечания, что иногда пространство F состоит из элементов другой природы, чем E, но существует взаимно однозначное отображение множества F на плотное в E множество $\widetilde{F}$, причем это отображение сохраняет алгебраические операции. Тогда F можно отождествить с его образом $\widetilde{F}$, и если снова справедливо неравенство (1.2.1), то все предыдущие построения проходят и в этом случае.

1.2.2 Примеры гильбертовых пар пространств

Рассмотрим некоторые классические примеры гильбертовых пар пространств скалярных функций, встречающихся в приложениях, а также примеры гильбертовых пар пространств вектор–функций.

1^0. *Гильбертова пара* $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$.
Этот пример уже рассматривался в начале п. 1.2.1. Так как $H^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ и

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \tag{1.2.15}$$

то $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ – гильбертова пара пространств.

2^0. *Гильбертова пара* $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$.
Пусть $L_{2,\Omega}$ – подпространство тех элементов из $L_2(\Omega)$, которые ортогональны к единичной функции 1_Ω:

$$L_{2,\Omega} := \Big\{ u \in L_2(\Omega) : \int\limits_\Omega u(x)\, d\Omega = (u, 1_\Omega)_{L_2(\Omega)} = 0 \Big\}. \tag{1.2.16}$$

Можно сказать, что $L_{2,\Omega}$ состоит из тех функций из $L_2(\Omega)$, которые имеют нулевое среднее значение:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega u\, d\Omega = 0. \tag{1.2.17}$$

Рассмотрим теперь подпространство H^1_Ω тех элементов из $H^1(\Omega)$, для которых также выполнено свойство (1.2.17). Введем на $H^1(\Omega)$ норму, эквивалентную стандартной (см. [4], теорема 2.4.4):

$$\|u\|^2_{1,\Omega} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, d\Omega + \Big(\int\limits_\Omega u\, d\Omega \Big)^2. \tag{1.2.18}$$

Тогда для элементов из H^1_Ω имеем

$$\|u\|^2_{1,\Omega} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, d\Omega, \tag{1.2.19}$$

т.е. квадрат нормы в H^1_Ω совпадает с интегралом Дирихле.

Так как $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ образуют гильбертову пару пространств, то в силу определений пространств H^1_Ω и $L_{2,\Omega}$ (они являются подпространствами коразмерности единица пространств $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$, причем отделяется одно и то же подпространство, состоящее из констант) эти пространства также образуют гильбертову пару пространств.

3^0. *Гильбертова пара* $(H_0^1(\Omega); L_2(\Omega))$.
Рассмотрим подпространство $H_0^1(\Omega)$ тех функций из $H^1(\Omega)$, которые обращаются в нуль на границе $\partial\Omega$ области Ω:

$$H_0^1(\Omega) := \Big\{ u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \Big\}.$$

В этом подпространстве можно ввести норму в эквивалентной форме:

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega.$$

Так как $H_0^1(\Omega)$ содержит множество финитных бесконечно дифференцируемых функций, которые плотны в $L_2(\Omega)$, то $H_0^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$. Кроме того, для элементов из $H_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство Фридрихса (см. [2], [4]):

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2.20}$$

Отсюда приходим к выводу, что $(H_0^1(\Omega); L_2(\Omega))$ – гильбертова пара пространств.
4^0. *Гильбертова пара* $(H_{0,\Gamma}^1(\Omega); L_2(\Omega))$.
Рассмотрим теперь множество $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ тех функций из $H^1(\Omega)$, которые обращаются в нуль на части Γ границы $\partial\Omega$, причем Γ имеет положительную меру, т.е. $|\Gamma| > 0$. Можно доказать, что $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ образует подпространство в $H^1(\Omega)$. Введем в $H^1(\Omega)$ норму, эквивалентную стандартной (снова см. [4], теорема 2.4.4), по формуле

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega + \Big(\int\limits_\Gamma u \, d\Gamma \Big)^2. \tag{1.2.21}$$

Тогда для элементов из $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ эта норма, как и в случае 3^0, совпадает с интегралом Дирихле:

$$\|u\|^2_{H_{0,\Gamma}^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega. \tag{1.2.22}$$

Так как $H_{0,\Gamma}^1(\Omega) \supset H_0^1(\Omega)$, то $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, и по теореме вложения Соболева ([4], с. 74) имеем

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{c}\|u\|_{H_{0,\Gamma}^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega). \tag{1.2.23}$$

Отсюда снова получаем, что $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$ – гильбертова пара пространств.

Рассмотрим, наконец, гильбертовы пары пространств, состоящих из векторных полей, связанных с проблемами линейной теории упругости и гидродинамики вязкой жидкости (см. п. 1.1.4).

5^0. *Гильбертова пара* $(\overrightarrow{H}^1(\Omega); \overrightarrow{L_2}(\Omega))$.

Пусть $\vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{3} u_i(x)\vec{e}_i$ – векторное поле, заданное в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$ пространство векторных полей с нормой

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} |\vec{u}(x)|^2 \, d\Omega < \infty, \tag{1.2.24}$$

а через $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ – пространство векторных полей с нормой

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left(|\vec{u}|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 \right) d\Omega < \infty. \tag{1.2.25}$$

Нетрудно видеть, что квадрат нормы (1.2.25) есть сумма квадратов стандартных норм компонент $u_i(x)$ векторного поля $\vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{3} u_i(x)\vec{e}_i$.

Так как $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ – гильбертова пара пространств для скалярных функций (см. вариант 1^0), то в векторном случае $(\overrightarrow{H}^1(\Omega); \overrightarrow{L_2}(\Omega))$ – также гильбертова пара пространств. В самом деле, так как $H^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ и имеет место неравенство (1.2.15), то $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ плотно в $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$ и имеет место аналогичное неравенство (см. (1.2.24), (1.2.25))

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} \leqslant \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)}, \quad \forall \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1(\Omega). \tag{1.2.26}$$

6^0. *Гильбертова пара* $(\overrightarrow{H}^1_0(\Omega); \overrightarrow{L_2}(\Omega))$.

Введем подпространство $\overrightarrow{H}^1_0(\Omega)$ векторных полей $\vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{3} u_i(x)\vec{e}_i$ из $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$, у которых все компоненты u_i обращаются в нуль на $\partial\Omega$:

$$\overrightarrow{H}^1_0(\Omega) := \left\{ \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1(\Omega) : \vec{u}|_{\partial\Omega} = \vec{0} \right\}. \tag{1.2.27}$$

Очевидно, как и в случае 3^0, на этом подпространстве можно вместо (1.2.25) ввести норму по закону

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)} := \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \Big| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|^2 \, d\Omega, \tag{1.2.28}$$

и имеет место неравенство Фридрихса (см. (1.2.20))

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} \leqslant c^2 \|\vec{u}\|_{\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)}, \quad \forall \vec{u} \in \overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega). \tag{1.2.29}$$

Так как $H^1_0(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то $\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)$ плотно в $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$ и потому $(\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega); \overrightarrow{L_2}(\Omega))$ – гильбертова пара пространств.

7^0. *Гильбертовы пары* $(\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega); \overrightarrow{L_2}(\Omega))$ *и* $(\overrightarrow{H}{}^1(\Omega); \overrightarrow{L_2}(\Omega))$ *с эквивалентными нормами.*
В пространствах векторных полей $\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)$ и $\overrightarrow{H}{}^1(\Omega)$ можно ввести нормы, эквивалентные нормам, порожденным билинейными функционалами из формул Грина (1.1.17), (1.1.21) и (1.1.23) теории упругости и гидродинамики.

Рассмотрим сначала вещественное пространство $\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)$. Введем на его элементах новую норму

$$\|\vec{u}\|^2_{1,0,\Omega} := E(\vec{u},\vec{u}) + \int\limits_\Omega |\operatorname{div} \vec{u}|^2 \, d\Omega, \tag{1.2.30}$$

где $E(\vec{u},\vec{u})$ – квадратичный функционал (1.1.17). Покажем, что эта норма эквивалентна норме (1.2.28).

С этой целью преобразуем выражение

$$E(\vec{u},\vec{u}) := \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \Big| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big|^2 \Big) \, d\Omega = \ldots =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \Big| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|^2 \Big) \, d\Omega + \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big) \, d\Omega.$$

Так как $\vec{u} \in \overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)$ и потому $\vec{u} = \vec{0}$ на $\partial\Omega$, то второе слагаемое преобразуется по формуле (1.1.9), и тогда согласно (1.1.13) имеем

$$
\begin{aligned}
E(\vec{u},\vec{u}) &= \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \Big| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|^2 \Big)\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} (\nabla \operatorname{div} \vec{u}) \cdot \vec{u}\, d\Omega = \\
&= \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \Big| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|^2 \Big)\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} |\operatorname{div} \vec{u}|^2\, d\Omega, \quad \forall \vec{u} \in \overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega).
\end{aligned} \tag{1.2.31}
$$

Это соотношение называют *тождеством Корна*. Из него и из (1.2.30) получаем, что

$$
\|\vec{u}\|^2_{1,0,\Omega} = \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)} + 2 \int\limits_{\Omega} |\operatorname{div} \vec{u}|^2\, d\Omega \geqslant \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)}. \tag{1.2.32}
$$

С другой стороны, так как

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |\operatorname{div} \vec{u}|^2\, d\Omega &= \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \Big)^2 d\Omega \leqslant \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{3} \Big| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \Big| \Big)^2 d\Omega \leqslant \\
&\leqslant 3 \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{3} \Big| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \Big|^2 \Big)\, d\Omega \leqslant 3 \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \Big| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|^2 \Big)\, d\Omega = 3\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)},
\end{aligned} \tag{1.2.33}
$$

то из (1.2.32) имеем также неравенство

$$
\|\vec{u}\|^2_{1,0,\Omega} \leqslant 7\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)}. \tag{1.2.34}
$$

Неравенства (1.2.32) и (1.2.34) доказывают эквивалентность норм (1.2.28) и (1.2.30). Отсюда следует, что пространство $\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)$ с нормой (1.2.30) и $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$ также образуют гильбертову пару пространств. Отметим еще, что неравенство (1.2.32) называют *первым неравенством Корна*.

Заметим также, что если векторные поля из $\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)$ соленоидальны, т.е. $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, как это имеет место для поля скоростей несжимаемой жидкости, то из (1.2.30) и (1.2.32) следует, что

$$
\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega)} = E(\vec{u},\vec{u}), \quad \vec{u} \in \overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega), \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{1.2.35}
$$

Введем теперь соответствующие эквивалентные нормы для пары пространств $(\overrightarrow{H}{}^1(\Omega); \overrightarrow{L_2}(\Omega))$; они также играют важную роль в задачах теории упругости и гидродинамики.

Введем в $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ норму по формуле

$$\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} := E(\vec{u},\vec{u}) + \int\limits_{\Omega} |\operatorname{div}\vec{u}|^2\,d\Omega + \int\limits_{\Omega} |\vec{u}|^2\,d\Omega = \|\vec{u}\|^2_{1,0,\Omega} + \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)}. \quad (1.2.36)$$

Тогда оказывается, что имеет место *второе неравенство Корна*, которое имеет следующий вид (см. [6], с. 18):

$$\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} \geqslant c_1 \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)}, \ \ c_1 > 0, \ \ \forall \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1(\Omega), \qquad (1.2.37)$$

где $\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)}$ — стандартная норма (1.2.25). Вместе с очевидным неравенством противоположного смысла

$$\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} \leqslant c_2 \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)}, \ \ \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1(\Omega), \qquad (1.2.38)$$

(докажите его!) получаем, что нормы (1.2.36) и (1.2.25) эквивалентны.

В ряде приложений важное значение имеет несколько иная форма второго неравенства Корна. Обозначим через $\overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}} \subset \overrightarrow{H}^1(\Omega)$ пространство, описывающее жесткие перемещения (сдвиг и вращения) сплошной среды, т.е. множество вектор-функций вида

$$\vec{\eta} := \vec{a} + \vec{\delta} \times \vec{r}, \ \ \forall \vec{a}, \vec{\delta} \in \mathbb{R}^3, \ \ \vec{r} = \sum_{k=1}^{3} x_k \vec{e}_k, \qquad (1.2.39)$$

где символом " $\times$ " обозначено обычное векторное произведение векторов. Размерность $\overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}}$, очевидно, равна 6. Рассмотрим теперь подпространство $\overrightarrow{H}^1_{\overrightarrow{R}}(\Omega)$ тех элементов из $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$, для которых выполнено условие

$$\overrightarrow{H}^1_{\overrightarrow{R}}(\Omega) \cap \overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}} = \{\vec{0}\}. \qquad (1.2.40)$$

Тогда (в области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$) для любой функции $\vec{u} \in \vec{H}^1_{\overrightarrow{R}}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$E(\vec{u},\vec{u}) + \int\limits_{\Omega} |\operatorname{div}\vec{u}|^2\,d\Omega \geqslant c_3 \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)}, \ \ c_3 > 0, \qquad (1.2.41)$$

которое называют *другой формой второго неравенства Корна* (см. [6], с. 22). Здесь, очевидно, левую часть можно принять в качестве квадрата нормы в пространстве $\overrightarrow{H}^1_{\overrightarrow{R}}(\Omega)$, и эта норма будет эквивалентна стандартной норме (1.2.25) на $\overrightarrow{H}^1_{\overrightarrow{R}}(\Omega)$.

Пусть, в частности, поле перемещений или поле скоростей сплошной среды обращается в нуль на части $S \subset \partial\Omega$ границы области Ω. Тогда такие поля образуют подпространство $\overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega)$ в пространстве $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$, причем для элементов $\vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega)$ из условия

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{\delta} \times \vec{r} \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S)$$

следует, что $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{\delta} = \vec{0}$. Значит, $\overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega) \cap \overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}} = \{\vec{0}\}$, и потому в силу (1.2.40) имеет место неравенство (1.2.41):

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega)} := E(\vec{u},\vec{u}) + \int\limits_{\Omega} |\operatorname{div}\vec{u}|^2\, d\Omega \geqslant c_3 \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)}, \ \forall \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega). \quad (1.2.42)$$

В гидродинамике важную роль играет подпространство $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ соленоидальных полей из $\overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega)$, когда поле скоростей $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x \in \Omega$, обращается в нуль на твердой стенке S, т.е. на части границы области Ω. Тогда из (1.2.42) и неравенства противоположного смысла получаем, что нормы в $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ и $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ эквивалентны:

$$0 < c_3 \leqslant E(\vec{u},\vec{u}) / \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)} \leqslant c_4 < \infty, \ \ \forall \vec{u} \in \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega). \quad (1.2.43)$$

1.2.3 Гильбертова шкала пространств. Оснащенные гильбертовы пространства

Пусть $(F; E)$ – гильбертова пара пространств и A – оператор этой гильбертовой пары. Так как $A : \mathcal{D}(A) \subset F \subset E \to E$ – положительно определенный неограниченный самосопряженный оператор, то при любом $\alpha \geqslant 0$ существует (это следует также из спектрального разложения оператора A) оператор A^α, который также является положительно определенным самосопряженным оператором, действующим в E и заданным на тех элементах из E, для которых $A^\alpha x \in E$.

По оператору A можно ввести серию новых гильбертовых пространств следующим образом. Для $\alpha > 0$ обозначим через E^α область определения $\mathcal{D}(A^\alpha) \subset E$ степени A^α оператора A. Это линейное множество превращается в гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(u, v)_{E^\alpha} := (A^\alpha u, A^\alpha v)_E, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A^\alpha), \quad (1.2.44)$$

и нормы

$$\|u\|_{E^\alpha} := \|A^\alpha u\|_E. \qquad (1.2.45)$$

Напомним, что для $A \gg 0$ оператор A^α при $\alpha > 0$ определен через спектральное разложение

$$A := \int\limits_{\sigma(A)} \mu \, dT_\mu \qquad (1.2.46)$$

оператора A по закону

$$A^\alpha := \int\limits_{\sigma(A)} \mu^\alpha \, dT_\mu, \qquad (1.2.47)$$

причем

$$\|A^\alpha u\|_E^2 = \|u\|_{E^\alpha}^2 = \int\limits_{\sigma(A)} \mu^{2\alpha} \, d(T_\mu u, u)_E < \infty, \quad u \in \mathcal{D}(A^\alpha).$$

Здесь $\sigma(A)$ – спектр оператора A, $\inf \sigma(A) > 0$, а T_μ – разложение единицы, отвечающее оператору A.

Из определения E^α и формулы (1.2.14) следует, что $E^{1/2} = F$ и

$$\|u\|_F := \|u\|_{E^{1/2}}, \quad u \in F = E^{1/2}. \qquad (1.2.48)$$

Очевидно также, что $E^0 = E$.

Заметим теперь, что для отрицательных значений β оператор $A^\beta = V^{-\beta}$ ограничен, задан на всем пространстве E, и если $F \hookrightarrow\hookrightarrow E$, то A^β компактен. Поэтому для введения пространств E^α с отрицательными индексами поступают следующим образом. На пространстве $E = E^0$ вводится новая норма

$$\|u\|_{E^{-\alpha}} := \|A^{-\alpha} u\|_E, \quad u \in E, \quad \alpha > 0, \qquad (1.2.49)$$

а затем E *пополняется* по этой норме. Полученное гильбертово пространство и обозначается через $E^{-\alpha}$. Очевидно, пространство $E^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, состоит из таких элементов u, для которых

$$\|A^{-\alpha} u\|_E^2 = \|u\|_{E^{-\alpha}}^2 = \int\limits_{\sigma(A)} \mu^{-2\alpha} \, d(T_\mu u, u)_E < \infty. \qquad (1.2.50)$$

Построенное семейство пространств $E^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, называется *гильбертовой шкалой пространств*. Эта шкала обладает следующими свойствами.

1^0. При $\alpha < \beta$ пространство E^β плотно вложено в E^α.

2^0. При $\alpha > 1$ *сужение* оператора A *на* E^α взаимно однозначно и непрерывно отображает пространство E^α *на* пространство $E^{\alpha-1}$.

3^0. При $\alpha \leqslant 1$ *расширение по непрерывности* оператора A с $\mathcal{D}(A) = E^1$ на E^α отображает E^α на $E^{\alpha-1}$; в частности, оператор A отображает $E^{1/2} = F$ *на* пространство $E^{-1/2}$.

4^0. Аналогично действие оператора A^β, в частности, оператора $A^{1/2}$. Так, оператор $A^{1/2}$ отображает $E^{1/2} = F$ на $E^0 = E$, а E на $E^{-1/2}$.

Опишем подробнее пространство $E^{-1/2}$ и свяжем его с пространствами E и $E^{1/2} = F$. Пространство $E^{-1/2}$ получается пополнением $E = E^0$ по норме

$$\|v\|_{E^{-1/2}} = \|A^{-1/2}v\|_{E^0}.$$

Зафиксируем элемент $v \in E^0$. Ему соответствует линейный ограниченный функционал (см. (1.2.3), (1.2.4))

$$l_v(u) := (u, v)_{E^0}, \quad u \in F = E^{1/2}, \tag{1.2.51}$$

причем

$$\begin{aligned} &|l_v(u)| = |(u, v)_{E^0}| = |(A^{1/2}u, A^{-1/2}v)_{E^0}| \leqslant \\ &\leqslant \|A^{-1/2}v\|_{E^0} \cdot \|A^{1/2}u\|_{E^0} = \|A^{-1/2}v\|_{E^0} \cdot \|u\|_F. \end{aligned} \tag{1.2.52}$$

Отсюда следует, что

$$\|l_v\|_{F^*} \leqslant \|A^{-1/2}v\|_{E^0}.$$

Оказывается, здесь имеет место равенство. Действительно, при $w = A^{-1}v$ имеем

$$\begin{aligned} l_v(w) &= (A^{-1}v, v)_{E^0} = (A^{-1/2}v, A^{-1/2}v)_{E^0} = \|A^{-1/2}v\|_{E^0} \cdot \|A^{-1/2}v\|_{E^0} = \\ &= \|A^{-1/2}v\|_{E^0} \cdot \|A^{1/2}(A^{-1}v)\|_{E^0} = \|A^{-1/2}v\|_{E^0} \cdot \|w\|_F. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|l_v\|_{F^*} = \|A^{-1/2}v\|_{E^0}. \tag{1.2.53}$$

Приведенные рассуждения показывают, что пространство $E = E^0$ можно вложить в пространство F^* линейных ограниченных функционалов на пространстве F. При этом выполнено соотношение

(1.2.53). Отсюда следует, что пространство $E^{-1/2}$, являющееся пополнением пространства $E^0 = E$ по норме $\|A^{-1/2}v\|_{E^0}$, $v \in E$, можно *изометрически* отождествить с подпространством из F^*, т.е. $E^{-1/2} \subset F^*$.

Покажем, что это подпространство совпадает со всем F^*. Пусть это не так. Тогда найдется ненулевой элемент $u_0 \in F$ такой, что на этом элементе все функционалы из указанного подпространства, т.е. на $E^{-1/2}$, обращаются в нуль. Но тогда при любом $v \in E^0$ будет

$$l_v(u_0) = (u_0, v)_{E^0} = 0,$$

откуда следует, что $u_0 = 0$ (противоречие).

Итак, пространство $E^{-1/2}$ *изометрически отождествляется* с пространством F^*, сопряженным с пространством F, т.е.

$$E^{-1/2} = F^* = (E^{1/2})^*. \tag{1.2.54}$$

Вернемся к рассмотрению линейного ограниченного функционала $l_v(u)$ из (1.2.51) при $v \in E$, $u \in F$. Здесь элемент v можно отождествить с функционалом из F^*. После такого отождествления, как следует из вышеизложенного, пространство $E = E^0$ будет плотным множеством в пространстве $F^* = E^{-1/2}$. Отсюда следует, что скалярное произведение $(u, v)_E$ при $u \in F$ можно *расширить* на тот случай, когда второй множитель принадлежит F^*. Если $v_n \in E$, $v_n \to v$ в F^*, то возникает линейный ограниченный функционал

$$l_v(u) := \langle u, v\rangle_E := \lim_{n\to\infty}(u, v_n)_E, \quad \forall u \in F, \quad \forall v \in F^*. \tag{1.2.55}$$

При этом в силу (1.2.53) справедливо неравенство

$$|\langle u, v\rangle_E| \leqslant \|v\|_{F^*} \cdot \|u\|_F, \tag{1.2.56}$$

которое также называют *неравенством Коши-Буняковского.*

Поясним детальнее получение формул (1.2.55), (1.2.56). Как следует из предыдущих рассуждений (см. (1.2.52), (1.2.53), (1.2.54)),

$$\begin{aligned} &|l_v(u)| = |(u, v)_{E^0}| \leqslant \\ &\leqslant \|u\|_F \cdot \|A^{-1/2}v\|_{E^0} = \|u\|_F \cdot \|v\|_{F^*}, \quad \forall u \in F, \ \forall v \in E^0. \end{aligned} \tag{1.2.57}$$

Так как E^0 плотно в $E^{-1/2} = F^*$, то для любого $v \in F^*$ существует последовательность $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset E^0$ такая, что

$$\|v - v_j\|_{F^*} \to 0 \quad (j \to \infty). \tag{1.2.58}$$

Тогда для элементов этой последовательности имеем

$$|(u,v_j)_{E^0}-(u,v_k)_{E^0}|=|(u,v_j-v_k)_{E^0}| \leqslant \|u\|_F \cdot \|v_j-v_k\|_{F^*} \to 0, \quad (1.2.59)$$

так как в силу (1.2.58)

$$\|v_j-v_k\|_{F^*} \to 0 \quad (j,k\to\infty).$$

Значит, существует числовой предел

$$\lim_{j\to\infty}(u,v_j)_{E^0} =: \langle u,v\rangle_{E^0} =: l_v(u), \quad \forall u\in F, \quad \forall v\in F^*. \qquad (1.2.60)$$

Для этого предела из неравенства (1.2.57) для $v=v_j$ имеем

$$|(u,v_j)_{E^0}| - \|u\|_F \cdot \|v_j\|_{F^*} \leqslant 0,$$

Устремляя здесь $j\to\infty$ и используя соотношение (1.2.58) и следующее из него свойство

$$\|v_j\|_{F^*} \to \|v\|_{F^*},$$

получаем в пределе неравенство Коши–Буняковского (1.2.56).

При выполнении соотношений (1.2.55), (1.2.56) говорят, что функционал $l_v \in F^*$ *определен через скалярное произведение в* E, а тройку пространств

$$F \hookrightarrow E \hookrightarrow F^* \qquad (1.2.61)$$

называют *оснащением* пространства E.

1.2.4 Обобщенные и слабые решения операторных уравнений

Пусть $(F;E)$ – гильбертова пара пространств и A – порождающий оператор этой пары. Тогда A положительно определен и самосопряжен в $E=E^0$ и задан на области определения

$$\mathcal{D}(A) = E^1 \subset E^{1/2} = F \subset E^0.$$

Многие эллиптические краевые задачи математической физики могут быть кратко записаны в виде операторного уравнения

$$Au = f, \qquad (1.2.62)$$

где A – оператор гильбертовой пары $(F;E)$, а E и F – гильбертовы пространства, естественно связанные с задачей (см. ниже п. 1.2.5, а также [4]).

Пусть сначала в (1.2.62) заданный элемент $f \in E$. Так как оператор A имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1} = V$, то при любом $f \in E$ существует единственное решение $u = A^{-1}f$, которое, в отличие от классического решения, называют *обобщенным решением* задачи (1.2.62). (Напомним, что классическими решениями задач математической физики называют такие решения, которые непрерывны и имеют все непрерывные производные, входящие в уравнения и краевые условия.)

Как следует из теории шкал гильбертовых пространств (см. свойства 1^0 – 4^0 п. 1.2.3), оператор A^{-1} ограниченно действует из $E = E^0$ *на* $E^1 = \mathcal{D}(A)$. Поэтому совокупность $\{A^{-1}f\}$, $f \in E$, всех обобщенных решений задачи (1.2.62) заполняет всю область определения $\mathcal{D}(A) = E^1$ оператора A. Для указанных обобщенных решений выполнено тождество

$$(v,u)_F = (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_E = (v, Au)_E = (v,f)_E, \ \forall v \in F = \mathcal{D}\left(A^{1/2}\right). \quad (1.2.63)$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в (1.2.62) заданный элемент $f \in F^* = E^{-1/2} \supset E$. В этом случае решения задачи

$$Au = f, \quad f \in F^*, \quad (1.2.64)$$

называют *слабыми решениями*. Здесь можно считать, что оператор A действует в шкале гильбертовых пространств E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Так как в этом случае оператор A ограниченно действует из $E^{1/2} = F$ *на* $E^{-1/2} = F^*$, а потому обратный оператор A^{-1} ограниченно действует из $F^* = E^{-1/2}$ *на* $E^{1/2} = F$, то при любом $f \in F^*$ задача (1.2.64) имеет единственное слабое решение $u = A^{-1}f \in F$. При этом (и этот факт снова следует из теории шкал гильбертовых пространств) совокупность слабых решений $\{A^{-1}f\}$, $f \in F^*$, задачи (1.2.64) заполняет все пространство F, а совокупность правых частей $\{f\} = \{Au\}$, $u \in F$, соответственно заполняет все пространство F^*.

Итак, для слабых решений задачи (1.2.64) имеем

$$\mathcal{D}(A) = F = E^{1/2}, \quad \mathcal{R}(A) = F^* = E^{-1/2}, \quad (1.2.65)$$

и выполнено тождество

$$(v,u)_F = (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_E = \langle v, Au\rangle_E = \langle v, f\rangle_E, \quad \forall v \in F. \quad (1.2.66)$$

1.2.5 Некоторые примеры краевых задач для эллиптических уравнений и их слабых решений

Опираясь на введенные в п. 1.2.2 пары гильбертовых пространств, рассмотрим некоторые примеры обобщенных и слабых решений операторных уравнений для оператора Лапласа и близких к нему операторов.

1^0. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\Gamma = \partial\Omega$ – граница области Ω, которую сейчас будем считать достаточно гладкой, для простоты даже бесконечно дифференцируемой.

Рассмотрим краевую задачу Неймана для уравнения типа Пуассона:

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{1.2.67}$$

Как известно из курсов математической физики и уравнений в частных производных (см., в частности, [8]), эта задача при $f(x) \in C(\overline{\Omega})$ имеет классическое решение $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, которое определяется единственным образом по $f(x)$.

Если $f(x) \in L_2(\Omega) \supset C(\overline{\Omega})$, то можно определить обобщенное решение $u(x)$ задачи (1.2.67) посредством тождества (см. (1.2.63))

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = (\eta, f)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.2.68}$$

Это тождество следует из формулы Грина (1.1.6), если в ней взять $v = \eta$, $u - \Delta u$ заменить на f и учесть граничные условия на Γ (см. (1.2.67)).

Наконец, если $f(x) \in (H^1(\Omega))^* \supset L_2(\Omega)$ (сопряжение по форме $L_2(\Omega)$), то слабое решение задачи (1.2.67) определяется из тождества, обобщающего (1.2.68):

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega), \tag{1.2.69}$$

где $\langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}$ – значение функционала $f \in (H^1(\Omega))^*$ на элементе $\eta \in H^1(\Omega)$.

2^0. Рассмотрим теперь взамен (1.2.67) краевую задачу для однородного уравнения и неоднородного краевого условия:

$$w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{1.2.70}$$

Если здесь $\psi = \psi(x)$, $x \in \Gamma$, – достаточно гладкая функция, заданная на $\Gamma = \partial\Omega$ (например, если $\psi \in C^2(\Gamma)$), то задача (1.2.70) имеет единственное классическое решение $w(x)$ (см., например, [8]).

Снова опираясь на формулу Грина (1.1.6), определим при $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$ обобщенное решение $w(x)$ задачи (1.2.70) посредством тождества

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = (\gamma\eta, \psi)_{L_2(\Gamma)}, \quad \gamma\eta := \eta|_\Gamma, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.2.71}$$

Пусть теперь $\psi(x) \in H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$ (сопряжение по форме $L_2(\Gamma)$). Тогда слабое решение $w(x)$ задачи (1.2.70) определяется из тождества

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.2.72}$$

Здесь пространства

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L_2(\Gamma) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) := (H^{1/2}(\Gamma))^* \tag{1.2.73}$$

образуют оснащение пространства $L_2(\Gamma)$. Подробное описание шкал пространств $H^\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, в области Ω с бесконечно дифференцируемой границей $\Gamma = \partial\Omega$ можно найти, например, в монографии [8]. Для области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ описание пространств $H^{1/2}(\Gamma)$ и $(H^{1/2}(\Gamma))^*$ будет дано ниже в п. 1.4.4 (см. теорему Гальярдо).

3^0. Аналогичным образом можно по приведенным в п. 1.2.2 парам пространств $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$, $(H^1_0(\Omega); L_2(\Omega))$ и $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$ определить соответственно классические, обобщенные и слабые решения задач, подобных задачам (1.2.67) и (1.2.70).

Так, для пары пространств $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$ возникают краевые задачи

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \int_\Omega f\, d\Omega = 0, \int_\Omega u\, d\Omega = 0, \tag{1.2.74}$$

$$\Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \int_\Gamma \psi\, d\Gamma = 0, \int_\Omega w\, d\Omega = 0. \tag{1.2.75}$$

Обобщенное и слабое решения задачи (1.2.74) определяются соответственно из тождеств

$$\int_\Omega \nabla\eta \cdot \nabla u\, d\Omega = \int_\Omega \eta f\, d\Omega = (\eta, f)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1_\Omega, \quad f \in L_{2,\Omega}, \tag{1.2.76}$$

$$\int_\Omega \nabla\eta \cdot \nabla u\, d\Omega = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1_\Omega, \quad f \in (H^1_\Omega)^* \supset L_{2,\Omega}. \tag{1.2.77}$$

Для задачи (1.2.75) аналогично имеем тождества

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla w \, d\Omega = \int\limits_{\Gamma} \eta\psi \, d\Gamma = (\eta, \psi)_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta \in H^1_\Omega, \quad \psi \in L_{2,\Gamma}, \tag{1.2.78}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla w \, d\Omega = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_{2,\Gamma}}, \quad \forall \eta \in H^1_\Omega, \quad \psi \in (H^{1/2}_\Gamma)^* \supset L_{2,\Gamma}, \tag{1.2.79}$$

$$H^{1/2}_\Gamma := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \quad L_{2,\Gamma} := \{\psi \in L_2(\Gamma) : \int\limits_{\Gamma} \psi \, d\Gamma = 0\}. \tag{1.2.80}$$

Для гильбертовой пары пространств $(H^1_0(\Omega); L_2(\Omega))$ рассматривают задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{1.2.81}$$

Обобщенное и слабое решения этой задачи определяются соответственно из тождеств

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \eta f \, d\Omega, \quad \forall \eta \in H^1_0(\Omega), \quad f \in L_2(\Omega), \tag{1.2.82}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \, \forall \eta \in H^1_0(\Omega), \, f \in (H^1_0(\Omega))^* \supset L_2(\Omega). \tag{1.2.83}$$

Рассмотрим еще гильбертову пару пространств $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$, см. п. 1.2.2. Для простоты будем считать, что граница $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, в которой изучается задача, состоит из двух непересекающихся кусков, $\partial\Omega = \Gamma \cup S$, $\overline{\Gamma} \cap \overline{S} = \emptyset$, причем Γ и S – бесконечно дифференцируемые поверхности. Тогда возникают следующие так называемые *смешанные краевые задачи*, аналогичные вышеприведенным задачам (1.2.74) и (1.2.75), а также (1.2.81):

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{1.2.84}$$

$$\Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } S), \quad w = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{1.2.85}$$

Здесь определения обобщенных и слабых решений таковы.
Для задачи (1.2.84):

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \eta f \, d\Omega, \quad \forall \eta \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \quad f \in L_2(\Omega); \tag{1.2.86}$$

$$\int_\Omega \nabla\eta\cdot\nabla u\,d\Omega = \langle\eta, f\rangle_{L_2(\Omega)},\ \forall\eta\in H^1_{0,\Gamma}(\Omega),\ f\in(H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*\supset L_2(\Omega); \quad (1.2.87)$$

для задачи (1.2.85):

$$\int_\Omega \nabla\eta\cdot\nabla w\,d\Omega = \int_S \eta\psi\,dS, \quad \forall\eta\in H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \quad \psi\in L_2(S), \qquad (1.2.88)$$

$$\int_\Omega \nabla\eta\cdot\nabla w\,d\Omega = \langle\gamma\eta,\psi\rangle_{L_2(S)},\ \forall\eta\in H^1_{0,\Gamma}(\Omega),\ \psi\in(H^{1/2}(S))^*\supset L_2(S). \quad (1.2.89)$$

Заметим в заключение этого пункта, что каждая из рассмотренных здесь задач имеет единственное обобщенное либо слабое решение, принадлежащее первому из пространств соответствующей гильбертовой пары. Эти факты следуют из общих рассмотрений п. 1.2.4. Предоставляем возможность самостоятельно детально рассмотреть приведенные примеры на основе общих построений, изложенных в пп. 1.2.1 – 1.2.4.

1.3 Абстрактная формула Грина

1.3.1 Введение

Пусть Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Для функций $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ и $\eta(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $x = (x_1,\ldots,x_m) \in \overline{\Omega}$, как уже упоминалось в п. 1.1.2, справедлива формула Грина (см. (1.1.6))

$$\Big(\eta, u-\Delta u\Big)_{L_2(\Omega)} = \Big(\eta, u\Big)_{H^1(\Omega)} - \Big(\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{L_2(\Gamma)}, \quad \gamma u := u|_\Gamma, \quad (1.3.1)$$

где $\Delta := \sum\limits_{k=1}^{m} \partial^2/\partial x_k^2$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^m$, γ – оператор следа на Γ, а $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали на Γ.

В п. 1.1.3 уже приведены те варианты обобщений, которые возможны в формуле (1.3.1). Это, во-первых, – переход к липшицевой границе $\Gamma = \partial\Omega$, во-вторых, – переход к элементам η и u из $H^1(\Omega)$, в-третьих, – переход к функционалам вместо скалярных произведений в (1.3.1), наконец, в-четвертых, – получение абстрактной формулы Грина для произвольной тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа.

Перейдем к подробному выводу этой формулы Грина. Отметим предварительно, что первые результаты, связанные с получением абстрактной формулы Грина, принадлежат французскому математику Ж.–П. Обену (1970г., см. также его монографию [9], с. 188–189). Независимо от Ж.–П. Обена аналогичная формула была получена С.Г. Крейном; она опубликована в 1989г. в монографии ([5], с. 46–47). Позже абстрактная формула Грина в форме Ж.–П. Обена использовалась в монографии Р.Е. Шоуволтера ([10]).

Дальнейшее ослабление общих условий, обеспечивающих справедливость абстрактной формулы Грина, принадлежит второму автору данного пособия (см., [11] – [14], [30]). В этой окончательной формулировке и будет приведен и доказан соответствующий результат (см. п. 1.3.4).

1.3.2 Предварительные построения

Пусть $\{E, (\cdot,\cdot)_E\}$, $\{F, (\cdot,\cdot)_F\}$ и $\{G, (\cdot,\cdot)_G\}$ – сепарабельные гильбертовы пространства с введенными скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия.

1^0. Пространство F плотно вложено в E, $F \hookrightarrow E$, и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1.3.2}$$

2^0. На пространстве F задан оператор γ, называемый *абстрактным оператором следа* и ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+$ пространства G, т.е. $\gamma : F \to G_+ \hookrightarrow G$, и

$$\|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F, \quad b > 0, \quad u \in F. \tag{1.3.3}$$

3^0. Ядро $\ker\gamma$ оператора γ плотно в E. (1.3.4)

Переходя к выводу абстрактной формулы Грина при предположениях 1^0 – 3^0, обозначим через N ядро оператора γ:

$$N := \ker\gamma = \{u \in F : \gamma u = 0\}. \tag{1.3.5}$$

Так как в силу (1.3.3) оператор γ ограничен из F в G, то N есть подпространство пространства F. Обозначим через M ортогональное дополнение к N в F, т.е. считаем, что

$$F = N \oplus M, \tag{1.3.6}$$

и будем рассматривать основной для приложений случай, когда N и M бесконечномерны:

$$\dim N = \dim M = \infty. \tag{1.3.7}$$

В силу свойства 2^0 оператор $\gamma_M := \gamma|_M$, являющийся сужением оператора γ на подпространство M, осуществляет взаимно-однозначное отображение M на G_+. Это позволяет ввести на G_+ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi, \psi)_{G_+} := (u, v)_F, \quad u, v \in M, \quad \gamma_M u = \varphi, \quad \gamma_M v = \psi. \tag{1.3.8}$$

Опираясь на это определение скалярного произведения в G_+, выведем некоторые свойства и неравенства, связывающие элементы из N, F и G_+.

Пусть $u \in F$, $\gamma u = \varphi \in G_+$. Тогда найдется такой единственный элемент $w \in M$, что $\gamma w = \gamma_M w = \varphi$. При этом

$$\gamma u - \gamma_M w = \gamma(u - w) = 0 \Longleftrightarrow v := u - w \in N. \tag{1.3.9}$$

Так как в силу ортогонального разложения (1.3.6)

$$\|u\|_F^2 = \|w + (u - w)\|_F^2 = \|w\|_F^2 + \|u - w\|_F^2,$$

то

$$\|\varphi\|_{G_+}^2 = \|w\|_F^2 \leqslant \|u\|_F^2, \quad \forall u \in F, \quad \gamma u = \varphi. \tag{1.3.10}$$

Отсюда следует, что

$$\|\varphi\|_{G_+} = \min_{\gamma u = \varphi} \|u\|_F. \tag{1.3.11}$$

Из неравенства (1.3.3) и из (1.3.10) при $\gamma u = \gamma_M u = \varphi$, $u \in M$, имеем

$$\|\varphi\|_G = \|\gamma_M u\|_G \leqslant b\|u\|_F = b\|\varphi\|_{G_+}, \tag{1.3.12}$$

и так как согласно условию 2^0 G_+ плотно вложено в G, то $(G_+;G)$ – гильбертова пара пространств. Построим по этой паре шкалу пространств G^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, так, чтобы $G_+{=}G^{1/2}$, $G = G^0$, $(G_+)^* = G^{-1/2}$; это можно сделать согласно рассмотрениям п. 1.2.3.

Далее понадобится следующее общее определение сопряженного оператора, действующего из одного пространства в другое.

Определение 1.3.1. *Пусть X и Y – банаховы пространства и $A \in \mathcal{L}\ (X, Y)$ – линейный ограниченный оператор, действующий из X в Y. Пусть X^* и Y^* — сопряженные пространства для X и Y соответственно.*

Будем говорить, что оператор $A^* : Y^* \to X^*$ является ***сопряженным*** *к оператору A, если для любых $x \in X$ и $y^* \in Y^*$ выполнено тождество*

$$\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle. \tag{1.3.13}$$

(Здесь слева стоит значение линейного функционала $y^* \in Y^*$ на элементе $Ax \in Y$, а справа — значение функционала $A^* y^* \in X^*$ на элементе $x \in X$.) □

Опираясь на это определение сопряженного оператора, обозначим через T_M оператор, сопряженный к оператору γ_M в смысле скалярного произведения в G. Поскольку в силу (1.3.8) оператор γ_M *изометрически* отображает пространство M *на* пространство $G_+ = G^{1/2}$, то оператор $T_M = (\gamma_M)^*$ изометрически отображает пространство $(G_+)^* = G^{-1/2}$ *на* пространство M. При этом, по определению T_M, имеем

$$(\eta, T_M \psi)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_G\,, \quad \forall \eta \in M, \quad \forall \psi \in (G_+)^* = G^{-1/2}. \tag{1.3.14}$$

Обозначим теперь через ∂_M оператор, обратный к T_M, который, очевидно, существует, так как между элементами из M и G_+ имеется взаимно однозначное соответствие и даже изометрия. Тогда из (1.3.14) получаем тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M \eta, \partial_M w \rangle_G\,, \quad \forall \eta, w \in M, \tag{1.3.15}$$

где

$$\gamma_M \eta \in G_+, \quad \partial_M w \in (G_+)^*.$$

При $\eta = T_M \varphi$, $\varphi \in (G_+)^*$, из (1.3.14) следует также соотношение

$$(T_M \varphi, T_M \psi)_F = \langle \gamma_M T_M \varphi, \psi \rangle_G\,, \quad \forall \varphi, \psi \in (G_+)^*. \tag{1.3.16}$$

Из этого тождества следует, в частности, что оператор $C_M := \gamma_M T_M$ обладает следующими свойствами. Во-первых, C_M изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ *на* $G^{1/2} = G_+$, так как T_M изометрически отображает $(G_+)^*$ на M, а γ_M также изометрически отображает M на G_+. Во-вторых, как следует из (1.3.16), сужение $C_M|_G$ оператора C_M на пространство G является ограниченным в G оператором, самосопряженным и положительным. Действительно, при $\varphi, \psi \in G$ из (1.3.16) имеем

$$\langle \gamma_M T_M \varphi, \psi \rangle_G = \langle C_M \varphi, \psi \rangle_G = ((C_M|_G)\varphi, \psi)_G = (T_M \varphi, T_M \psi)_F. \tag{1.3.17}$$

Поэтому $C_M|_G = (C_M|_G)^*$. Полагая здесь $\varphi = \psi$, убеждаемся, что

$$((C_M|_G)\varphi, \varphi)_G = \|T_M\varphi\|_F^2 \geqslant 0,$$

причем равенство нулю достигается при $T_M\varphi = 0$. Так как T_M имеет обратный, то $\varphi = 0$, и потому $(C_M|_G)$ – положительный оператор, действующий в G.

Введем оператор $(C_M|_G)^{-1}$, существующий в силу доказанных выше свойств оператора $(C_M|_G)$. Его область определения

$$\mathcal{D}((C_M|_G)^{-1}) = \mathcal{R}(C_M|_G) \subset G_+, \ \ (\mathcal{R}((C_M|_G)^{-1}) = G), \tag{1.3.18}$$

так как область значений оператора $C_M = \gamma_M T_M$ совпадает с G_+. При этом $\mathcal{D}((C_M|_G)^{-1})$ плотна в G_+, поскольку по построению $(G_+)^*$ для оснащения

$$G_+ \hookrightarrow G \hookrightarrow (G_+)^*$$

пространство G плотно в $(G_+)^*$, а тогда $\mathcal{R}(C_M|_G)$ плотно в $G_+ = \mathcal{R}(C_M)$, $\mathcal{D}(C_M) = (G_+)^*$.

Напомним (см. (1.2.11)), что оператор A гильбертовой пары $(F; E)$ определяется из тождества

$$(u, v)_F = (u, Av)_E, \quad u \in F, \quad v \in \mathcal{D}\,(A) \subset F. \tag{1.3.19}$$

Покажем, что аналогичное тождество имеет место для гильбертовой пары $(G_+; G)$ и оператора $(C_M|_G)^{-1}$.

Действительно, положим в (1.3.17) при φ и ψ из G

$$T_M\varphi = u, \quad \gamma_M u = \widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}((C_M|_G)^{-1}) \subset G_+,$$
$$T_M\psi = v, \quad \gamma_M v = \widetilde{\psi} \in \mathcal{D}((C_M|_G)^{-1}) \subset G_+.$$

Тогда будем иметь

$$(\widetilde{\varphi}, (C_M|_G)^{-1}\widetilde{\psi})_G = (u, v)_F =: (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})_{G_+}, \ \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} \in \mathcal{D}((C_M|_G)^{-1}) \subset G_+. \tag{1.3.20}$$

Так как, согласно установленному выше, $\mathcal{D}((C_M|_G)^{-1})$, плотно в G_+, то, аппроксимируя произвольный элемент $\widetilde{\varphi} \in G_+$ элементами $\widetilde{\varphi}_n \in \mathcal{D}((C_M|_G)^{-1})$ и используя для них тождество (1.3.20), после предельного перехода при $n \to \infty$ получаем, что имеет место тождество

$$(\widetilde{\varphi}, (C_M|_G)^{-1}\widetilde{\psi})_G = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})_{G_+}, \ \widetilde{\varphi} \in G_+, \ \widetilde{\psi} \in \mathcal{D}((C_M|_G)^{-1}) \subset G_+. \tag{1.3.21}$$

Отсюда и следует, согласно определению (1.3.19), что $(C_M|_G)^{-1}$ – оператор гильбертовой пары $(G_+; G)$.

Отметим в качестве замечания, что если оператор A из (1.3.19) расширить с $\mathcal{D}(A) \subset F \subset E$ на все F (согласно теории шкал гильбертовых пространств это можно сделать), то формула (1.3.19) переходит в тождество

$$(u,v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E = \langle u, Av\rangle_E, \quad u \in F, \quad v \in F, \tag{1.3.22}$$

где $Av \subset F^*$. Соответственно при таком же расширении оператора $(C_M|_G)^{-1}$ до оператора C_M^{-1} с $\mathcal{D}(C_M^{-1}) = G_+$ формула (1.3.21) преобразуется в тождество

$$(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})_{G_+} = \langle \widetilde{\varphi}, C_M^{-1}\widetilde{\psi}\rangle_G, \quad \forall \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} \in G_+. \tag{1.3.23}$$

1.3.3 Абстрактное дифференциальное выражение и абстрактная производная по внешней нормали

Опираясь на установленные факты, продолжим построения, связанные с выводом абстрактной формулы Грина.

Будем теперь считать, что выполнено условие 1^0 п. 1.3.2, и рассмотрим гильбертову пару $(F;E)$. Построим по порождающему оператору A этой пары шкалу пространств E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, так, чтобы $F = E^{1/2}$, $E = E^0$, $F^* = E^{-1/2}$. В этой шкале оператор A ограниченно действует из E^α *на* $E^{\alpha-1}$, в частности, из $E^{1/2} = F$ *на* $E^{-1/2} = F^*$. Обратно, при любом $f \in E^{-1/2} = F^*$ обратный к нему оператор A^{-1} ограниченно действует из $E^{-1/2}$ на $E^{1/2} = F$ и дает слабое решение задачи $Au = f$ по формуле $u = A^{-1}f \in F = E^{1/2}$.

Далее под A будем понимать оператор, заданный на $\mathcal{D}(A){=}F = E^{1/2}$ и имеющий область значений $\mathcal{R}(A){=}E^{-1/2} = F^*$. Тогда $A^{1/2}$ ограниченно действует из F *на* E и из E *на* F^*, при этом имеет место тождество (см. (1.3.22))

$$(A^{1/2}\eta, A^{1/2}u)_E = (\eta, u)_F = \langle \eta, Au\rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.3.24}$$

Дальнейшие построения проводятся, с одной стороны, по схеме, изложенной в [9], с. 188-189, а с другой – с изменениями и некоторыми обобщениями, учитывающими, в частности, то обстоятельство, что только по элементу $u \in F$ выражения $Lu \in F^*$ и $\partial u \in (G_+)^*$ находятся неоднозначно. Этот факт следует из простых примеров (см. ниже п. 1.4.4), а также отмечается рядом авторов (см. [31], с. 117).

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства N и M соответственно и рассмотрим функционал

$$l_u(\eta_N) := (\eta_N, u)_F, \quad \eta_N = P_N\eta \in N, \quad u \in F. \tag{1.3.25}$$

С учетом (1.3.24) он преобразуется к виду

$$(\eta_N, u)_F = \langle \eta_N, Au \rangle_E = \langle P_N \eta_N, Au \rangle_E = \langle \eta_N, P_N^* Au \rangle_E =: \langle \eta_N, L_N u \rangle_E, \\ L_N u := P_N^* Au, \quad \forall u \in F. \tag{1.3.26}$$

Здесь $L_N : F \to N^*$ — линейный ограниченный оператор, так как $A : F \to F^*$ — ограниченный оператор, а $P_N^* : F^* \to N^* = AN$ — ограниченный проектор, действующий в F^*.

Из (1.3.26) приходим к формулам

$$(\eta_N, u_N)_F = \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E, \;\; \eta_N = P_N \eta, \quad u_N = P_N u, \;\; \eta, u \in F, \tag{1.3.27}$$

$$(\eta_N, u_M)_F = 0 = \langle \eta_N, L_N u_M \rangle_E, \quad u_M = P_M u, \quad u \in F. \tag{1.3.28}$$

Так как $\overline{N} = E$ (см. (1.3.4)), то из (1.3.28) получаем, что

$$L_N u_M = L_N P_M u = 0, \quad u \in F. \tag{1.3.29}$$

Введенный функционал $L_N u$ задан на подпространстве N. Расширим его определенным образом до функционала Lu, действующего на всем $F = N \oplus M$. Именно, далее будем считать, что

$$Lu = L_N u + L_M u, \quad L_N : F \to N^*, \quad L_M : F \to M^* := AM. \tag{1.3.30}$$

При этом потребуем (и это свойство соответствует многочисленным приложениям), чтобы

$$Lu_M = 0, \quad \forall u_M \in M. \tag{1.3.31}$$

Тогда в силу (1.3.29) и (1.3.30) должно выполняться свойство

$$L_M u_M = 0, \quad \forall u_M \in M. \tag{1.3.32}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Psi_u(\eta) := (\eta, u)_F - \langle \eta, L_N u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.3.33}$$

По построению (см. (1.3.26)) имеем свойство $\Psi_u(\eta_N) = 0$. Поэтому

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M), \quad \eta_M = P_M \eta \in M,$$

т.е. этот функционал принимает ненулевые значения на подпространстве M или, что равносильно, на G_+, так как между M и G_+ имеет место изометрический изоморфизм (см. (1.3.8)).

Поэтому $\Psi_u(\eta)$ можно представить либо в виде функционала на M, либо в виде функционала на G_+, либо в виде суммы функционалов на M и G_+ соответственно, причем в этом последнем случае между указанными функционалами будет определенная связь (вспомните теорему Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве!). Именно этот последний вариант, как будет видно из рассмотренного ниже классического примера, и возникает в приложениях. Отметим еще, что в краевых задачах математической физики элемент $f = Lu \in F^*$ может содержать составляющую (обобщенную функцию, распределение), сосредоточенную не только внутри области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, где изучается краевая задача, но и на границе $\Gamma = \partial\Omega$ этой области (см., например, [31], с. 117).

Реализуя эту идею в абстрактной форме, представим $\Psi_u(\eta)$ в виде

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M) := (\eta, u)_F - \langle \eta, L_N u\rangle_E = \langle \eta, L_M u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \eta, u \in F. \tag{1.3.34}$$

Здесь $L_M u \in M^* = AM$, а $\langle \eta, L_M u\rangle_E = \langle \eta_M, L_M u\rangle_E$ — функционал на подпространстве M, выраженный в виде полуторалинейной формы относительно $\eta_M \in M$ и $L_M u \in M^*$. Соответственно $\partial u \in (G_+)^*$, а $\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \langle \gamma_M \eta_M, \partial u\rangle_G$ — функционал на G_+, выраженный в виде формы относительно $\gamma\eta = \gamma_M\eta_M \in G_+$ и $\partial u \in (G_+)^*$.

Заметим, что в [9], с. 188, использовано только одно (правое) слагаемое в правой части (1.3.34); тогда Lu и ∂u находятся однозначно, хотя полученная там формула Грина не адекватна проблемам, возникающим в приложениях.

Отметим, что в приложениях конкретный вид выражения $L_M u$ определяется, исходя из заданного дифференциального выражения, отражающего исследуемый физический процесс, и соответствующей формулы Грина, отвечающей изучаемой задаче.

Из (1.3.34) при $\eta = \eta_M$, $u = u_M$ имеем тождество

$$(\eta_M, u_M)_F = \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M\rangle_G, \quad \eta_M, u_M \in M, \tag{1.3.35}$$

служащее определением функционала $\partial_M u_M \in (G_+)^*$, являющегося абстрактным аналогом производной по внешней нормали для элементов из подпространства M. Заметим, что это тождество уже было выведено ранее (см. (1.3.15)), причем

$$\partial_M = (T_M)^{-1} = (\gamma_M^{-1})^*.$$

При выводе (1.3.35) из (1.3.34) было учтено, что (см. (1.3.26), (1.3.32))

$$\langle \eta_M, L_N u_M \rangle_E = 0, \quad L_M u_M = 0.$$

При $\eta = \eta_M$, $u = u_N$ из (1.3.34) имеем соотношение

$$0 = \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G, \quad \forall \eta_M \in M, \quad \forall u_N \in N. \quad (1.3.36)$$

Именно оно и дает связь между функционалами $L_M u_N$ и $\partial_N u_N$, о которой говорилось выше. В частности, если функционал $L_M u_N \in M^*$ задан, то функционал $\partial_N u_N \in (G_+)^*$ определен однозначно.

Назовем $Lu := L_N u + L_M u$ (см. (1.3.30)) *абстрактным дифференциальным выражением.* С учетом (1.3.27), (1.3.32) будем иметь

$$Lu = L_N(u_N + u_M) + L_M(u_N + u_M) = L_N u_N + L_M u_N = L u_N \in F^*. \quad (1.3.37)$$

Соответственно функционал

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N, \quad \forall u = u_N + u_M \in N \oplus M = F \qquad (1.3.38)$$

назовем *абстрактной производной по внешней нормали* для любого элемента $u \in F$.

1.3.4 Основная теорема

Итак, если выполнены условия 1^0 – 3^0 п. 1.3.2, то по пространствам E, F и G с введенными на них скалярными произведениями и по оператору следа γ можно построить операторы L и ∂ – абстрактные дифференциальное выражение и оператор производной по внешней нормали. Эти построения позволяют установить следующий факт.

Теорема 1.3.1. *Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F и G (с введенными на них скалярными произведениями) и для оператора следа γ выполнены условия* (1.3.2)–(1.3.4). *Тогда существуют абстрактное дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ и абстрактная производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \qquad (1.3.39)$$

При этом ∂u по элементам $u \in F$ и $Lu \in F^*$ определяется однозначно.

Доказательство. Воспользуемся тождествами (1.3.27), (1.3.28) и (1.3.35), (1.3.36). Из них после сложения левых и правых частей приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
&(\eta, u)_F = (\eta_N, u_N)_F + (\eta_M, u_M)_F = \\
&= \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_G + \\
&+ [\langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G] = \\
&= \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M + \partial_N u_N \rangle_G + [\langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E] = \\
&= \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G + [\langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E].
\end{aligned} \tag{1.3.40}$$

Проверим теперь, что

$$\langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E = \langle \eta, Lu \rangle_E, \tag{1.3.41}$$

где Lu определено формулой (1.3.30). В самом деле, с учетом (1.3.37) имеем

$$\begin{aligned}
&\langle \eta, Lu \rangle_E = \langle \eta_N + \eta_M, L_N u_N + L_M u_N \rangle_E = \\
&= \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_N, L_M u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E = \\
&= \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E,
\end{aligned} \tag{1.3.42}$$

так как

$$\begin{aligned}
&\langle \eta_M, L_N u_N \rangle_E = \langle P_M \eta, P_N^* A u_N \rangle_E = \langle P_N P_M \eta, A u_N \rangle_E = 0, \\
&\langle \eta_N, L_M u_N \rangle_E = \langle \eta_N, P_M^* L_M u_N \rangle_E = \langle P_M P_N \eta, L_M u_N \rangle_E = 0.
\end{aligned}$$

(Здесь в последнем тождестве использовано свойство $L_M u_N = P_M^* L_M u_N \in M^*$.)

Из (1.3.40) и (1.3.41) следует формула Грина

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{1.3.43}$$

причем по построению

$$Lu \in F^*, \ \partial u \in (G_+)^*, \ Lu = L_N u_N + L_M u_N, \ \partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N. \tag{1.3.44}$$

Отметим еще раз, что если функционал $L_M u_N$ выбран, то функционал $\partial_N u_N$ определен однозначно. □

Замечание 1.3.1. *Из проведенного доказательства теоремы 1.3.1 следует, что для тройки пространств E, F, G и абстрактного оператора следа γ, удовлетворяющих условиям* (1.3.2) – (1.3.4), *существует не одна, а целое семейство формул Грина. Это семейство параметризуется, во-первых, выбором функционала $L_M u_N \in M^*$, а во-вторых, — произвольным числовым параметром α, вещественным либо комплексным. В самом деле, при выбранном $L_M u_N$ можно ввести семейство абстрактных дифференциальных выражений $L(\alpha)u$ по формуле*

$$L(\alpha)u := L_N u + \alpha L_M u = L_N u_N + \alpha L_M u_N, \tag{1.3.45}$$

а также отвечающее им семейство производных по нормали

$$\partial(\alpha)u := \partial_M u_M + \alpha\, \partial_N u_N, \tag{1.3.46}$$

и тогда получим семейство формул Грина вида

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, L(\alpha)u \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial(\alpha)u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.3.47}$$

При этом формула Грина (1.3.43) *отвечает значению $\alpha = 1$.* □

Замечание 1.3.2. *Отметим снова, что в приложениях дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ определено из физического смысла задачи, и тогда для него однозначно находятся $L_M u_N$ и константа α.* □

Следствием теоремы 1.3.1 является такое утверждение.

Теорема 1.3.2. (вторая формула Грина). *Если выполнены условия теоремы 1.3.1, то в случае вещественных гильбертовых пространств E, F и G справедлива формула*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E - \langle u, L\eta \rangle_E = \langle \gamma u, \partial\eta \rangle_G - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \eta, u \in F; \tag{1.3.48}$$

для комплексных пространств E, F и G соответственно имеем

$$\langle \eta, Lu \rangle_E - \overline{\langle u, L\eta \rangle}_E = \overline{\langle \gamma u, \partial\eta \rangle}_G - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \eta, u \in F. \tag{1.3.49}$$

□

1.4 Классический пример

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – произвольная ограниченная область с границей $\Gamma := \partial\Omega$.

Определение 1.4.1. *Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеет* ***липшицеву границу*** $\Gamma = \partial\Omega$, *если для каждой точки $\widetilde{O}$ границы существует такая ее окрестность и в ней такая ортогональная система координат $\widetilde{O}y_1, \ldots, y_m$, что уравнение части границы Γ, попадающей в эту окрестность, имеет вид $y_m = f(y_1, \ldots, y_{m-1})$, где f – функция, удовлетворяющая* ***условию Липшица*** *по переменным $y_1, \ldots, y_{m-1}$:*

$$|f(y_1, \ldots, y_{m-1}) - f(z_1, \ldots, z_{m-1})| \leqslant C\Big(\sum_{k=1}^{m-1} |y_k - z_k|^2\Big)^{1/2}.$$

□

Введем, как и выше, гильбертовы пространства $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ со стандартными скалярными произведениями (1.1.5), (1.1.3) соответственно. Как следует из п. 1.2.1, эти пространства образуют гильбертову пару пространств. Более того, по теореме вложения С.Л. Соболева (см. также ниже теорему 1.4.1), пространство $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)$, т.е. соответствующий оператор вложения компактен.

1.4.1 Порождающий оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$

Обозначим через A порождающий оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ и поставим своей целью выяснить его аналитическую природу, т.е. узнать, по какому закону он действует.

Сначала будем считать, что граница Γ области Ω достаточна гладкая, функции $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $\eta(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, и для них выполнено тождество (1.2.11), служащее определением оператора A гильбертовой пары $(F;\, E)$:

$$(\eta, u)_F = (\eta, Au)_E, \quad \eta \in F, \quad u \in \mathcal{D}\,(A) \subset F. \tag{1.4.1}$$

В рассматриваемом случае это тождество выглядит следующим образом:

$$\int\limits_\Omega (\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u)\, d\Omega = \int\limits_\Omega \eta(Au)\, d\Omega. \tag{1.4.2}$$

Используя обычную формулу Грина для оператора Лапласа

$\Delta = \sum\limits_{k=1}^{m} \partial^2/\partial x_k^2$, т.е. тождество

$$\int\limits_{\Omega} \eta(u - \Delta u)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} (\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u)\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma, \tag{1.4.3}$$

из (1.4.2) получаем

$$\int\limits_{\Omega} \eta(Au - u + \Delta u)\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma, \quad \forall \eta \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{1.4.4}$$

Считая в этом тождестве $\eta(x)$ произвольной *финитной* функцией, т.е. обращающейся в нуль в окрестности границы Γ, и учитывая плотность таких функций в пространстве $L_2(\Omega)$, приходим к выводу, что

$$Au := u - \Delta u. \tag{1.4.5}$$

Тогда из (1.4.4) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma = 0, \quad \forall \eta \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{1.4.6}$$

Однако совокупность следов $\{\eta(x)|_\Gamma\}$ множества функций из $C^1(\overline{\Omega})$ плотна в $L_2(\Gamma)$, потому из (1.4.6) получаем граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{1.4.7}$$

Таким образом, порождающий оператор A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ есть оператор краевой задачи Неймана (см. (1.2.67))

$$Au := u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{1.4.8}$$

Эта задача уже обсуждалась в п. 1.2.5 в случае, когда граница Γ достаточна гладкая. При $f(x) \in C(\overline{\Omega})$ она имеет классическое решение $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$. При $f(x) \in L_2(\Omega)$ ее решение $u(x) \in H^2(\Omega)$, т.е. пространству функций, у которых все вторые производные принадлежат $L_2(\Omega)$. Поэтому в этом случае

$$\mathcal{D}(A) := \Big\{ u(x) \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \Big\}. \tag{1.4.9}$$

Отметим еще, что формула Грина (1.4.3) справедлива и в случае, когда $\eta(x) \in H^1(\Omega)$, $u(x) \in H^2(\Omega)$; она получается предельным переходом из (1.4.3), поскольку $C^2(\overline{\Omega})$ плотно в $H^2(\Omega)$, а $C^1(\overline{\Omega})$ плотно в $H^1(\Omega)$.

Будем теперь считать, что граница Γ области Ω липшицева. Здесь далее будет весьма важен следующий факт.

Теорема 1.4.1. *(Реллих, Кондрашов) В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ имеет место компактное вложение*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega). \tag{1.4.10}$$

$\square$

Доказательство этого утверждения здесь не приводится, его можно найти, например, в [16], с. 47, см. также [32], с. 32.

Воспользуемся теоремой 1.4.1 в случае липшицевой $\Gamma = \partial\Omega$ и рассмотрим задачу (1.4.8) при $f = f(x) \in L_2(\Omega)$. Тогда ее обобщенное решение $u(x) \in H^1(\Omega)$ определяется из тождества (см. (1.2.63))

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = (\eta, f)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.4.11}$$

Согласно общим рассмотрениям п. 1.2.4 это обобщенное решение $u = A^{-1} f \in \mathcal{D}(A) \subset H^1(\Omega)$.

Далее, если $f(x) \in (H^1(\Omega))^*$, то задача (1.4.8) имеет (в области Ω с липшицевой границей Γ) слабое решение $u = A^{-1} f \in H^1(\Omega)$, определяемое из тождества вида (1.2.69), т.е.

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.4.12}$$

При этом, согласно теории шкал гильбертовых пространств (п. 1.2.3), оператор A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ на $(H^1(\Omega))^*$, а обратный оператор A^{-1} — из $(H^1(\Omega))^*$ на $H^1(\Omega)$. Наконец, сужение оператора A^{-1} на $L_2(\Omega)$ является положительным компактным (в силу компактности вложения (1.4.10)) оператором, действующим в $L_2(\Omega)$.

1.4.2 Теорема Гальярдо

Введем теперь для элементов η из $H^1(\Omega)$ оператор следа γ по закону

$$\gamma\eta := \eta|_{\Gamma}, \quad \Gamma = \partial\Omega, \quad \mathcal{D}(\gamma) = H^1(\Omega). \tag{1.4.13}$$

Оказывается, этот оператор ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ на гильбертово пространство функций, заданных на Γ и образующих множество, компактно вложенное в $L_2(\Gamma)$. Именно, здесь имеет место следующий важный результат (см. [17]).

Теорема 1.4.2. *(Гальярдо). Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеет липшицеву границу $\Gamma = \partial\Omega$. Введем на Γ гильбертово пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ с квадратом нормы*

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int\limits_{\Gamma} |\varphi|^2 \, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_x}\int\limits_{\Gamma_y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{m+1}} \, d\Gamma_x \, d\Gamma_y. \qquad (1.4.14)$$

Тогда оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$ и имеет место оценка

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \qquad (1.4.15)$$

Обратно, для любой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует функция $u \in H^1(\Omega)$ (определяемая не единственным образом по φ) такая, что

$$\gamma u = \varphi, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2 \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \qquad (1.4.16)$$

При этом пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$:

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma). \qquad (1.4.17)$$

$\square$

Замечание 1.4.1. Для области Ω с бесконечно дифференцируемой границей $\Gamma = \partial\Omega$ строят шкалу гильбертовых пространств $H^\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. При этом оказывается, что оператор следа γ действует ограниченно из $H^1(\Omega)$ на $H^\alpha(\Gamma)$ при $\alpha = 1/2$, а из любого $H^\beta(\Omega)$ он ограниченно действует на $H^{\beta-1/2}(\Gamma)$ (см., например, [8]). Если $\Gamma = \partial\Omega$ липшицева, то, согласно теореме Гальярдо, $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — ограниченный оператор. $\square$

Итак, γ ограниченно действует из $F = H^1(\Omega)$ на $G_+ = H^{1/2}(\Gamma)$, причем G_+ компактно вложено в $G = L_2(\Gamma)$.

1.4.3 Ортогональное разложение пространства $H^1(\Omega)$

Рассмотрим, согласно общей схеме п. 1.3.2, подпространство

$$N = \ker \gamma = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = u|_\Gamma = 0\} =: H^1_0(\Omega) \qquad (1.4.18)$$

и выясним, каким будет ортогональное дополнение M к $N = H_0^1(\Omega)$ в $H^1(\Omega) = F$.

Если $\eta \in H_0^1(\Omega)$, $u \in M$, то в силу ортогональности η и u имеем

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u)\, d\Omega = 0. \tag{1.4.19}$$

Предварительно сформулируем следующий общий факт (см., например, [33], с. 33, 199).

Лемма 1.4.1. *Пусть $F = N(\dot{+})M$ — прямое разложение пространства F на взаимно дополнительные подпространства и пусть $P_M : F \to M$ — (ограниченный) проектор на подпространство M (параллельно N), $P_N : I_F - P_M$ — аналогичный проектор на N. Тогда P_M^* и P_N^* — проекторы в пространстве $F^* = AF$, $P_M^* + P_N^* = I_{F^*}$, и имеют место свойства*

$$M^* := P_M^* F^* = \ker(I_{F^*} - P_M^*) = (\mathcal{R}(I - P_M))^{\langle\perp\rangle} = N^{\langle\perp\rangle} = AM, \tag{1.4.20}$$

$$N^* = (I_{F^*} - P_M^*)F^* = M^{\langle\perp\rangle} = AN. \tag{1.4.21}$$

Здесь $A : F \to F^*$ — оператор гильбертовой пары $(F; E)$, а символом $\langle\perp\rangle$ обозначено свойство ортогональности элементов $\eta \in F$ и $u \in F^*$, т.е. свойство $\langle \eta, u\rangle_E = 0$.

Доказательство. Оно достаточно простое.

Так как P_M — (ограниченный) проектор, то $P_M^2 = P_M$, поэтому $(P_M^*)^2 = P_M^*$ и P_M^* ограничен. Значит, P_M^* — тоже проектор, $P_M^* : F^* \to P_M^* F^* =: M^*$. Тогда $P_N^* := I_{F^*} - P_M^*$ — дополнительный проектор.

Пусть $u \in M^*$. Тогда $u = P_M^* u$, т.е. $u \in \ker(I_{F^*} - P_M^*)$. Далее, если $\eta \in N$, $u \in N^{\langle\perp\rangle}$, то

$$\langle \eta, u\rangle_E = 0 = \langle \eta, AA^{-1}u\rangle_E = (\eta, A^{-1}u)_F, \quad \forall u \in N^{\langle\perp\rangle}. \tag{1.4.22}$$

Отсюда следует, что $A^{-1}u \in M$, т.е. $u \in AM$. Значит, $N^{\langle\perp\rangle} = AM$. С другой стороны,

$$\begin{gathered}\langle \eta, u\rangle_E = \langle \eta, P_M^* u\rangle_E = \langle P_N\eta, P_M^* u\rangle_E = \langle P_M P_N \eta, u\rangle_E = 0, \\ \forall \eta \in N, \ \ \forall u \in M^*.\end{gathered} \tag{1.4.23}$$

Значит, $M^* = AM$, $M^* = N^{\langle\perp\rangle}$, и свойства (1.4.20) доказаны. Свойства (1.4.21) доказываются аналогично. $\square$

Как хорошо известно, для функций из $C^2(\Omega)$ имеет место формула

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u \in C(\Omega).$$

Далее, если $u \in H^1(\Omega)$, то $\nabla u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} \vec{e}_k$ принадлежит пространству вектор-функций $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\|\vec{v}\|^2_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} |\vec{v}|^2 \, d\Omega$$

и соответствующим скалярным произведением.

Лемма 1.4.2. *При любых* $\eta \in H_0^1(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$ *имеет место тождество*

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega} (\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u) \, d\Omega = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)}, \\ u - \Delta u \in (H_0^1(\Omega))^* \subset (H^1(\Omega))^*, \quad \Delta u := \operatorname{div} \nabla u. \end{gathered} \tag{1.4.24}$$

Доказательство. Покажем, что для любого элемента $\vec{v} = \nabla u \in \overrightarrow{L_2}(\Omega)$ определено понятие $\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \nabla u =: \Delta u$ как элемента пространства $(H_0^1(\Omega))^*$. В самом деле, выражение

$$l_u(\eta) := -\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \vec{v} \, d\Omega, \quad \eta \in H_0^1(\Omega), \tag{1.4.25}$$

из левой части (1.4.24) является линейным ограниченным функционалом на пространстве $H_0^1(\Omega)$, так как

$$|l_u(\eta)| = \Big| \int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \vec{v} \, d\Omega \Big| \leqslant \|\vec{v}\|_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} \cdot \|\nabla\eta\|_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} \leqslant \|\vec{v}\|_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} \cdot \|\eta\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Следовательно, этот функционал является элементом пространства $(H_0^1(\Omega))^*$.

Учитывая, что имеет место оснащение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (H_0^1(\Omega))^*, \tag{1.4.26}$$

обозначим элемент из $(H_0^1(\Omega))^*$, порождающий функционал (1.4.25) с помощью скалярного произведения в $L_2(\Omega)$, через

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \nabla u = \Delta u \in (H_0^1(\Omega))^*. \tag{1.4.27}$$

(Такое обозначение естественно, так как для гладких $\vec{v} = \nabla u$ это свойство имеет место.) Тогда из (1.4.25) получаем формулу

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = -\langle \eta, \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)}, \\ \eta \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega), \quad \Delta u \in (H_0^1(\Omega))^*.\end{gathered} \tag{1.4.28}$$

Отсюда с учетом равенства

$$\int\limits_{\Omega} \eta u \, d\Omega = (\eta, u)_{L_2(\Omega)} = \langle \eta, u \rangle_{L_2(\Omega)}, \ \ \forall \eta, u \in H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega),$$

приходим к формуле (1.4.24).

Заметим в заключение доказательства, что

$$u - \Delta u \in (H_0^1(\Omega))^* \subset (H^1(\Omega))^*, \ \ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.4.29}$$

Этот факт следует из леммы 1.4.1 применительно к пространствам $F = H^1(\Omega)$, $N = H_0^1(\Omega)$. В самом деле, $N = \ker\gamma = H_0^1(\Omega)$ — подпространство пространства $H^1(\Omega) = F$. Обозначим через $P_N : H^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ — ортопроектор на подпространство $H_0^1(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$. Тогда по лемме 1.4.1 P_N^* — (ограниченный) проектор в $(H^1(\Omega))^*$,

$$N^* = P_N^*(H^1(\Omega))^* = (H_0^1(\Omega))^* \subset (H^1(\Omega))^*, \tag{1.4.30}$$

и потому имеет место свойство (1.4.29). □

Замечание 1.4.2. Формула (1.4.24) следует также из определения обобщенных производных, т.е. тождества (1.4.28), рассматриваемого для финитных бесконечно дифференцируемых функций $\eta(x)$ и $u \in H^1(\Omega)$. Тогда выражение Δu понимают в смысле обобщенных функций (распределений). В лемме 1.4.2 установлено, что $\Delta u \in (H_0^1(\Omega))^* \subset (H^1(\Omega))^*$, т.е. конкретному классу так называемых обобщенных функций конечного порядка, см. [18]. □

Вернемся к тождеству (1.4.19) и учтем формулу (1.4.24), будем иметь соотношение

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = 0, \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \quad u \in M \subset H^1(\Omega). \tag{1.4.31}$$

Отсюда следует, что функционал, порожденный элементом $u - \Delta u \in (H_0^1(\Omega))^*$, обращается в нуль на подпространстве $H_0^1(\Omega)$, плотном в $L_2(\Omega)$. Поэтому для элементов из подпространства M, ортогонального подпространству $N = H_0^1(\Omega)$, выполнено свойство

$$u - \Delta u = 0, \quad \forall u \in M \subset H^1(\Omega). \qquad (1.4.32)$$

Отсюда, в свою очередь, получаем, что $\Delta u = u$, если $u \in M$.

Окончательно имеем

$$M =: H_h^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \Delta u = u\}. \qquad (1.4.33)$$

Далее для простоты будем называть $M = H_h^1(\Omega)$ *подпространством гармонических функций*. Таким образом, возникает ортогональное разложение

$$F = H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega) = N \oplus M, \qquad (1.4.34)$$

где $H_0^1(\Omega) = \ker\gamma$, а $H_h^1(\Omega)$ определено в (1.4.33).

1.4.4 Об обобщенной формуле Грина для оператора Лапласа

Проведем для рассматриваемого классического примера построения, которые выше были использованы при доказательстве общей теоремы 1.3.1.

При этом далее понадобится следующий факт (см., например, [31], с. 98, [34], с. 149): в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет место свойство

$$(H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma), \qquad (1.4.35)$$

т.е. $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$ — дуальные пространства, и имеет место оснащение

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*. \qquad (1.4.36)$$

Как и выше, обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства $N = H_0^1(\Omega)$ и $M = H_h^1(\Omega)$ соответственно (см. (1.4.34)), и рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} &l_u(\eta_N) := (\eta_N, u)_{H^1(\Omega)} = \\ &= \int_\Omega (\eta_N u + \nabla\eta_N \cdot \nabla u)\,d\Omega, \ \ \forall \eta_N = P_N\eta \in H_0^1(\Omega), \ u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \qquad (1.4.37)$$

С учетом определения (1.2.66) оператора A гильбертовой пары $(F;\,E)$ и формул (1.4.8), (1.4.24) для элементов из $H^1(\Omega)$ функционал (1.4.37) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}l_u(\eta_N) = (\eta_N, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta_N, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle P_N\eta_N, u-\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = \\ = \langle \eta_N, P_N^*(u-\Delta u)\rangle_{L_2(\Omega)} =: \langle \eta_N, L_N u\rangle_{L_2(\Omega)}, \\ \eta_N = P_N\eta \in H_0^1(\Omega),\ u\in H^1(\Omega).\end{gathered} \tag{1.4.38}$$

Так как $H_0^1(\Omega)$ плотно вложено в $L_2(\Omega)$ и имеет место оснащение (1.4.26), то из (1.4.38) следует, что

$$L_N u := P_N^*(u-\Delta u) \in N^* = (H_0^1(\Omega))^*, \tag{1.4.39}$$

а оператор $L_N \in \mathcal{L}(H^1(\Omega);(H_0^1(\Omega))^*)$. Здесь P_N^* — проектор в пространстве $(H^1(\Omega))^*$.

Из тождества (1.4.38) следуют соотношения

$$(\eta_N, u_N)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_{L_2(\Omega)},\ \forall \eta_N = P_N\eta,\ \forall u_N = P_N u \in H_0^1(\Omega), \tag{1.4.40}$$

$$(\eta_N, u_M)_{H^1(\Omega)} = 0 = \langle \eta_N, L_N u_M\rangle_{L_2(\Omega)},\ \forall \eta_N \in H_0^1(\Omega),\ \forall u_M \in H_h^1(\Omega). \tag{1.4.41}$$

Из (1.4.41) и (1.4.26), в частности, получаем, что

$$L_N u_M = P_N^*(u_M - \Delta u_M) = 0, \tag{1.4.42}$$

хотя этот факт очевиден также из (1.4.33).

Следуя далее общей схеме доказательства теоремы 1.3.1, рассмотрим функционал

$$\begin{gathered}\Psi_u(\eta) := (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \langle \eta, L_N u\rangle_{L_2(\Omega)} = \\ = \int_\Omega (\eta u + \nabla\eta\cdot\nabla u)\,d\Omega - \langle \eta, P_N^*(u-\Delta u)\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta, u \in H^1(\Omega).\end{gathered} \tag{1.4.43}$$

Так как по построению $\Psi_u(\eta_N) = 0$, то $\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M)$, $\eta_M = P_M\eta \in M = H_h^1(\Omega)$.

Напомним, что между элементами подпространства $M = H_h^1(\Omega)$ и элементами пространства $G_+ = H^{1/2}(\Gamma)$ имеется изоморфизм и даже изометрия, если в $H^{1/2}(\Gamma)$ ввести норму не по формуле (1.4.14), а в виде (см. (1.3.8))

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \|u\|_{H^1(\Omega)},\ \ \varphi = \gamma_M u = u|_\Gamma,\ \ u \in H_h^1(\Omega). \tag{1.4.44}$$

Учитывая эти обстоятельства, приходим (как и в теореме 1.3.1) к выводу, что функционал $\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M)$ можно выразить в виде $\langle \eta_M, L_M u\rangle_{L_2(\Omega)}$, где $L_M u \in (H_h^1(\Omega))^* = AH_h^1(\Omega)$, $L_M \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); (H_h^1(\Omega))^*)$ — произвольный оператор, либо в виде $\langle \gamma_M \eta_M, \partial u\rangle_{L_2(\Gamma)}$, $\partial u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ (см. (1.4.36)), либо в виде суммы таких функционалов, связанных между собой (см. (1.3.34)):

$$\begin{aligned} &\Psi_u(\eta) = \langle \eta_M, L_M u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma_M \eta_M, \partial u\rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ &\eta_M = P_M \eta \in H_h^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.4.45}$$

Замечая еще, что $\gamma_M \eta_M = \gamma u$, $\forall u \in H^1(\Omega)$, а также тот факт, что $L_M u = P_M^* L_M u$, правую часть в (1.4.45) можно переписать в виде

$$\Psi_u(\eta) = \langle \eta, L_M u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_{L_2(\Gamma)}, \ \ \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.4.46}$$

а тогда из (1.4.43), (1.4.46) следует тождество

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, Lu\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_{L_2(\Gamma)}, \ \ \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.4.47}$$

$$Lu := L_N u + L_M u = P_N^*(u - \Delta u) + L_M u, \quad u \in H^1(\Omega). \tag{1.4.48}$$

Потребуем, как и в общей схеме доказательства теоремы 1.3.1 (см. (1.3.31)), чтобы выполнялось условие

$$Lu_M = 0. \tag{1.4.49}$$

Тогда в силу (1.4.48), (1.4.42) получаем свойство

$$L_M u_M = 0, \quad \forall u_M = P_M u \in H_h^1(\Omega). \tag{1.4.50}$$

Из (1.4.47) либо (1.4.45), в частности, имеем при $u = u_M \in H_h^1(\Omega)$, $\eta = \eta_M \in H_h^1(\Omega)$ соотношение

$$\begin{aligned} &(\eta_M, u_M)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M\rangle_{L_2(\Gamma)} =: \\ &=: \langle \gamma_M \eta_M, \frac{\partial u_M}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \frac{\partial u_M}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma), \end{aligned} \tag{1.4.51}$$

которое служит определением производной по внешней нормали элемента u_M из подпространства $H_h^1(\Omega)$. Оно обобщает обычную формулу

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega (\eta_M u_M + \nabla\eta_M \cdot \nabla u_M) d\Omega = \int\limits_\Gamma \eta_M \frac{\partial u_M}{\partial n}\, d\Gamma, \\ &\eta_M \in H_h^1(\Omega), \ \ u_M \in H_h^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{aligned} \tag{1.4.52}$$

Отметим еще, что в (1.4.51) функционал $\left(\dfrac{\partial u_M}{\partial n}\right)\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ не зависит от того, какой функционал $L_M u$ выбран в (1.4.45), так как выполнено условие (1.4.50).

Возьмем теперь в (1.4.47) $\eta = \eta_M \in H_h^1(\Omega)$, $u = u_N \in H_0^1(\Omega)$. Тогда в силу ортогональности $H_h^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$, а также свойства (1.4.49), получаем

$$\begin{gathered} 0 = \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ \forall \eta_M \in H_h^1(\Omega), \ \ \forall u_N \in H_0^1(\Omega), \end{gathered} \tag{1.4.53}$$

$$\partial_N u_N := (\partial u)|_N \in (G_+)^*, \ \ L_M u_N \in M^*. \tag{1.4.54}$$

Здесь по аналогии с формулой

$$\begin{gathered} \int\limits_\Omega \eta_M (u_N - \Delta u_N) d\Omega + \int\limits_\Gamma \eta_M \frac{\partial u_N}{\partial n}\, d\Gamma = 0, \\ \forall \eta_M \in H_h^1(\Omega), \ \ \forall u_N \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \end{gathered} \tag{1.4.55}$$

функционал $\partial_N u_N$ можно назвать производной по внешней нормали для элемента $u_N \in H_0^1(\Omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} \partial u &= \partial_M u_M + \partial_N u_N = \\ &= \Big(\frac{\partial u_M}{\partial n} + \frac{\partial u_N}{\partial n}\Big)\Big|_\Gamma = \frac{\partial}{\partial n}\Big(u_N + u_M\Big)\Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma), \end{aligned} \tag{1.4.56}$$

т.е. ∂u есть производная по внешней нормали для произвольного элемента $u \in H^1(\Omega)$.

Тождество (1.4.53), как и в общих построениях в теореме 1.3.1, дает связь между функционалами $L_M u_N$ и $\partial_N u_N$, которая по необходимости должна выполняться. В частности, опираясь на (1.4.55), можно выбрать $L_M u_N$ в виде

$$L_M u_N := P_M^*(u_N - \Delta u_N), \ \ \forall u_N \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4.57}$$

(Напомним, что согласно лемме 1.4.2 элемент $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$, а P_M^* — проектор на подпространство $M^* = AM = (H^1(\Omega))^*$.) Тогда формула (1.4.47) примет вид

$$\begin{aligned} &(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \\ &= \langle \eta, P_N^*(u - \Delta u) + P_M^*(u - \Delta u) \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \ \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.4.58}$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 1.4.3. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, *и оператора следа* γ *(см.* (1.4.13)*) в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (1.4.59)$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\Big|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (1.4.60)$$

При этом $(\partial u/\partial n)_\Gamma$ *определяется по элементам* $u \in H^1(\Omega)$ и $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$ *однозначно.*

Доказательство. Оно следует из проведенных построений, формулы (1.4.57) и тождества (1.4.58), если заметить, что $P_N^* + P_M^* = I_{F^*}$ — единичный оператор в $(H^1(\Omega))^*$. □

Замечание 1.4.3. *Из* (1.4.59) *следует также "привычная" первая формула Грина для оператора Лапласа* Δ*:*

$$\langle \eta, -\Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \quad (1.4.61)$$

□

Замечание 1.4.4. *Отметим еще раз, как и в замечаниях 1.3.1 и 1.3.2, что из доказательства теоремы 1.3.1 можно установить существование не одной формулы Грина* (1.4.59)*, а целого семейства таких формул, т.е.*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, L(\alpha)u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial(\alpha)u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \ \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (1.4.62)$$

$$L(\alpha)u := P_N^*(u - \Delta u) + \alpha P_M^*(u - \Delta u) \in (H^1(\Omega))^*, \quad (1.4.63)$$

$$\partial(\alpha)u := \Big(\frac{\partial u_M}{\partial n}\Big)_\Gamma + \alpha\Big(\frac{\partial u_N}{\partial n}\Big)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (1.4.64)$$

где α *— произвольная константа. Однако в приложениях "дифференциальное выражение"* (1.4.63) *при* $\alpha \neq 1$ *не имеет физического смысла, а при* $\alpha = 1$ *получаем классическое дифференциальное выражение* $u - \Delta u$ *(или* $-\Delta u$ *в* (1.4.61)*), которое и используют в формуле Грина* (1.4.59) *при исследовании конкретных проблем.* □

1.5 Равномерно эллиптические уравнения и системы уравнений

Во многих задачах математической физики возникают краевые, начально-краевые либо спектральные проблемы не только для оператора Лапласа $-\Delta u$ или близкого к нему дифференциального выражения $u - \Delta u$, но и для общих дифференциальных выражений, которые обладают свойством эллиптичности либо равномерной эллиптичности. Кроме того, аналогичные проблемы появляются и для систем эллиптических уравнений. В данном параграфе приводятся классические формулы Грина и их обобщения на случай липшицевой границы области.

1.5.1 Обобщенная формула Грина для равномерно эллиптического оператора

Пусть снова $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, а $\partial\Omega =: \Gamma$ — сначала достаточно гладкая. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu := -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) + a_0(x)u, \tag{1.5.1}$$

определенное на функциях $u = u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$. Будем считать, что функции $a_{jk}(x)$ непрерывно дифференцируемы и обладают свойством симметрии

$$a_{jk}(x) = a_{kj}(x), \ \ x \in \Omega, \ \ j,k = \overline{1,m}; \tag{1.5.2}$$

Кроме того, полагаем, что $a_0(x) \in C(\overline{\Omega})$ и

$$a_0(x) \geqslant a_0 > 0, \ \ x \in \Omega. \tag{1.5.3}$$

Наконец, будем считать, что выполнено также условие

$$\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqslant c\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^2, \ \ c > 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.5.4}$$

которое называют *условием равномерной эллиптичности.*

Упражнение 1.5.1. Докажите, что что для произвольных $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ и $\eta(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ имеет место классическая формула Грина для эллиптического оператора (1.5.1):

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \eta\Big(- \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) + a_0(x)u\Big) d\Omega = \\
&= \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + a_0(x)\eta u\Big) d\Omega - \\
&- \int\limits_{\Gamma} \eta\Big(\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_j})\Big) d\Gamma.
\end{aligned}
\tag{1.5.5}
$$

□

В формуле (1.5.5) выражение

$$
\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_j}) \tag{1.5.6}
$$

называют производной по конормали, отвечающей дифференциальному выражению (1.5.1).

Введем, как и выше, гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ с обычными скалярными произведениями, а также пространство $H^1_{eq}(\Omega)$ с квадратом нормы

$$
\|u\|^2_{H^1_{eq}(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x)|u|^2\Big] d\Omega. \tag{1.5.7}
$$

Упражнение 1.5.2. Доказать, опираясь на свойства (1.5.2) – (1.5.4), что норма (1.5.7) эквивалентна стандартной норме пространства $H^1(\Omega)$, т.е. норме

$$
\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \Big(|\nabla u|^2 + |u|^2\Big) d\Omega. \tag{1.5.8}
$$

□

В терминах введенных скалярных произведений и норм формулу Грина (1.5.5) можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
&(\eta, Lu)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_{eq}(\Omega)} - \Big(\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)_{L_2(\Gamma)}, \\
&\eta \in C^1(\overline{\Omega}), \;\; u \in C^2(\overline{\Omega}), \;\; \gamma\eta := \eta|_{\Gamma}.
\end{aligned}
\tag{1.5.9}
$$

Будем теперь считать, что $\partial\Omega$ — липшицева, и заметим, что для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1_{eq}(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, а также для оператора следа γ выполнены общие условия 1°– 3° существования абстрактной формулы Грина (см. п.1.3.2, теорему 1.3.1, теорему 1.4.3). В самом деле, так как нормы в $H^1(\Omega)$ и $H^1_{eq}(\Omega)$ эквивалентны (упражнение 1.5.2), то $F := H^1_{eq}(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega) =: E$ (условие 1°, теорема Реллиха–Кондрашова, см. теорему 1.4.1). Далее, по теореме Гальярдо 1.4.2 получаем, что оператор следа γ ограниченно действует из $H^1_{eq}(\Omega) = H^1(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$, компактно вложенное в $L_2(\Gamma)$. Значит, имеет место обобщенная формула Грина для дифференциального выражения Lu, записанная в терминах функционалов для элементов из $H^1_{eq}(\Omega)$.

Упражнение 1.5.3. Убедиться, что справедлива следующая обобщенная формула Грина (в области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$) для равномерно эллиптического оператора (1.5.1):

$$\begin{gathered}\langle \eta, Lu\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_{eq}(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial\nu}\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1_{eq}(\Omega), \\ Lu \in (H^1_{eq}(\Omega))^*, \ \ \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \ \ \frac{\partial u}{\partial\nu} \in (H^{1/2}(\Gamma))^*. \end{gathered} \tag{1.5.10}$$

□

Формула (1.5.10) будет использоваться далее для исследования краевых и спектральных задач в областях с негладкой границей.

Замечание 1.5.1. *Если выполнены условия*

$$a_{jk}(x) \equiv \delta_{jk}, \quad a_0(x) \equiv 1, \tag{1.5.11}$$

то дифференциальное выражение Lu *переходит в выражение* $u - \Delta u$, *производная по конормали* $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}$ *из* (1.5.6) *переходит в выражение* $\dfrac{\partial u}{\partial n}$. *При этом норма в* $H^1_{eq}(\Omega)$ *становится равной норме пространства* $H^1(\Omega)$, *а формула Грина* (1.5.10) *переходит в формулу* (1.4.59) *(см. теорему 1.4.3).* □

1.5.2 Обобщенная формула Грина для системы линейных эллиптических уравнений

Если изучается краевая либо спектральная задача об отыскании не одной функции $u = u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, а системы функций, которую удобно считать искомым вектор-столбцом

$$u(x) := (u_1(x);\, \dots\, ;\, u_n(x))^\tau, \quad x \in \Omega, \tag{1.5.12}$$

где символом $(\,\cdot\,;\, \dots\, ;\, \cdot\,)^\tau$ обозначена операция транспонирования (в данном случае вектор-столбца), то возникает не одно дифференциальное выражение вида (1.5.1), а система дифференциальных выражений

$$L_a u := -\sum_{j,k=1}^{m} \partial_j \Big[a_{jk}(x) \partial_k u(x) \Big] + a_0(x) u(x), \quad \partial_j := \partial / \partial x_j. \tag{1.5.13}$$

Здесь $a_{jk}(x)$ — матрицы, подчиненные условиям симметрии (в комплексных пространствах):

$$a_{jk}^*(x) = a_{jk}(x) \iff a_{jk}^{rs}(x) = \overline{a_{kj}^{sr}(x)}, \quad r, s = \overline{1, n}\,, \tag{1.5.14}$$

а матрица $a_0(x)$ — эрмитова и положительно определенная, т.е.

$$a_0^*(x) = a_0(x) \gg 0. \tag{1.5.15}$$

Введем производную по конормали, отвечающую дифференциальному выражению (1.5.13):

$$\partial_{\nu_a} u(x) := \sum_{j,k=1}^{m} n_j(x) a_{jk}(x) \partial_k u(x), \tag{1.5.16}$$

где

$$n = (n_1(x);\, \dots\, ;\, n_m(x))^\tau, \tag{1.5.17}$$

— единичный вектор внешней нормали к $\Gamma = \partial\Omega$.

Далее будем считать, что выполнены следующие свойства:

1°. Матрица

$$a(x, \xi) := \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| = 1, \tag{1.5.18}$$

называемая *главным символом* дифференциального выражения (1.5.13), является положительно определенной равномерно по $x \in \overline{\Omega}$, т.е. выражение $L_a u$ *сильно эллиптично.* (Как указано в [35], с. 11, из условия (1.5.18), т.е. свойства 1°, следует *свойство эллиптичности*

$\det a(x,\xi) \neq 0$ и выполнение так называемого условия Шапиро–Лопатинского.)

2°. Имеет место неравенство

$$\sum a_{jk}^{rs} \xi_j^r \overline{\xi_k^s} \geqslant c \sum |\xi_j^r|^2, \quad x \in \Gamma, \quad \xi_j^r \in \mathbb{C}, \quad c > 0. \tag{1.5.19}$$

Тогда, как установлено в [35], имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|u\|_F^2 &:= \int_\Omega E(u,u)\, d\Omega + \int_\Omega (a_0(x)u) \cdot \overline{u}\, d\Omega \geqslant \\ &\geqslant c\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := c\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{1.5.20}$$

$$E(u,u) := \sum a_{jk}^{rs} \partial_j u^r \partial_k \overline{u^s}. \tag{1.5.21}$$

Упражнение 1.5.4. Доказать, что для вектор-функций $\eta(x) := (\eta_1(x); \dots ; \eta_n(x))^\tau \in C^1(\overline{\Omega})$ и $u(x) := (u_1(x); \dots ; u_n(x))^\tau \in C^2(\overline{\Omega})$ в области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ имеет место следующая формула Грина:

$$(\eta, L_a u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H_a^1(\Omega)} - (\gamma\eta, \partial_{\nu_a} u)_{L_2(\Gamma)}, \tag{1.5.22}$$

где

$$L_2(\Omega) := \{u := (u_1; \dots ; u_n)^\tau : \|u\|^2_{L_2(\Omega)} := \sum_{r=1}^n \int_\Omega |u_r|^2_{L_2(\Omega)} < \infty\},$$

$$L_2(\Gamma) := \{\varphi := (\varphi_1; \dots ; \varphi_n)^\tau : \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} := \sum_{r=1}^n \int_\Gamma |\varphi_r|^2_{L_2(\Gamma)} < \infty\},$$

норма в пространстве F определена правой частью (1.5.20), а γ — оператор следа для вектор-функции:

$$\gamma u := (\gamma u_1; \dots ; \gamma u_n)^\tau. \tag{1.5.23}$$

$\square$

Можно проверить, опираясь на неравенство (1.5.20), что нормы в пространстве F и пространстве вектор-функций $H^1(\Omega)$ (см. правую часть (1.5.20)) эквивалентны.

Упражнение 1.5.5. Доказать эквивалентность норм в пространствах F и $H^1(\Omega)$ и на этой основе установить, опираясь на теоремы 1.3.1, 1.4.3, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет место формула Грина

$$\begin{aligned}&\langle \eta, L_a u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial_{\nu_a} u\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in F,\\ &L_a u \in F^*, \quad \partial_{\nu_a} u \in (H^{1/2}(\Gamma))^*,\end{aligned} \tag{1.5.24}$$

обобщающая формулу (1.5.22). □

1.6 Обобщенные формулы Грина линейной теории упругости и гидродинамики

Построения, проведенные выше в параграфе 1.5, можно применить также для получения обобщений классических формул Грина линейной теории упругости и гидродинамики вязкой жидкости (см. формулы (1.1.18), (1.1.21), (1.1.23)).

1.6.1 Формула Грина линейной теории упругости

Напомним (см. п.1.1.4 и п.п.7° п.1.2.2), что в линейной теории упругости основным дифференциальным выражением для поля $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, т.е. поля перемещений сплошной упругой среды, является выражение (1.1.11):

$$L\vec{u} := \vec{u} - [\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\vec{u}], \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \tag{1.6.1}$$

а классическая формула Грина, отвечающая выражению (1.6.1) в области Ω с гладкой границей, имеет вид (1.1.18):

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \vec{\eta}\cdot(L\vec{u})\,d\Omega = \mu\, E(\vec{\eta},\vec{u}) + \lambda\int_\Omega (\mathrm{div}\vec{\eta})(\mathrm{div}\vec{u})\,d\Omega + \int_\Omega \vec{\eta}\cdot\vec{u}\,d\Omega -\\ &-\int_\Gamma (\gamma\vec{\eta})\cdot(P\vec{u})\,d\Gamma, \;\; \vec{\eta} \in \vec{C}^1(\overline{\Omega}), \;\; \vec{u} \in \vec{C}^2(\overline{\Omega}),\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

$$E(\vec{\eta},\vec{u}) := \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} \tau_{jk}(\vec{\eta})\tau_{jk}(\vec{u})\,d\Omega, \quad \tau_{jk}(\vec{u}) := \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \tag{1.6.3}$$

$$P\vec{u} := \sum_{j,k=1}^{3} (\mu\tau_{jk}(\vec{u}) + \lambda\,\mathrm{div}\vec{u}\,\delta_{jk})\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_j})\vec{e}_j, \tag{1.6.4}$$

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{3} u_j\vec{e}_j, \quad \gamma\vec{\eta} := \sum_{j=1}^{3}(\gamma u_j)\vec{e}_j = \vec{\eta}|_{\Gamma}. \tag{1.6.5}$$

Введем, как и в п.1.2.2 (п.п.5°, 7°), пространство вектор-функций $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$ с нормой (1.2.24), а также пространство $\vec{H}^1_{eq}(\Omega)$ с нормой вида (1.2.36):

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_{eq}(\Omega)} := \mu E(\vec{u},\vec{u}) + \lambda\int_{\Omega} |\mathrm{div}\,\vec{u}|^2\,d\Omega + \int_{\Omega} |\vec{u}|^2\,d\Omega. \tag{1.6.6}$$

Упражнение 1.6.1. Опираясь на второе неравенство Корна (1.2.37) и определение стандартной нормы (1.2.25) в пространстве $\vec{H}^1(\Omega)$, доказать, что нормы в пространствах $\vec{H}^1_{eq}(\Omega)$ (см. (1.6.6)) и $\vec{H}^1(\Omega)$ эквивалентны. □

Рассмотрим теперь (см. п.1.2.2, п.п. 7°) подпространство $\vec{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)$ тех элементов из $\vec{H}^1_{eq}(\Omega)$, для которых выполнено условие (1.2.38):

$$\vec{H}^1_{eq}(\Omega) \cap \vec{R}_{\vec{a},\vec{\delta}} = \{\vec{0}\}, \tag{1.6.7}$$

где $\vec{R}_{\vec{a},\vec{\delta}}$ — подпространство из $\vec{H}^1_{eq}(\Omega)$, описывающее жесткие перемещения (сдвиги и вращения) сплошной среды:

$$\vec{\eta} := \vec{a} + \vec{\delta}\times\vec{r}, \;\; \vec{a},\vec{\delta}\in\mathbb{R}^3, \;\; \vec{r} = \sum_{k=1}^{3} x_k\vec{e}_k. \tag{1.6.8}$$

Упражнение 1.6.2. Опираясь на другую форму второго неравенство Корна, т.е. на неравенство (1.2.41), доказать, что на множестве $\vec{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)$ можно ввести норму по закону

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)} := \mu E(\vec{u},\vec{u}) + \lambda\int_{\Omega} |\mathrm{div}\vec{u}|^2\,d\Omega, \tag{1.6.9}$$

и эта норма эквивалентна норме (1.2.25) пространства $\vec{H}^1(\Omega)$. □

Утверждения упражнений 1.6.1 и 1.6.2 показывают, что справедливы следующие две обобщенные формулы Грина линейной теории упругости:

$$\langle \vec{\eta}, L\vec{u} \rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = (\vec{\eta}, \vec{u})_{\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega)} - \langle \gamma\vec{\eta}, P\vec{u} \rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta}, \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega), \quad (1.6.10)$$

$$\langle \vec{\eta}, L_0\vec{u} \rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = (\vec{\eta}, \vec{u})_{\overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)} - \langle \gamma\vec{\eta}, P\vec{u} \rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta}, \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega), \quad (1.6.11)$$

$$L_0\vec{u} := L\vec{u} - \vec{u} \in (\overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega))^*, \quad P\vec{u} \in (\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma))^*. \quad (1.6.12)$$

В самом деле, формула (1.6.10) следует из абстрактной теоремы 1.3.1, примененной для пространств $E = \overrightarrow{L_2}(\Omega)$, $F = \overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega)$, $G = \overrightarrow{L_2}(\Gamma)$ и векторного оператора следа γ (см. (1.6.5)), а также из эквивалентности норм в $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ (упражнение 1.6.1) и теоремы Гальярдо 1.4.2.

Аналогично, формула (1.6.11) следует из теоремы 1.3.1, если $E = \overrightarrow{L_2}(\Omega)$, $F = \overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega) \supset \overrightarrow{H}^1_0(\Omega)$, $G = \overrightarrow{L_2}(\Gamma)$ и того же оператора следа. При этом использован тот факт, что $\overrightarrow{H}^1_0(\Omega)$ плотно в $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$, а норма в $\overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)$ эквивалентна норме $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ (упражнение 1.6.2).

Отметим еще, что $\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma)$ — это пространство вектор-функций, заданных на Γ и имеющих проекции на оси координат, являющиеся функциями (элементами) из $H^{1/2}(\Gamma)$.

1.6.2 Формула Грина линейной гидродинамики вязкой жидкости

Из выведенных выше формул (1.6.10) – (1.6.12), в частности, получаем соответствующие обобщенные формулы Грина гидродинамики вязкой сжимаемой либо несжимаемой жидкости.

Если $\vec{u} = \vec{u}(x)$ — поле скоростей в вязкой жидкости, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\Gamma = \partial\Omega$ — липшицева, то, используя классическую формулу (1.1.20), т.е. тождество

$$\begin{aligned} &(\vec{\eta}, \nabla p)_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = -(\operatorname{div}\vec{\eta}, p)_{L_2(\Omega)} - (\gamma_n\vec{\eta}, \gamma p)_{L_2(\Gamma)}, \\ &\forall \vec{\eta} \in \overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega), \ \ \nabla p \in \overrightarrow{L_2}(\Omega), \ \ \gamma_n\vec{\eta} := (\vec{\eta}\cdot\vec{n})_\Gamma, \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

приходим из (1.6.10) к обобщенной формуле Грина гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} &\langle\vec{\eta}, -[\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\vec{u}] + \nabla p\rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = \\ &= \mu E(\vec{\eta},\vec{u}) + (\mathrm{div}\,\vec{\eta}, (\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u} - p))_{L_2(\Omega)} - \\ &- \langle\gamma\vec{\eta}, P\vec{u}\rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Gamma)} + (\gamma_n\vec{\eta}, \gamma p)_{L_2(\Gamma)}, \quad \vec{\eta},\vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega),\ \ \nabla p \in \overrightarrow{L_2}(\Omega). \end{aligned} \tag{1.6.14}$$

(Здесь слагаемые $\langle\vec{\eta},\vec{u}\rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = (\vec{\eta},\vec{u})_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)}$ слева и справа в (1.6.10) взаимно уничтожены.)

Напомним (см. (1.1.22)), что выражение $P\vec{u}$ определено в (1.6.4), а тогда

$$\sigma_{jk}(\vec{u},p) := \mu\tau_{jk}(\vec{u}) + (\lambda\,\mathrm{div}\vec{u} - p)\delta_{jk}, \quad j,k = \overline{1,3}, \tag{1.6.15}$$

представляет собой тензор напряжений в вязкой жидкости. Поэтому последние два слагаемых справа в (1.6.14) можно переписать в виде

$$-\langle\gamma\vec{\eta}, P\vec{u}\rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Gamma)} + (\gamma_n\vec{\eta}, \gamma p)_{L_2(\Gamma)} = -\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma\vec{\eta}_j, \sum_{k=1}^{3}\sigma_{jk}(\vec{u},p)n_k\rangle_{L_2(\Gamma)}, \tag{1.6.16}$$

где

$$\vec{n} = \sum_{k=1}^{3} n_k\vec{e}_k = \sum_{k=1}^{3}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_k})\vec{e}_k$$

—вектор внешней нормали к Γ.

Если жидкость несжимаемая, то поле скоростей $\vec{u} = \vec{u}(x)$ соленоидально, $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$, и из (1.6.14) – (1.6.16) приходим к обобщенной формуле Грина гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} &\langle\vec{\eta}, (-\mu\Delta\vec{u} + \nabla p)\rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = \mu E(\vec{\eta},\vec{u}) - \\ &- \sum_{j=1}^{3}(\gamma_n\eta_j, \sum_{k=1}^{3}(\mu\tau_{jk}(\vec{u}) - p\,\delta_{jk})n_k\rangle_{L_2(\Gamma)}, \end{aligned} \tag{1.6.17}$$

$$\vec{\eta},\vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega), \quad \nabla p \in \overrightarrow{L_2}(\Omega), \quad \mathrm{div}\,\vec{\eta} = \mathrm{div}\,\vec{u} = 0. \tag{1.6.18}$$

Здесь $\partial\Omega$ — липшицева, причем

$$-\mu\Delta\vec{u} \in (\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega))^*, \quad \sum_{k=1}^{3}\mu\tau_{jk}(\vec{u})n_k \in (H^{1/2}(\Gamma))^*, \tag{1.6.19}$$

а норма в $\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega)$ определяется формулой, следующей из (1.6.6):

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega)} = \mu E(\vec{u}, \vec{u}) + \int\limits_{\Omega} |\vec{u}|^2 \, d\Omega \quad (\operatorname{div} \vec{u} = 0). \tag{1.6.20}$$

Аналогичные рассуждения для элементов из $\overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)$, которые являются соленоидальными полями в Ω, приводят снова к формуле (1.6.17), причем теперь

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)} = \mu E(\vec{u}, \vec{u}) \quad (\operatorname{div} \vec{u} = 0). \tag{1.6.21}$$

Если, в частности, для элементов из $\overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)$ выполнено граничное условие $\vec{u} = \vec{0}$ на части S границы $\partial\Omega$ и $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ в Ω, то возникает подпространство $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ (см. конец п.1.2.2), которое является основным в задаче о малых движениях вязкой несжимаемой жидкости в неподвижном сосуде. Тогда для элементов этого подпространства справедлива обобщенная формула Грина вида

$$\begin{aligned} &\langle \vec{\eta}, (-\mu\Delta\vec{u} + \nabla p)\rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = \mu E(\vec{\eta}, \vec{u}) - \\ &- \sum_{j=1}^{3} \langle \gamma_\Gamma \eta_j, \sum_{k=1}^{3} (\mu\tau_{jk}(\vec{u}) - p\,\delta_{jk}) n_k \rangle_{L_2(\partial\Omega \setminus S)}, \end{aligned} \tag{1.6.22}$$

$$\vec{\eta}, \vec{u} \in \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \nabla p \in \overrightarrow{L_2}(\Omega). \tag{1.6.23}$$

Упражнение 1.6.3. Докажите утверждения, сформулированные в последнем абзаце. □

Глава 2

Абстрактные краевые задачи

Наличие абстрактной формулы Грина (1.3.39) главы 1 для произвольной тройки гильбертовых пространств E, F, G и оператора следа γ, удовлетворяющих условиям 1^0 – 3^0 п. 1.3.2, позволяет изучать абстрактные краевые задачи, аналогичные классическим задачам Дирихле, Неймана либо Ньютона для уравнения Лапласа либо Пуассона, для общих эллиптических уравнений и систем, а также при граничных условиях других видов. Кроме того, этот общий подход применим также для соответствующих краевых задач в линейных проблемах гидродинамики, теории упругости и в других задачах математической физики.

2.1 Вспомогательные краевые задачи С.Г. Крейна

Рассматриваемые здесь проблемы являются обобщением на абстрактный случай вспомогательных линейных краевых задач и их операторов, которые широко использовались С.Г. Крейном и его учениками при изучении малых движений и нормальных колебаний тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде. Такой подход оказался плодотворным при исследовании многих линейных проблем математической физики, что и побуждает изучить его в общей ситуации.

Отметим также, что изучаемые здесь проблемы формулируются относительно абстрактной формулы Грина с уже выбранным однозначно дифференциальным выражением $Lu \in F^*$; это обстоятельство даже в "гладких" классических задачах было отмечено ранее, например, в монографии [8], с. 237.

2.1.1 Первая вспомогательная задача С.Г. Крейна

Будем считать, что для тройки пространств E, F, G и оператора следа γ справедлива абстрактная формула Грина

$$\begin{gathered}\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \\ Lu \in F^*, \quad \partial u \in (G_+)^*.\end{gathered} \tag{2.1.1}$$

Рассмотрим сначала абстрактную краевую задачу для уравнения Пуассона с однородным краевым условием Неймана:

$$Lv = f, \quad \partial v = 0. \tag{2.1.2}$$

Из (2.1.1) следует, что для решения v задачи (2.1.2) выполнено тождество

$$\langle \eta, f\rangle_E = (\eta, u)_F, \quad \forall \eta \in F, \tag{2.1.3}$$

служащее определением слабого решения этой задачи.

Лемма 2.1.1. *Задача* (2.1.2) *имеет единственное решение* $v \in F$ *тогда и только тогда, когда*

$$f \in F^*. \tag{2.1.4}$$

Это решение выражается формулой

$$v = A^{-1} f, \tag{2.1.5}$$

где $A : F \to F^*$ *– порождающий оператор гильбертовой пары* $(F; E)$*. Если* $f \in E \subset F^*$*, то формулой* (2.1.5) *дается обобщенное решение задачи* (2.1.2)*; при этом* $v \in \mathcal{D}(A) = E^1 \subset F = \mathcal{D}\big(A^{1/2}\big) \subset E$, $\mathcal{R}(A) = E$.

Доказательство. При любом $\eta \in F$ левая часть (2.1.3) представляет собой линейный ограниченный функционал $l_f(\eta)$ в пространстве F тогда и только тогда, когда $f \in F^*$, т.е. выполнено условие (2.1.4). В этом случае по теореме Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве для любого $f \in F^*$ найдется единственный элемент $v \in F$ такой, что $l_f(\eta) = (\eta, v)_F$, т.е. выполнено тождество (2.1.3).

Докажем теперь остальные утверждения леммы. Напомним, что согласно рассмотрениям пп. 1.2.1, 1.2.3, 1.2.4 имеют место формулы

$$(\eta, u)_F = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}u)_E = \langle \eta, Au \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{2.1.6}$$

где A – оператор гильбертовой пары $(F; E)$, $\mathcal{D}(A) = F$, $\mathcal{R}(A) = F^*$. Поэтому из (2.1.3) имеем

$$\langle \eta, f \rangle_E = (\eta, v)_F = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}v)_E = \langle \eta, Av \rangle_E, \quad \forall \eta \in F, \tag{2.1.7}$$

откуда следует, что

$$\langle \eta, f - Av \rangle_E = 0, \quad \forall \eta \in F.$$

Так как здесь η пробегает все F, то $(f - Av)$ – нулевой функционал из F^*, и тогда

$$Av = f, \tag{2.1.8}$$

откуда следует формула (2.1.5).

Далее, если $f \in E \subset F^*$, то формула (2.1.3) принимает вид

$$(\eta, f)_E = (\eta, v)_F \tag{2.1.9}$$

и потому, согласно рассмотрениям п. 1.2.4, в этом случае задача (2.1.8) имеет единственное обобщенное решение

$$v = A^{-1}f \in \mathcal{D}\left(A\right) = E^1 \subset \ E^{1/2} = F = \mathcal{D}\left(A^{1/2}\right) \subset E$$

. □

Следствие 2.1.1. *Абстрактная краевая задача* (2.1.2) *равносильна задаче* (2.1.8) *при* $f \in F^*$. *Отсюда следует, что оператор* A *гильбертовой пары* $(F; E)$ *имеет область определения* $\mathcal{D}\left(A\right)$, *которая в терминах абстрактного дифференциального выражения* Lu *и абстрактной производной по внешней нормали* ∂u *может быть выражена следующим образом:*

$$\mathcal{D}\left(A\right) = \{u \in F : Lu \in E, \quad \partial u = 0.\} \tag{2.1.10}$$

При этом, очевидно, $\mathcal{R}\left(A\right){=}E$. □

2.1.2 Вторая вспомогательная задача С.Г. Крейна

Рассмотрим теперь задачу для однородного уравнения (абстрактный аналог уравнения Лапласа) и неоднородного условия Неймана:

$$Lw = 0, \quad \partial w = \psi. \tag{2.1.11}$$

Из формулы Грина (2.1.1) получаем, что для решений задачи (2.1.11) выполнено тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in F; \tag{2.1.12}$$

это тождество и служит определением слабого решения.

Лемма 2.1.2. *Задача* (2.1.11) *имеет единственное слабое решение* $w \in M \subset F$ *тогда и только тогда, когда*

$$\psi \in (G_+)^*. \tag{2.1.13}$$

Это решение дается формулой

$$w = T_M \psi, \tag{2.1.14}$$

где

$$T_M = (\partial_M)^{-1} : (G_+)^* \to M \tag{2.1.15}$$

– оператор, сопряженный к $\gamma_M := \gamma|_M : M \to G_+$.

Доказательство. Напомним сначала, что оператор T_M появился в п. 1.3.2 в процессе построений, связанных с выводом абстрактной формулы Грина. Заметим еще, что согласно формуле (1.3.11) главы 1 имеет место неравенство

$$\|\varphi\|_{G_+} = \min_{\gamma u = \varphi} \|u\|_F \leqslant \|u\|_F \quad \text{при } \gamma u = \varphi, \quad \forall u \in F. \tag{2.1.16}$$

Поэтому при любом $\eta \in F$ правая часть в (2.1.12) является линейным ограниченным функционалом $l_\psi(\eta)$ в пространстве F тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.1.13). В самом деле,

$$|\langle \gamma\eta, \psi \rangle_G| \leqslant \|\gamma\eta\|_{G_+} \cdot \|\psi\|_{(G_+)^*} \leqslant \|\psi\|_{(G_+)^*} \cdot \|\eta\|_F,$$

и потому $l_\psi(\eta) := \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G$ – линейный ограниченный функционал в F. Обратно, если $\langle \gamma\eta, \psi \rangle_G$ – линейный ограниченный функционал относительно $\eta \in F$, то совокупность элементов $\{\gamma\eta\} = \{\gamma_M \eta_M\}$

пробегает все G_+, когда η пробегает все F. Поэтому элемент ψ, представляющий функционал $\langle \gamma\eta, \psi \rangle_G$, должен принадлежать $(G_+)^*$.

Итак, поскольку $\langle \gamma\eta, \psi \rangle_G$ – линейный ограниченный функционал в пространстве F, то по теореме Ф. Рисса существует единственный элемент $w \in F$ такой, что справедливо тождество (2.1.12).

Положим в этом тождестве $\eta \in N$. Тогда $\gamma\eta = 0$ и $(\eta, w)_F = 0, \forall \eta \in N$. Отсюда в силу ортогонального разложения $F = N \oplus M$ получаем, что $w \in M$.

Положим теперь в (2.1.12) $\eta \in M$. Тогда будем иметь тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in M, \quad w \in M. \tag{2.1.17}$$

Отсюда и из определения оператора T_M (см. п. 1.3.2, формулу (1.3.14)) получаем, что $T_M = (\gamma_M)^*$ и справедливы формулы (2.1.14), (2.1.15).

□

2.1.3 Неоднородная задача Неймана для уравнения Пуассона

Используя результаты рассмотрения двух вспомогательных задач С.Г. Крейна, т.е. задач (2.1.2) и (2.1.11), теперь легко выяснить вопрос о разрешимости абстрактной неоднородной задачи для уравнения Пуассона при неоднородном краевом условии Неймана:

$$Lu = f, \quad \gamma u = \psi. \tag{2.1.18}$$

Для решений этой задачи из формулы Грина (2.1.1) следует тождество

$$(\eta, f)_E + \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G = (\eta, u)_F, \quad \forall \eta \in F. \tag{2.1.19}$$

Оно и служит определением слабого решения задачи (2.1.18).

Теорема 2.1.1. *Задача* (2.1.18) *имеет единственное слабое решение $u \in F$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$f \in F^*, \quad \psi \in (G_+)^*. \tag{2.1.20}$$

Это решение дается формулой

$$u = A^{-1} f + T_M \psi. \tag{2.1.21}$$

Обратно, любой элемент $u \in F$ допускает единственное представление его в виде

$$u = A^{-1}(Lu) + T_M(\partial u) =: v + w, \tag{2.1.22}$$

где v и w – слабые решения задач (2.1.2) *и* (2.1.11) *соответственно.*

Доказательство. Пусть $v \in F$ – слабое решение задачи (2.1.2) при $f \in F^*$, а $w \in M \subset F$ – слабое решение задачи (2.1.11) при $\psi \in (G_+)^*$. Напомним, что требования (2.1.20) относительно $f = Lu$ и $\psi = \partial u$ – это необходимые и достаточные условия существования и единственности слабых решений этих задач.

Введем элемент $\widetilde{u} := v + w$ и докажем, что он совпадает со слабым решением задачи (2.1.18). Из определений (2.1.3) и (2.1.12) слабых решений задач (2.1.2) и (2.1.11) следует, что

$$\langle \eta, f \rangle_E + \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G = (\eta, v + w)_F = (\eta, \widetilde{u})_F, \quad \forall \eta \in F. \tag{2.1.23}$$

Отсюда и из (2.1.19) имеем

$$(\eta, u - \widetilde{u})_F = 0, \quad \forall \eta \in F,$$

откуда получаем, что $u = \widetilde{u}$.

Значит,

$$u = v + w = A^{-1} f + T_M \psi,$$

т.е. справедлива формула (2.1.21). Далее, для любого $u \in F$, согласно теореме 1.3.1, имеем

$$Lu =: f \in F^*, \quad \partial u =: \psi \in (G_+)^*,$$

причем эти элементы находятся по $u \in F$ однозначно. Отсюда и из (2.1.21) следует представление (2.1.22). □

Замечание 2.1.1. Как следует из общих рассмотрений п. 1.3.2, любой элемент $u \in F$ допускает представление

$$u = u_N + u_M, \quad u_N = P_N u \in N, \quad u_M = P_M u \in M, \quad N \oplus M = F.$$

С другой стороны, имеет место также однозначное представление любого $u \in F$ в форме (2.1.22). Поэтому между элементами u_N и u_M, с одной стороны, и элементами v и w, с другой, имеет место взаимно однозначное соответствие.

Действительно, согласно проведенным построениям имеем

$$\partial_M w = \partial w = \partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N, \quad \partial_M = (T_M)^{-1}.$$

Поэтому

$$w = T_M(\partial_M w) = T_M(\partial_M u_M + \partial_N u_N) = u_M + T_M(\partial_N u_N). \tag{2.1.24}$$

Тогда

$$v = u - w = (u_M + u_N) - (u_M + T_M(\partial_N u_N)) = u_N - T_M(\partial_N u_N). \quad (2.1.25)$$

Таким образом, элементы v и w находятся однозначно по элементам u_M и u_N по формулам (2.1.24), (2.1.25).

Формулы для обратного соответствия также легко вывести. В самом деле, так как $u_N \in N$, $T_M(\partial_N u_N) \in M$, то из (2.1.25) имеем

$$u_N = P_N v, \quad u_M = P_M(v + w), \tag{2.1.26}$$

где P_N и P_M – ортопроекторы на N и M соответственно. □

2.1.4 Другие примеры абстрактных краевых задач

На основе подобного рода общих построений можно аналогичным образом рассмотреть другие примеры абстрактных краевых задач, обобщающих известные задачи математической физики, например, для оператора Лапласа или любого равномерно эллиптического оператора, а также для соответствующих операторов линейной теории упругости, гидродинамики и др.

Рассмотрим сначала задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$Lu = f, \quad \partial u = \varphi. \tag{2.1.27}$$

Напомним (см. п.1.3.2), что согласно предположению 3° выполнено условие

$$N \hookrightarrow E, \tag{2.1.28}$$

которое обычно имеет место в задачах математической физики.

Например, для гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ имеем $N = H_0^1(\Omega)$ (см. п. 1.4.3), это подпространство плотно в $L_2(\Omega)$ и имеет место неравенство Фридрихса (см. [4]):

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad c > 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.1.29}$$

Из предположения (2.1.28) следует, что $(N; E)$ – гильбертова пара пространств. Обозначим через A_0 оператор этой гильбертовой пары. Тогда можно считать, как это следует из предыдущих рассмотрений (см. п. 1.2.1), что $\mathcal{D}(A_0) = N$, $\mathcal{R}(A_0) = N^*$ и

$$(u, v)_F = (A_0^{1/2}u, A_0^{1/2}v)_E = \langle u, A_0 v\rangle_E, \quad \forall u, v \in N. \tag{2.1.30}$$

Лемма 2.1.3. *При любых*

$$f \in N^*, \quad \varphi \in G_+ \tag{2.1.31}$$

задача (2.1.27) *имеет единственное решение* $u \in F$*, представимое в виде суммы двух взаимно ортогональных элементов:*

$$u = v + w = A_0^{-1} f + (\gamma_M)^{-1}\varphi, \quad v \in N, w \in M, \tag{2.1.32}$$

где $A_0 : N \to N^*$ *– оператор гильбертовой пары* $(N; E)$*, а* γ_M *– сужение оператора следа* γ *на подпространство* $M = F \ominus N$.

Доказательство. Будем разыскивать решение задачи (2.1.27) в виде суммы $u = v + w$, где $v \in N$, а $w \in M$. Тогда для $w \in M$ возникает задача

$$Lw = 0, \quad \gamma_M w = \gamma w = \gamma u = \varphi. \tag{2.1.33}$$

Так как между элементами подпространства M и пространства G_+, согласно построениям п. 1.3.2, имеет место изоморфизм и даже изометрия (см. формулу (1.3.8) из п. 1.3.2):

$$\|w\|_F = \|\gamma_M w\|_{G_+}, \quad \forall w \in M, \tag{2.1.34}$$

то оператор $\gamma_M : M \to G_+$ имеет ограниченный обратный оператор $(\gamma_M)^{-1} : G_+ \to M$, который является и изометрическим. Поэтому задача (2.1.33) имеет единственное решение $w = (\gamma_M)^{-1}\varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in G_+$.

Из этих свойств элемента w следует, что для элемента $u \in N$ должны выполняться соотношения

$$Lv = L(u - w) = f, \quad \gamma v = \gamma(u - w) = \gamma u - \varphi = 0, \tag{2.1.35}$$

т.е. возникает уравнение Пуассона при однородном условии Дирихле.

Назовем слабым решением задачи (2.1.35) такой элемент $v \in N$, для которого выполнено тождество

$$\langle \eta, f \rangle_E = (\eta, v)_F, \quad \forall \eta \in N. \tag{2.1.36}$$

Заметим, что для решений задачи (2.1.35) это тождество следует из абстрактной формулы Грина (2.1.1).

Левая часть в (2.1.36) является линейным ограниченным функционалом в подпространстве N тогда и только тогда, когда $f \in N^*$. Поэтому по лемме Ф. Рисса при $f \in N^*$ найдется единственный элемент $v \in N$ такой, что выполнено тождество (2.1.36). Отсюда с учетом формул (2.1.30) получаем (как при доказательстве леммы 2.1.1)

$$\langle \eta, f\rangle_E = (\eta, v)_F = (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}v)_F = \langle \eta, A_0 v\rangle_E, \quad \forall \eta \in N. \qquad (2.1.37)$$

Значит, с учетом (2.1.28), будем иметь,

$$\langle \eta, f - A_0 v\rangle_E = 0 \Rightarrow A_0 v = f \Rightarrow v = A_0^{-1} f, \qquad (2.1.38)$$

где A_0 – оператор гильбертовой пары пространств $(N; E)$.

Итак, элементы w и v находятся однозначно по элементам $\varphi \in G_+$ и $f \in N^*$ соответственно. Поэтому элемент $u = v + w$ также однозначно определен, и решение u задачи (2.1.6) имеет вид (2.1.32). □

Переходя к рассмотрению других абстрактных краевых задач, введем оператор $\alpha : G_+ \to (G_+)^*$ и будем считать, что это линейный ограниченный оператор, обладающий следующим свойством неотрицательности:

$$\langle \varphi, \alpha\varphi\rangle_G \geqslant 0, \quad \forall \varphi \in G_+. \qquad (2.1.39)$$

Рассмотрим с помощью этого оператора абстрактные краевые задачи с краевым условием третьего рода. Условия такого вида будем называть *условиями Ньютона* (по аналогии с классическими задачами теплопроводности). В абстрактной форме условие Ньютона имеет вид

$$\partial u + \alpha\gamma u = \psi, \qquad (2.1.40)$$

где α – введенный выше неотрицательный оператор. Если $\alpha = 0$, то (2.1.40) переходит в условие Неймана.

Итак, изучим краевую задачу Ньютона для уравнения Пуассона:

$$Lu = f, \quad \partial u + \alpha\gamma u = \psi, \qquad (2.1.41)$$

где $\alpha : G_+ \to (G_+)^*$ – оператор со свойством (2.1.39). Из абстрактной формулы Грина (2.1.1) получаем, что для решений задачи (2.1.41) выполнено тождество

$$(\eta, u)_F + \langle \gamma\eta, \alpha\gamma u\rangle_G = \langle \eta, f\rangle_E + \langle \gamma\eta, \psi\rangle_G, \quad \forall \eta \in F. \qquad (2.1.42)$$

Это соотношение принимают в качестве определения слабого решения задачи (2.1.41).

Для изучения задачи (2.1.41) можно применить два подхода. Один из них основан на применении операторов, уже использованных при рассмотрении предыдущих задач (2.1.2), (2.1.11) и (2.1.27), а второй основан на введении нового скалярного произведения в пространстве F.

Идя по второму пути и опираясь на левую часть (2.1.42), введем для элементов из F новое скалярное произведение

$$(\eta, u)_{\widetilde{F}} := (\eta, u)_F + \langle \gamma\eta, \alpha\gamma u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{2.1.43}$$

а также соответствующую норму.

Лемма 2.1.4. *Норма, порожденная скалярным произведением* (2.1.43)*, эквивалентна норме пространства F.*

Доказательство. В силу условия (2.1.39) имеем

$$\|\eta\|^2_{\widetilde{F}} = \|\eta\|^2_F + \langle \gamma\eta, \alpha\gamma\eta\rangle_G \geqslant \|\eta\|^2_F, \quad \forall \eta \in F. \tag{2.1.44}$$

С другой стороны, в силу ограниченности оператора $\alpha : G_+ \to (G_+)^*$ справедливо неравенство

$$\|\eta\|^2_{\widetilde{F}} \leqslant \|\eta\|^2_F + \|\gamma\eta\|_{G_+}\|\alpha\gamma\eta\|_{(G_+)^*} \leqslant \|\eta\|^2_F + \|\alpha\|\cdot\|\gamma\eta\|^2_{G_+}, \ \forall \eta \in F. \tag{2.1.45}$$

Однако согласно (2.1.16) имеем

$$\|\gamma\eta\|_{G_+} \leqslant \|\eta\|_F, \quad \forall \eta \in F, \tag{2.1.46}$$

и потому из (2.1.45) получаем

$$\|\eta\|^2_{\widetilde{F}} \leqslant (1 + \|\alpha\|)\|\eta\|^2_F, \tag{2.1.47}$$

что вместе с неравенством (2.1.44) завершает доказательство леммы.

□

Перейдем к вопросу о разрешимости задачи (2.1.41).

Лемма 2.1.5. *Пусть в задаче* (2.1.41) *выполнены условия* (2.1.20)*, т.е.*

$$f \in F^*, \quad \psi \in (G_+)^*. \tag{2.1.48}$$

Тогда эта задача имеет единственное слабое решение $u \in F = \widetilde{F}$.

Доказательство. Рассмотрим правую часть (2.1.42):

$$l(\eta) := \langle \eta, f\rangle_E + \langle \gamma\eta, \psi\rangle_G, \quad \forall \eta \in F = \widetilde{F}. \tag{2.1.49}$$

При условиях (2.1.48) $l(\eta)$ является линейным ограниченным функционалом на $\widetilde{F}$. В самом деле,

$$
\begin{aligned}
&|l(\eta)| \leqslant \|\eta\|_F \cdot \|f\|_{F^*} + \|\gamma\eta\|_{G_+} \cdot \|\psi\|_{(G_+)^*} \leqslant \\
&\leqslant (\|f\|_{F^*} + \|\psi\|_{(G_+)^*})\|\eta\|_F \leqslant (\|f\|_{F^*} + \|\psi\|_{(G_+)^*})\|\eta\|_{\widetilde{F}},
\end{aligned}
\tag{2.1.50}
$$

где при выводе были использованы неравенства (2.1.16) и (2.1.44).

Поэтому по теореме Ф. Рисса, примененной к пространству $\widetilde{F}$ со скалярным произведением (2.1.43), получаем, что найдется единственный элемент $u \in \widetilde{F} = F$, такой, что

$$
l(\eta) = (\eta, u)_{\widetilde{F}} = (\eta, u)_F + \langle \gamma\eta, \alpha\gamma u\rangle_G,
$$

т.е. справедливо тождество (2.1.42). □

Поставим теперь следующий вопрос. Выше в пространстве F было введено новое скалярное произведение, эквивалентное исходному, и возникло пространство $\widetilde{F}$, состоящее из тех же элементов, что и элементы F, однако с новой эквивалентной нормой. В то же время остальные пространства E и G, а также оператор γ остались прежними. Нетрудно проверить, что для новой тройки пространств E, $\widetilde{F}$, G и оператора γ снова выполнены условия 1° – 3° п. 1.3.2, и потому справедлива абстрактная формула Грина вида

$$
\langle \eta, \widetilde{L}u\rangle_E = (\eta, u)_{\widetilde{F}} - \langle \gamma\eta, \widetilde{\partial}u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in \widetilde{F} = F. \tag{2.1.51}
$$

Спрашивается, как изменились дифференциальное выражение $\widetilde{L}u$ и производная $\widetilde{\partial}u$ после перехода в F к новому скалярному произведению (2.1.43), а также как изменился оператор $\widetilde{A}$ гильбертовой пары $(\widetilde{F}; E)$ по сравнению с оператором A гильбертовой пары $(F; E)$ и другие сопутствующие операторы. При этом предполагаем, что при $\alpha \to 0$ формула Грина (2.1.51) должна перейти в формулу Грина (2.1.1), которая отвечает предельному случаю $\alpha = 0$.

Рассмотрим эту проблему подробнее. Итак, для элементов из $F = \widetilde{F}$ имеем две формулы Грина; это формулы (2.1.1) и (2.1.51), а также связь скалярных произведений (2.1.43). Приравнивая в этих формулах выражение $(\eta, u)_F$, приходим к тождеству

$$
\langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \langle \eta, \widetilde{L}u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \widetilde{\partial}u\rangle_G - \langle \gamma\eta, \alpha\gamma u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F,
$$

т.е.

$$
\langle \eta, \widetilde{L}u - Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \widetilde{\partial}u - \alpha\gamma u - \partial u\rangle_G = 0, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{2.1.52}
$$

Положим здесь $\eta \in N$. Тогда $\gamma\eta = 0$, и так как согласно (2.1.28) $N \hookrightarrow E$, то из (2.1.52) следует, что функционал $\widetilde{L}u - Lu$ является нулевым. Значит,

$$\widetilde{L}u = Lu \in F^*. \tag{2.1.53}$$

В этом случае соотношение (2.1.52) принимает вид

$$\langle \gamma\eta, \widetilde{\partial}u - \alpha\gamma u - \partial u\rangle_G = 0, \quad \forall \eta \in F. \tag{2.1.54}$$

Так как $\{\gamma\eta\}$ пробегает все G_+, когда η пробегает все F, то из (2.1.54) следует, что

$$\widetilde{\partial}u = \partial u + \alpha\gamma u, \quad \forall u \in F. \tag{2.1.55}$$

Отсюда получаем такой вывод: при переходе к эквивалентной норме (2.1.43) в пространстве F условие Ньютона в задаче (2.1.41) переходит в условие Неймана в пространстве $\widetilde{F}$, а дифференциальное выражение Lu не изменяется: $\widetilde{L}u = Lu$.

Далее, эти рассуждения показывают также, что оператор $\widetilde{A}$ гильбертовой пары $(\widetilde{F}; E)$ задается на области определения (см. (2.1.10))

$$\mathcal{D}(\widetilde{A}) = \{u \in F = \widetilde{F} : \widetilde{L}u = Lu \in E,\ \widetilde{\partial}u = \partial u + \alpha\gamma u = 0\} \tag{2.1.56}$$

по закону

$$\widetilde{A}u = \widetilde{L}u = Lu. \tag{2.1.57}$$

Учитывая эти обстоятельства и опираясь на теорему 2.1.1 и формулу (2.1.21), можно сразу сказать, что решение задачи (2.1.41) выражается формулой

$$u = \widetilde{v} + \widetilde{w} = \widetilde{A}^{-1}f + T_{\widetilde{M}}\psi, \tag{2.1.58}$$

где $\widetilde{v}$ – решение первой вспомогательной задачи

$$L\widetilde{v} = f \in F^*, \quad \widetilde{\partial}\widetilde{v} = \partial\widetilde{v} + \alpha\gamma\widetilde{v} = 0, \tag{2.1.59}$$

а $\widetilde{w}$ – решение второй вспомогательной задачи

$$L\widetilde{w} = 0, \quad \widetilde{\partial}\widetilde{w} = \partial\widetilde{w} + \alpha\gamma\widetilde{w} = \psi \in (G_+)^*. \tag{2.1.60}$$

При этом

$$\begin{aligned} &\widetilde{v} = \widetilde{A}^{-1}f,\ \widetilde{A} : \widetilde{F} \to (\widetilde{F})^* = F^*, \\ &\widetilde{w} = T_{\widetilde{M}}\psi,\ T_{\widetilde{M}} : (G_+)^* \to \widetilde{M} \subset \widetilde{F}, \end{aligned} \tag{2.1.61}$$

где $\widetilde{M} \subset \widetilde{F}$ – подпространство гармонических элементов из $\widetilde{F}$, ортогональное к $N = \widetilde{N}$ в смысле нового скалярного произведения (2.1.43).

Учитывая тот факт, что при $\alpha = 0$ условие Ньютона переходит в условие Неймана (2.1.11), в дальнейшем условие такого вида будем называть *условием Ньютона–Неймана.*

Рассмотрим теперь второй подход к задаче (2.1.41), не связанный с введением нового скалярного произведения в пространстве F и опирающийся на операторы вспомогательных краевых задач (2.1.2) и (2.1.11), а также на оператор $C_M := \gamma_M T_M$ (см. п. 1.3.2).

Представим решение задачи (2.1.41) в виде суммы $u = v + w$, где

$$Lv = f, \quad \partial v = 0, \tag{2.1.62}$$

а элемент $w \in M$ является решением задачи

$$Lw = 0, \quad \partial w = \psi - \alpha\gamma(v + w). \tag{2.1.63}$$

Тогда, согласно лемме 2.1.1, $v = A^{-1}f$.

Заметим теперь, что элементы $\partial_M w$ и $\gamma_M w$ связаны соотношением $\partial_M w = C_M^{-1}\gamma_M w$, $C_M = \gamma_M T_M$. Учитывая эту связь, перепишем граничное условие (2.1.63) в виде

$$(C_M^{-1} + \alpha)(\gamma_M w) = \psi - \alpha\gamma A^{-1}f. \tag{2.1.64}$$

Здесь $C_M^{-1} + \alpha$ ограниченно действует из G_+ в $(G_+)^*$.

Лемма 2.1.6. *Оператор $C_M^{-1} + \alpha$ имеет ограниченный обратный оператор $(C_M^{-1} + \alpha)^{-1} : (G_+)^* \to G_+$ и*

$$\|(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\| \leqslant 1. \tag{2.1.65}$$

Доказательство. Так как оператор α обладает свойством неотрицательности (2.1.39), то

$$\langle\varphi, (C_M^{-1} + \alpha)\varphi\rangle_G \geqslant \langle\varphi, C_M^{-1}\varphi\rangle_G = \|C_M^{-1/2}\varphi\|_G^2 = \|\varphi\|_{G_+}^2, \ \forall\varphi \in G_+ \tag{2.1.66}$$

Здесь равенства справа имеют место согласно установленной в п. 1.3.2 формуле (1.3.23):

$$(\varphi, \psi)_{G_+} = \langle\varphi, C_M^{-1}\psi\rangle_G, \quad \forall\varphi, \psi \in G_+. \tag{2.1.67}$$

Из (2.1.66) теперь получаем, что

$$\|\varphi\|_{G_+}^2 \leqslant \|\varphi\|_{G_+} \cdot \|(C_M^{-1} + \alpha)\varphi\|_{(G_+)^*},$$

откуда после замены $\psi := (C_M^{-1} + \alpha)\varphi$ приходим к формуле

$$\|(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\psi\|_{G_+} \leqslant \|\psi\|_{(G_+)^*}.$$

Значит, оператор $(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}$ ограничен и выполнено свойство (2.1.65). $\square$

Опираясь на эти факты, вместо (2.1.63) приходим к задаче

$$Lw = 0, \quad \gamma_M w = (C_M^{-1} + \alpha)^{-1}(\psi - \alpha\gamma A^{-1} f). \tag{2.1.68}$$

Так как оператор $\gamma_M : M \to G_+$ является изометрией и потому ему обратный существует и также является изометрией, то из (2.1.68) окончательно получаем

$$\begin{aligned} u = v + w = A^{-1}f + (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}(\psi - \alpha\gamma A^{-1}f) = \\ = (I - (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\alpha\gamma)A^{-1}f + (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\psi. \end{aligned} \tag{2.1.69}$$

Отметим, что если здесь формально положить $\alpha = 0$, то решение (2.1.69) переходит в решение неоднородной задачи Неймана для уравнения Пуассона, выражаемое формулой (2.1.21). Этот факт следует из того, что при $\alpha = 0$ задача Ньютона (2.1.41) переходит в задачу Неймана (2.1.18).

Рассмотрим, наконец, еще один подход к решению задачи Ньютона (2.1.41), основанный на использовании оператора A_0 гильбертовой пары $(N; E)$. Будем разыскивать решение задачи (2.1.41) в виде

$$u = u_N + u_M, \quad u_N \in N, \quad u_M \in M, \quad F = N \oplus M. \tag{2.1.70}$$

Тогда для u_N и u_M возникают задачи (проверьте):

$$Lu_N = f, \quad \gamma u_N = \gamma_N u_N = 0; \tag{2.1.71}$$

$$Lu_M = 0, \quad \partial_M u_M + \alpha\gamma_M u_M = (C_M^{-1} + \alpha)\gamma_M u_M = \psi - \partial_N u_N. \tag{2.1.72}$$

Как следует из леммы 2.1.3, решение задачи (2.1.71) дается формулой $u_N = A_0^{-1}f$, где A_0 – оператор гильбертовой пары $(N; E)$. Далее, согласно проведенным выше рассуждениям, решение задачи (2.1.72) имеет вид

$$u_M = (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}(\psi - \partial_N(A^{-1}f)).$$

Отсюда окончательно получаем решение задачи (2.1.41) в виде

$$u = (I - (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\partial_N)A^{-1}f + (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\psi. \tag{2.1.73}$$

Покажем, что при $\alpha = 0$ это решение переходит в (2.1.21), т.е. в решение задачи Неймана. В самом деле, в этом случае

$$\begin{aligned} u = u_N + u_M = (I - (\gamma_M)^{-1}(\gamma_M) T_M \partial_N) u_N + T_M \psi = \\ = (u_N - T_M \partial_N u_N) + T_M \psi = v + w = A^{-1} f + T_M \psi. \end{aligned} \tag{2.1.74}$$

Здесь при выводе были использованы связи (2.1.24) и (2.1.25), а также формулы для решений v и w вспомогательных задач С.Г. Крейна (см. пп. 2.1.1 и 2.1.2).

Таким образом, решение одной и той же задачи Ньютона (2.1.41) представимо в трех разных вариантах: в виде (2.1.58), (2.1.69) и (2.1.73). При этом в этих формулах фигурируют операторы различных вспомогательных краевых задач, связанных со слабыми решениями из пространства F либо из пространства $\widetilde{F}$ с эквивалентной нормой.

2.2 Краевые задачи для уравнения Лапласа или Пуассона и близкие к ним

В этом параграфе в качестве иллюстрации общих положений, рассмотренных в 2.1, будут приведены классические краевые задачи для уравнения Лапласа или Пуассона, а также близкие к ним по свойствам возникающих билинейных форм, формул Грина и другим характеристикам. Эти задачи рассматриваются в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Изложение этого круга вопросов дано в виде упражнений и примеров с некоторыми пояснениями.

2.2.1 Краевые задачи Дирихле

Начнем рассмотрение этих задач с наиболее простой из них.

Пример 2.2.1. Однородная задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.2.1}$$

□

Эту задачу можно считать частным случаем общей задачи (2.1.27) (см. также задачу (1.2.81) главы 1), если в качестве E выбрать пространство $L_2(\Omega)$, в качестве G – пространство $L_2(\Gamma)$, а в качестве F – пространство $H^1(\Omega)$ с эквивалентной нормой

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega + \Big(\int\limits_\Gamma u \, d\Gamma \Big)^2. \tag{2.2.2}$$

(см. [4], теорему 2.4.4). В качестве оператора следа γ выбираем обычный закон: $\gamma u = \ u|_\Gamma, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$.

Упражнение 2.2.1. Доказать, опираясь на определение (2.2.2) нормы в $H^1(\Omega)$ и формулу Грина (1.4.59) главы 1, что, во-первых, имеет место ортогональное разложение

$$H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus H^1_h(\Omega), \tag{2.2.3}$$

$$\begin{aligned} &H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_\Gamma = 0\}, \\ &H^1_h(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \Delta u = 0 \text{ в } \Omega\}; \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

а во-вторых, имеет место формула Грина

$$\langle \eta, -\Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega \nabla \eta \cdot \nabla u \, d\Omega - \Big\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \Big\rangle_{L_2(\Gamma)}, \tag{2.2.5}$$

$$\Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in (H^{1/2}(\Gamma))^*, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \tag{2.2.6}$$

□

Отметим, что в рассматриваемом случае $N = H^1_0(\Omega)$ плотно в $E = L_2(\Omega)$. Поэтому согласно лемме 2.1.3 задача (2.2.1) при любом $f \in N^* = (H^1_0(\Omega))^*$ (сопряжение по форме $L_2(\Omega)$) имеет единственное слабое решение $u \in H^1_0(\Omega)$ (в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$), которое выражается формулой $u = A_0^{-1} f$, где $A_0 : H^1_0(\Omega) \to (H^1_0(\Omega))^*$ – оператор гильбертовой пары $(H^1_0(\Omega); L_2(\Omega))$.

Пример 2.2.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad u = \varphi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.2.7}$$

□

Выбирая ту же, что и примере 2.2.1, тройку пространств и оператор следа γ, по теореме Гальярдо (см. п. 1.4.2) получаем, что $\gamma : \ H^1(\Omega) \to \ H^{1/2}(\Gamma) =: G_+$ – ограниченный оператор. Поэтому согласно лемме 2.1.3 приходим к выводу, что задача (2.2.7) тогда и только тогда имеет единственное слабое решение $u \in H^1_h(\Omega)$, когда $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Это решение выражается формулой $u = (\gamma_M)^{-1}\varphi$, где γ_M – сужение оператора следа на подпространство $H^1_h(\Omega)$, см. (2.2.4).

Упражнение 2.2.2. Доказать, что решение неоднородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона, т.е. задачи

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad u = \varphi \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega), \tag{2.2.8}$$

принадлежит пространству $H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $f \in (H_0^1(\Omega))^*$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Это решение единственно и выражается формулой

$$u = A_0^{-1} f + (\gamma_M)^{-1}\varphi. \tag{2.2.9}$$

□

Рассмотрим теперь другие близкие к (2.2.1), (2.2.7) и (2.2.8) проблемы. Это задачи соответственно вида

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.2.10}$$

$$u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad u = \varphi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.2.11}$$

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad u = \varphi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.2.12}$$

Здесь естественно использовать тройку пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$ со стандартной нормой

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, d\Omega, \tag{2.2.13}$$

$G = L_2(\Gamma)$, обычный оператор следа $\gamma u = u|_\Gamma$, $\forall u \in H^1(\Omega)$, а также первую формулу Грина для оператора Лапласа (см. (1.4.59), гл. 1):

$$\begin{gathered} \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \end{gathered} \tag{2.2.14}$$

Напомним (см. (1.4.34), гл. 1), что в этом случае имеет место ортогональное разложение

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega), \; H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \; (\text{на } \Gamma)\}, \tag{2.2.15}$$

$$H_h^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega)\}. \tag{2.2.16}$$

Упражнение 2.2.3. Доказать, что решение каждой из задач (2.2.10) – (2.2.12) существует, единственно и принадлежит пространству $H^1(\Omega)$ с нормой (2.2.13) тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$f \in (H_0^1(\Omega))^*, \quad \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{2.2.17}$$

Эти решения даются соответственно формулами

$$u = A_0^{-1} f, \quad u = (\gamma_M)^{-1}\varphi, \quad u = A_0^{-1} f + (\gamma_M)^{-1}\varphi, \tag{2.2.18}$$

где $A_0 : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^*$ – оператор гильбертовой пары $(H_0^1(\Omega); L_2(\Omega))$, а γ_M – сужение оператора следа γ на подпространство $M = H_h^1(\Omega)$, см. (2.2.16). □

2.2.2 Краевые задачи Неймана–Ньютона

Примеры таких краевых задач уже приводились в п. 1.2.5.

Рассмотрим сначала однородную задачу Неймана для уравнения типа Пуассона (см. (1.2.67), гл. 1):

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{2.2.19}$$

Это – частный случай абстрактной задачи (2.1.2), т.е. первой вспомогательной задачи С.Г. Крейна, отвечающей, как и выше, формуле Грина (2.2.14) и соответствующим пространствам $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$ (с нормой (2.2.13)) и $G = L_2(\Gamma)$.

Упражнение 2.2.4. Доказать, опираясь на лемму 2.1.1, формулу Грина (2.2.14) и теорему 1.4.1, что задача (2.2.19) имеет слабое решение $u \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $f \in (H^1(\Omega))^*$, и это решение дается формулой $u = A^{-1}f$, где $A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*$ — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$. □

Рассмотрим теперь вместо (2.2.19) краевую задачу для однородного уравнения и неоднородного условия Неймана:

$$u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.2.20}$$

Это — снова частный случай, на этот раз задачи (2.1.11), для того же набора пространств и оператора следа, т.е. задача (2.2.20) является второй вспомогательной задачей С.Г. Крейна для указанной совокупности пространств.

Упражнение 2.2.5. Опираясь на теорему Гальярдо, лемму 2.1.2 и формулу Грина (2.2.14), доказать, что задача (2.2.20) имеет единственное решение $u \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*$ (сопряжение по форме $L_2(\Gamma)$). Это решение выражается формулой $u = T_M\psi$, где $T_M : (H^{1/2}(\Gamma))^* \to M = H^1_h(\Omega)$ – ограниченный оператор, а подпространство $H^1_h(\Omega)$ определено в (2.2.16). $\square$

Следствием упражнений 2.2.4 и 2.2.5, а также теоремы 2.1.1 является такое утверждение.

Теорема 2.2.1. *Неоднородная задача Неймана для уравнения типа Пуассона, т.е. задача вида*

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.2.21}$$

имеет единственное решение $u \in H^1(\Omega)$ (в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$) тогда и только тогда, когда

$$f \in (H^1(\Omega))^*, \quad \psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{2.2.22}$$

Это решение дается формулой

$$u = A^{-1}f + T_M\psi, \tag{2.2.23}$$

где A и T_M – операторы из упражнений 2.2.4 и 2.2.5 соответственно.
$\square$

Рассмотрим еще задачи типа вспомогательных задач С.Г. Крейна, но с краевым условием Ньютона:

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega), \tag{2.2.24}$$

$$u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.2.25}$$

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.2.26}$$

Здесь $\alpha = \alpha(x)$, $x \in \Gamma$, — неотрицательная функция, непрерывная на Γ. Каждая из задач (2.2.24) – (2.2.26) является частным случаем абстрактной задачи (2.1.41). Здесь следует привлечь тройку пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = \widetilde{H}^1(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) d\Omega + \int\limits_\Gamma \alpha |u|^2 \, d\Gamma, \tag{2.2.27}$$

пространство $G = L_2(\Gamma)$ и обычный оператор следа $\gamma u = u|_\Gamma$. Отметим при этом, что норма (2.2.27) эквивалентна стандартной норме (2.2.13) и потому $H^1(\Omega)$ и $\widetilde{H}^1(\Omega)$ совпадают как множества функций.

Упражнение 2.2.6. Доказать, что имеет место следующая формула Грина

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{\widetilde{H}^1(\Omega)} - \Big\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha\gamma u \Big\rangle_{L_2(\Gamma)}, \forall \eta, u \in \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{2.2.28}$$

Доказать также, что каждая из задач (2.2.24) – (2.2.26) имеет единственное решение $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$f \in (\widetilde{H}^1(\Omega))^*, \quad \psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*, \tag{2.2.29}$$

и эти решения выражаются формулами

$$u = \widetilde{A}^{-1} f, \quad u = T_{\widetilde{M}}\psi, \quad u = \widetilde{A}^{-1} f + T_{\widetilde{M}}\psi, \tag{2.2.30}$$

соответственно, где $\widetilde{A}$ – оператор гильбертовой пары $(\widetilde{H}^1(\Omega); L_2(\Omega))$, а $T_{\widetilde{M}}$ – оператор, возникающий во второй вспомогательной задаче С.Г. Крейна, т.е. задаче (2.2.25).

Указание. Воспользоваться леммой 2.1.5, общими рассуждениями после нее, а также формулами (2.1.58) – (2.1.62). □

Рассмотрим, наконец, классическую неоднородную краевую задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{2.2.31}$$

Отметим прежде всего, что функции (функционалы) f и ψ в (2.2.31) не могут выбираться произвольным образом, если решение задачи принадлежит пространству $H^1(\Omega)$. В самом деле, из формулы (1.4.61) главы 1, т.е. формулы

$$\langle \eta, -\Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega - \Big\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \Big\rangle_{L_2(\Gamma)}, \ \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{2.2.32}$$

следует при $\eta = \eta(x) \equiv 1$, что для решения $u \in H^1(\Omega)$ задачи (2.2.31) должно выполняться условие ее разрешимости

$$\langle 1_\Omega, f \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle 1_\Gamma, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = 0, \tag{2.2.33}$$

где 1_Ω – функция, равная 1 в Ω, а 1_Γ – функция, тождественно равная 1 на $\Gamma = \partial\Omega$.

Заметим еще, что решение задачи (2.2.31) определяется с точностью до константы (докажите этот факт, опираясь на (2.2.32)). Поэтому его можно нормировать условием

$$\Big(1_\Gamma, \gamma u\Big)_{L_2(\Gamma)} = \int\limits_\Gamma u\, d\Gamma = 0, \tag{2.2.34}$$

либо условием

$$\Big(1_\Omega, u\Big)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega u\, d\Omega = 0, \tag{2.2.35}$$

либо каким-либо другим (линейным по u) условием.

Опираясь на общие построения параграфа 2.1, а также вышеприведенные предварительные факты, будем разыскивать решение задачи (2.2.31) при условии нормировки (2.2.34) либо (2.2.35) в виде

$$u = v + w + c_{v,w}, \tag{2.2.36}$$

где v и w – решения вспомогательных краевых задач

$$-\Delta v = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_\Omega v\, d\Omega = 0, \tag{2.2.37}$$

$$\Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_\Gamma w\, d\Gamma = 0, \tag{2.2.38}$$

а $c_{v,w}$ – линейный функционал, зависящий от v и (или) w.

В (2.2.37), (2.2.38) нормировки решений v и w выбраны таким образом, чтобы использовать операторы A и T_M подходящих гильбертовых пар пространств, естественно связанных с этими вспомогательными задачами (см. ниже).

Рассмотрим сначала задачу (2.2.37). Необходимое условие разрешимости этой задачи следует из (2.2.33) при $\psi = 0$:

$$\langle 1_\Omega, f\rangle_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{2.2.39}$$

Условие нормировки $\int\limits_\Omega v\, d\Omega = 0$ и условие (2.2.39) показывают, что при рассмотрении проблемы (2.2.37) естественно ее решения искать в пространстве $H^1(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, d\Omega + \Big(\int\limits_\Omega u\, d\Gamma\Big)^2, \tag{2.2.40}$$

эквивалентной стандартной норме. Тогда

$$u \in H^1_\Omega := \{u \in H^1(\Omega) : \int\limits_\Omega u\, d\Omega = 0\}, \ \|u\|^2_{H^1_\Omega} = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, d\Omega. \tag{2.2.41}$$

Подпространство $H^1_\Omega \subset H^1(\Omega)$, очевидно, плотно и компактно вложено в подпространство

$$L_{2,\Omega} := \{u \in L_2(\Omega) : \int\limits_\Omega u\, d\Omega = 0\},$$

и потому $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$ – гильбертова пара пространств (см. п. 1.2.5, примеры 3°).

Эти рассуждения, а также лемма 2.1.1 и следствие 2.1.1 показывают, что кратко задачу (2.2.37) можно трактовать как первую вспомогательную задачу С.Г. Крейна для пары пространств $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$ и переписать в виде $Av = f$, где $A : H^1_\Omega \to (H^1_\Omega)^*$ – оператор гильбертовой пары $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$. Поэтому при $f \in (H^1_\Omega)^*$ задача (2.2.37) имеет единственное слабое решение $v = A^{-1} f \in H^1_\Omega$.

Перейдем теперь к задаче (2.2.38). Необходимое условие разрешимости этой задачи имеет вид

$$\langle 1_\Gamma, \psi\rangle_{L_2(\Gamma)} = 0. \tag{2.2.42}$$

Здесь вместо нормы (2.2.40) (ниже норма совпадает с нормой (2.2.40)) полезно воспользоваться другой нормой в $H^1(\Omega)$, именно, нормой

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, d\Omega + \Big(\int\limits_\Gamma u\, d\Gamma\Big)^2, \tag{2.2.43}$$

также эквивалентной стандартной. Тогда, очевидно,

$$w \in H^1_\Gamma(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \int\limits_\Gamma u\, d\Gamma = 0\}, \tag{2.2.44}$$

причем w принадлежит подпространству гармонических функций

$$H^1_{h,\Gamma}(\Omega) := \{u \in H^1_\Gamma(\Omega) : \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega)\}. \tag{2.2.45}$$

Отсюда следует, что задачу (2.2.38) естественно трактовать как вторую вспомогательную задачу С.Г. Крейна применительно к пространству $H^1_\Gamma(\Omega)$, подпространству $H^1_{h,\Gamma}(\Omega)$, а также оснащению

$$H^{1/2}_\Gamma := \Big(H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}\Big) \hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow (H^{1/2}_\Gamma)^*, \, L_2(\Gamma) := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}. \quad (2.2.46)$$

Поэтому по лемме 2.1.2 получаем, что при выполнении условия $\psi \in (H^{1/2}_\Gamma)^*$ задача (2.2.38) имеет единственное слабое решение

$$w = T_M \psi, \quad T_M := (H^{1/2}_\Gamma)^* \to H^1_{h,\Gamma}(\Omega) \subset H^1_\Gamma(\Omega).$$

Итогом рассмотрения проблемы (2.2.31) является следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Пусть в задаче* (2.2.31) *выполнены условия*

$$f \in (H^1_\Omega)^*, \quad \psi \in (H^{1/2}_\Gamma)^*. \quad (2.2.47)$$

Тогда при нормировке (2.2.34) *задача* (2.2.31) *имеет единственное слабое решение* $u \in H^1_\Gamma(\Omega)$, *выражаемое формулой*

$$u = P_\Gamma A^{-1} f + T_M \psi, \quad (2.2.48)$$

где $P_\Gamma : H^1(\Omega) \to H^1_\Gamma(\Omega)$ *— проектор на подпространство* $H^1_\Gamma(\Omega)$ *(см.* (2.2.44)*) пространства* $H^1(\Omega)$ *с нормой* (2.2.43).

Соответственно при нормировке (2.2.35), *задача* (2.2.31) *имеет единственное слабое решение* $u \in H^1_\Omega$, *выражаемое формулой*

$$u = A^{-1} f + P_\Omega T_M \psi, \quad (2.2.49)$$

где $P_\Omega : L_2(\Omega) \to L_{2,\Omega}$ *– ортопроектор на подпространство* $L_{2,\Omega} \supset H^1_\Omega$.

Доказательство. Следуя представлению (2.2.36), будем рызыскивать решение задачи (2.2.31) в виде

$$u = v + w + c = A^{-1} f + T_M \psi + c, \quad c = \mathrm{const}, \quad (2.2.50)$$

где $A : H^1_\Omega \to (H^1_\Omega)^*$, $T_M : (H^{1/2}_\Gamma)^* \to H^1_{h,\Gamma}(\Omega) \subset H^1_\Gamma(\Omega)$. Очевидно, функция такого вида является решением задачи (2.2.31). Найдем сначала решение, удовлетворяющее нормировке (2.2.34). Тогда должно быть

$$\int_\Gamma u \, d\Gamma = \int_\Gamma (A^{-1} f) \, d\Gamma + \int_\Gamma T_M \psi \, d\Gamma + c|\Gamma| = \int_\Gamma (A^{-1} f) \, d\Gamma + 0 + c|\Gamma| = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$c = -\frac{1}{|\Gamma|} \int\limits_{\Gamma} (A^{-1} f) \, d\Gamma,$$

и тогда для решения $u \in H^1_\Gamma(\Omega)$ приходим к формуле (2.2.48), где

$$P_\Gamma u := u - \frac{1}{|\Gamma|} \int\limits_{\Gamma} u \, d\Gamma, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.2.51}$$

Легко убедиться (проделайте это!), что $P_\Gamma = (P_\Gamma)^2$ и является ограниченным оператором в $H^1(\Omega)$ (с нормой (2.2.43)), т.е. P_Γ – проектор на $H^1_\Gamma(\Omega)$.

При нормировке (2.2.35) снова воспользуемся представлением (2.2.50) и найдем новую константу c. Имеем

$$\int\limits_{\Omega} A^{-1} f \, d\Omega + \int\limits_{\Omega} (T_M \psi) \, d\Omega + c|\Omega| = \int\limits_{\Omega} (T_M \psi) \, d\Omega + c|\Omega| = 0,$$

откуда следует, что

$$c = -\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} (T_M \psi) \, d\Omega.$$

Потому из (2.2.50) приходим к формуле (2.2.49), где

$$P_\Omega u := u - \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} u \, d\Omega, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.2.52}$$

Легко убедиться (проделайте это!), что $P_\Omega : H^1(\Omega) \to H^1_\Omega$ – проектор из $H^1(\Omega)$ (с нормой (2.2.40)) на подпространство H^1_Ω (см. (2.2.41)), т.е. он ограничен и $(P_\Omega)^2 = P_\Omega$. Кроме того, так как $H^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то этот оператор по непрерывности расширяется на все $L_2(\Omega)$. Тогда оказывается, что он обладает также свойством (убедитесь в этом тоже!)

$$(P_\Omega)^* = P_\Omega, \tag{2.2.53}$$

откуда окончательно получаем, что $P_\Omega : L_2(\Omega) \to L_{2,\Omega}$ – ортопроектор. $\square$

2.2.3 Краевые задачи для равномерно эллиптического оператора

Рассмотрим теперь, опираясь на рассуждения, приведенные в п. 1.5.1, краевые задачи для равномерно эллиптического дифференциального выражения (1.5.1) главы 1, т.е.

$$Lu := -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) + a_0(x)u = 0, \quad x \in \Omega. \qquad (2.2.54)$$

Считаем, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеет липшицеву границу $\partial\Omega$ и выполнены свойства (1.5.2) – (1.5.4), в частности, условие равномерной эллиптичности:

$$\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqslant c\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^2, \;\; c > 0, \quad x \in \Omega. \qquad (2.2.55)$$

Сформулируем для оператора L основные краевые задачи, встречающиеся в приложениях.

1°. Задача для уравнения Пуассона с однородным условием Дирихле:

$$Lv = f \;\text{ в }\; \Omega, \;\; \gamma v := v|_\Gamma = 0 \;\text{ на }\; \Gamma = \partial\Omega. \qquad (2.2.56)$$

2°. Задача для уравнения типа Лапласа с неоднородным условием Дирихле:

$$Lw = 0 \;\text{ в }\; \Omega, \;\; \gamma w = \varphi \;\text{ на }\; \Gamma. \qquad (2.2.57)$$

3°. Однородная задача Неймана для уравнения Пуассона:

$$Lv = f \;\text{ в }\; \Omega, \;\; \frac{\partial v}{\partial \nu} := \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial v}{\partial x_k}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_j}) = \psi \;\text{ на }\; \Gamma. \qquad (2.2.58)$$

Здесь $\partial v/\partial\nu$ — производная по конормали, отвечающая дифференциальному выражению Lu.

4°. Задача для уравнения типа Лапласа с неоднородным условием Неймана:

$$Lw = 0 \;\text{ в }\; \Omega, \;\; \frac{\partial w}{\partial \nu} = \psi \;\text{ на }\; \Gamma. \qquad (2.2.59)$$

5°. Задача для уравнения Пуассона и неоднородного условия Дирихле:

$$Lu = f \;\text{ в }\; \Omega, \;\; \gamma u = \varphi \;\text{ на }\; \Gamma. \qquad (2.2.60)$$

6°. Задача для уравнения Пуассона и неоднородного условия Неймана:

$$Lu = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi \ \text{ на } \ \Gamma. \tag{2.2.61}$$

Упражнение 2.2.7. Опираясь на свойства пространств $H^1_{eq}(\Omega)$ (с нормой (1.5.7)), $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, а также на абстрактную формулу Грина (1.5.10) (см. упражнение 1.5.3), доказать, что каждая из сформулированных задач (2.2.56) – (2.2.61) имеет слабое решение, если

$$f \in (H^1_{eq}(\Omega))^*, \quad \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{2.2.62}$$

Указание. Здесь следует провести ту же схему рассуждений, которая в абстрактной форме была использована в параграфе 2.1, а для оператора Лапласа — в предыдущих пунктах этого параграфа. □

2.2.4 Краевые задачи для сильно эллиптической системы уравнений

Этот пункт опирается на определения и построения, приведенные в п. 1.5.2, откуда и возьмем все определения.

Напомним, что речь идет о нахождении не одной искомой функции, а системы функций $u(x) := (u_1(x); \ldots ; u_n(x))^\tau$, для которой основное дифференциальное выражение имеет вид (1.5.13):

$$L_a u := -\sum_{j,k=1}^{m} \partial_j \Big[a_{jk}(x) \partial_k u(x) \Big] + a_0(x) u, \quad \partial_j := \partial / \partial x_j, \tag{2.2.63}$$

где $a_{jk}(x)$, $a_0(x)$ — матрицы, для которых выполнены свойства (1.5.14), (1.5.15).

Кроме того, по-прежнему полагаем, что $\Gamma := \partial\Omega \subset \mathbb{R}^m$ липшицева, а также выполнены свойства сильной эллиптичности (1.5.18) и неравенства (1.5.19) – (1.5.21).

Упражнение 2.2.8. Опираясь на выражение (1.5.16) для производной по конормали, отвечающей дифференциальному выражению (2.2.63), т.е. на формулу

$$\partial_{\nu_a} u(x) := \sum_{j,k=1}^{m} n_j(x) a_{jk}(x) \partial_k u(x), \tag{2.2.64}$$

а также на обобщенную формулу Грина (1.5.24) для системы уравнений, сформулировать задачи вида (2.2.56) – (2.2.61) применительно к системе уравнений и доказать для них теоремы о существовании слабых решений.

Указание. Здесь следует использовать тройку пространств $L_2(\Omega)$, F и $L_2(\Gamma)$ (см. определение нормы (1.5.21) в пространстве F, а также норм в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, т.е. формулы после (1.5.22)), оператор следа (1.5.23)и обобщенную формулу Грина (1.5.24). $\square$

Отметим еще, что заданными функциями в этих задачах являются функции

$$\begin{aligned} f(x) &:= (f_1(x)\,;\,\ldots\,;\,f_n(x)))^\tau, \quad x\in\Omega,\\ \varphi(x) &:= (\varphi_1(x)\,;\,\ldots\,;\,\varphi_n(x)))^\tau, \quad x\in\Gamma,\\ \psi(x) &:= (\psi_1(x)\,;\,\ldots\,;\,\psi_n(x)))^\tau, \quad x\in\Gamma. \end{aligned} \tag{2.2.65}$$

При этом сформулированные задачи будут иметь слабые решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &f(x)\in F^*, \ \ \varphi(x)\in H^{1/2}(\Gamma), \ \ H^{1/2}(\Gamma)\hookrightarrow L_2(\Gamma)\hookrightarrow (H^{1/2}(\Gamma))^*,\\ &\qquad \psi(x)\in (H^{1/2}(\Gamma))^*. \end{aligned} \tag{2.2.66}$$

2.3 Краевые задачи линейной теории упругости и гидродинамики

Рассмотрим по аналогичной общей схеме краевые задачи, возникающие в линейной теории упругости и линейной гидродинамике (см. параграф 1.6).

2.3.1 Краевые задачи линейной теории упругости

Напомним, что в теории упругости искомым является поле перемещений $\vec{u}=\vec{u}(x)$, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^m$, сплошной среды под действием внешних сил, которые характеризуются полем $\vec{f}=\vec{f}(x)$. Здесь при изучении состояния равновесия упругой среды возникают следующие краевые задачи статики.

1°. Задача о нахождении поля перемещений упругой среды при действии внешней нагрузки $\vec{f}(x)$ и отсутствии перемещений на границе упругой области $\Omega\subset\mathbb{R}^m$:

$$L\vec{v} := \vec{v}-[\mu\Delta\vec{v}+(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\vec{v}] = \vec{f}(x)\ (\text{в }\Omega), \quad \vec{v}=\vec{0}\ (\text{на }\Gamma=\partial\Omega). \tag{2.3.1}$$

2°. Задача о нахождении поля перемещений $\vec{w} = \vec{w}(x)$ упругой среды при отсутствии действия внешнего поля и заданном поле перемещений на границе:

$$L\vec{w} = \vec{0} \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{w} = \vec{\varphi} \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.3.2}$$

3°. Задача о нахождении поля перемещений $\vec{u} = \vec{u}(x)$ сплошной среды при действии заданного поля в виде объемной нагрузки $\vec{f} = \vec{f}(x)$ и заданном поле перемещений на границе:

$$L\vec{u} = \vec{f}(x) \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{\varphi} \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.3.3}$$

Другой класс статических задач, изучаемых в теории упругости, связан с заданием на границе $\Gamma = \partial\Omega$ не поля перемещений, а поля напряжений. Тогда взамен проблем (2.3.1) — (2.3.3) возникают следующие задачи.

4°. На внутренние точки области Ω, занятой упругой средой, действует внешняя нагрузка $\vec{f}(x)$, а граница $\Gamma = \partial\Omega$ свободна от напряжений:

$$\begin{aligned} &L\vec{v} = \vec{f}(x) \ (\text{в } \Omega), \\ &P\vec{v} := \sum_{j,k=1}^{3} \Big(\mu\tau_{jk}(\vec{v}) + \lambda\, \mathrm{div}\vec{v}\, \delta_{jk}\Big) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_j})\vec{e}_j = \vec{0} \ (\text{на } \Gamma). \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

(Здесь использованы обозначения 1.6.1, в частности, (1.6.2) – (1.6.5).)

5°. Пусть теперь внешняя нагрузка на упругую среду отсутствует, но на границе задано напряжение. Тогда возникает задача

$$L\vec{w} = \vec{0} \quad (\text{в } \Omega), \quad P\vec{w} = \vec{\psi}(x) \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.3.5}$$

6°. Если же действует внешняя нагрузка и задано напряжение на границе, то приходим к следующей задаче статики упругой среды:

$$L\vec{u} = \vec{f}(x) \quad (\text{в } \Omega), \quad P\vec{u} = \vec{\psi}(x) \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.3.6}$$

Все перечисленные задачи (2.3.4) — (2.3.6) исследуются по общей схеме, изложенной в параграфе 2.1. Здесь следует рассмотреть тройку пространств $\vec{L}_2(\Omega)$, $\vec{H}^1_{eq}(\Omega)$ и $\vec{L}_2(\Gamma)$ соответственно с нормами

$$\|\vec u\|^2_{\vec L_2(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\vec u|^2\, d\Omega = \sum_{j=1}^3 \int\limits_\Omega |u_j|^2\, d\Omega, \quad \vec u = \sum_{j=1}^3 u_j \vec e_j,$$
$$\|\vec u\|^2_{\vec H^1_{eq}(\Omega)} := \mu\, E(\vec u, \vec u) + \lambda \int\limits_\Omega |\operatorname{div} \vec u|^2\, d\Omega + \int\limits_\Omega |\vec u|^2\, d\Omega, \tag{2.3.7}$$
$$\|\vec u\|^2_{\vec L_2(\Gamma)} := \int\limits_\Gamma |\vec u|^2\, d\Gamma,$$

векторный оператор следа

$$\gamma \vec u := \sum_{j=1}^3 (\gamma u_j) \vec e_j = \vec u|_\Gamma$$

и обобщенную формулу Грина (1.6.10), т.е.

$$\langle \vec\eta, L\vec u\rangle_{\vec L_2(\Omega)} = (\vec\eta, \vec u)_{\vec H^1_{eq}(\Omega)} - \langle \gamma\vec\eta, P\vec u\rangle_{\vec L_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec\eta, \vec u \in \vec H^1_э(\Omega).$$

Упражнение 2.3.1. Доказать, что при выполнении условий

$$\vec f(x) \in (\vec H^1_{eq}(\Omega))^*, \quad \vec\varphi(x) \in \vec H^{1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma) \,(\dot+)\, H^{1/2}(\Gamma) \,(\dot+)\, H^{1/2}(\Gamma),$$
$$\vec\psi(x) \in (\vec H^{1/2}(\Gamma))^* = (H^{1/2}(\Gamma))^* \,(\dot+)\, (H^{1/2}(\Gamma))^* \,(\dot+)\, (H^{1/2}(\Gamma))^*.$$

каждая из задач (2.3.4) — (2.3.6) имеет слабое решение из пространства $\vec H^1_{eq}(\Omega)$. □

Упражнение 2.3.2. Рассмотрим задачу статики

$$\begin{aligned} L_0 \vec v := L\vec v - \vec v = -\mu\Delta\vec v + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} \vec v = \vec f(x) \quad (\text{в } \Omega),\\ \vec v = \vec 0 \quad (\text{на } \Gamma). \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Убедиться, что здесь взамен $\vec H^1_{eq}(\Omega)$ следует взять пространство $\vec H^1_{eq,0}(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\|\vec u\|^2_{\vec H^1_{eq,0}(\Omega)} := \mu\, E(\vec u, \vec u) + \lambda \int\limits_\Omega |\operatorname{div} \vec u|^2\, d\Omega$$

и обобщенную формулу Грина (1.6.11). Тогда при $\vec f(x) \in (\vec H^1_{eq,0}(\Omega))^*$ задача (2.3.8) будет иметь слабое решение из пространства $\vec H^1_{eq,0}(\Omega)$.
□

2.3.2 Некоторые краевые задачи линейной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости

Рассмотрим по аналогии с п. 2.3.1 соответствующие краевые задачи гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости.

Будем считать, что жидкость полностью заполняет некоторую область (сосуд) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$), а граница $\Gamma = \partial\Omega$ этой области липшицева. Пусть $\vec{u} = \vec{u}(x)$ — поле скоростей в жидкости, $p = p(x)$ — поле давлений, а $\vec{f} = \vec{f}(x)$ — поле внешних массовых сил, действующих на жидкость. Плотность жидкости для простоты положим равной единице, а коэффициент динамической вязкости μ — заданная положительная константа.

1°. *Первая проблема — однородная задача Дирихле для уравнений Стокса.*

Здесь по заданному полю $\vec{f}(x)$ нужно найти $\vec{u}(x)$ и $p(x)$ из следующих уравнений и краевых условий:

$$-\mu\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f} \ \text{(в } \Omega), \ \ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ \text{(в } \Omega), \ \ \vec{u} = \vec{0} \ \text{(на } \Gamma = \partial\Omega). \quad (2.3.9)$$

Эту задачу можно исследовать по схеме, изложенной в абстрактной ситуации в п. 1.2.4, с учетом наличия обобщенной формулы Грина (1.6.22), (1.6.23). Прежде всего, следует подобрать для задачи (2.3.9) соответствующую пару гильбертовых пространств.

В качестве пространства F здесь естественно взять гильбертово пространство векторных полей с конечной скоростью диссипации энергии, т.е.

$$\vec{J}_0^1(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega) : \ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ \text{(в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \ \text{(на } \Gamma)\}, \qquad (2.3.10)$$

норму в нем определить по закону (см. (1.6.21))

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{J}_0^1(\Omega)} := E(\vec{u},\vec{u}) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^3 |\tau_{jk}(\vec{u})|^2\, d\Omega, \qquad (2.3.11)$$

$$\tau_{jk}(\vec{u}) := \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \ \ j,k = \overline{1,3}, \ \ \vec{u} = \sum_{j=1}^3 u_j\vec{e}_j. \qquad (2.3.12)$$

Как доказано, например, в ([36], параграф 1.2), пространство $\vec{J}_0^1(\Omega)$ плотно не во всем $\vec{L}_2(\Omega)$, а в его подпространстве

$$\vec{J}_0(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \ \ u_n := \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \text{ (на } \Gamma)\}. \ (2.3.13)$$

Точнее говоря, $\vec{J}_0(\Omega)$ является замыканием в норме $\vec{L}_2(\Omega)$ множества финитных бесконечно дифференцируемых соленоидальных векторных полей.

Лемма 2.3.1. *Имеет место ортогональное разложение*

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega), \tag{2.3.14}$$

$$\vec{G}(\Omega) := \{\vec{v} = \nabla\varphi : \ \|\nabla\varphi\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, d\Omega < \infty, \ \int\limits_\Omega \varphi \, d\Omega = 0\}. \tag{2.3.15}$$

□

Доказательство этой леммы приведено, например, в ([36], с. 38 – 40) для случая гладкой границы $\Gamma = \partial\Omega$, однако разложение (2.3.14) справедливо и для липшицевой границы Г. Отметим еще, что последнее интегральное условие $\int\limits_\Omega \varphi \, d\Omega = 0$ взято лишь для однозначного определения потенциала $\varphi(x)$ в односвязной области Ω. Подпространство $\vec{G}(\Omega)$ называют подпространством потенциальных векторных полей.

Упражнение 2.3.3. Проверить на произвольных гладких элементах $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{v} = \nabla\varphi \in \vec{G}(\Omega)$, что они ортогональны. □

Отметим еще одно обстоятельство, о котором упоминалось в п. 1.6.1 и п. 1.6.2: норма (2.3.11) эквивалентна стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$ для элементов из $\vec{J}^1_0(\Omega)$.

Отсюда и из предыдущего следует, что $(\vec{J}^1_0(\Omega)\,;\,\vec{J}_0(\Omega))$ — гильбертова пара пространств, причем $\vec{J}^1_0(\Omega)$ компактно вложено в $\vec{J}_0(\Omega)$.

Используем этот факт, а также обобщенную формулу Грина (1.6.22), (1.6.23), которая в данном случае принимает вид

$$\langle \vec{\eta}, (-\mu\Delta\vec{u} + \nabla p) \rangle_{\vec{J}_0(\Omega)} = \mu E(\vec{\eta}, \vec{u}), \quad \forall \vec{\eta}, \vec{u} \in \vec{J}^1_0(\Omega). \tag{2.3.16}$$

Тогда в соответствии с общим подходом, изложенным в п. 1.2.4, можно определить обобщенное и слабое решения задачи (2.3.9).

В частности, если выполнено условие

$$\vec{f}(x) \in \vec{J}_0(\Omega), \tag{2.3.17}$$

то обобщенное решение определяется как такой элемент $\vec{u} \in \vec{J}^1_0(\Omega)$, для которого выполнено тождество

$$\mu E(\vec{\eta}, \vec{u}) = (\vec{\eta}, \vec{f})_{\vec{J}_0(\Omega)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{J}^1_0(\Omega). \tag{2.3.18}$$

Соответственно, при условии

$$\vec{f}(x) \in (\vec{J}_0^1(\Omega))^* \tag{2.3.19}$$

слабое решение задачи (2.3.9) в силу (2.3.16) определяется из тождества

$$\mu E(\vec{\eta}, \vec{u}) = \langle \vec{\eta}, \vec{f} \rangle_{\vec{J}_0(\Omega)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{J}_0^1(\Omega). \tag{2.3.20}$$

Как следует из общих рассмотрений п. 1.2.4, решение задачи (2.3.18) выражается формулой

$$\mu \vec{u} = A_0^{-1} \vec{f}, \quad \mathcal{D}(A_0) \subset \vec{J}_0^1(\Omega), \quad \mathcal{R}(A_0) = \vec{J}_0(\Omega), \tag{2.3.21}$$

где A_0 — оператор гильбертовой пары $(\vec{J}_0^1(\Omega)\,;\,\vec{J}_0(\Omega))$. Этот оператор положительно определен и имеет обратный положительный компактный оператор $A_0^{-1} :\ \vec{J}_0(\Omega) \to \vec{J}_0(\Omega)$.

Расширение этого оператора на $\mathcal{D}(A_0) = \vec{J}_0^1(\Omega)$, такое, что $\mathcal{R}(A_0) = (\vec{J}_0^1(\Omega))^*$, позволяет выразить слабое решение задачи (2.3.20) снова по формуле (2.3.21).

Таким образом, при условии (2.3.17) либо (2.3.19) задача (2.3.9) имеет единственное (обобщенное либо слабое) решение $\vec{u} \in \vec{J}_0^1(\Omega)$.

Возникает естественный вопрос: как найти давление $p(x)$ в задаче (2.3.9)? Рассмотрим эту проблему в "гладком случае", когда обобщенное решение $\vec{u}(x)$ обладает свойством

$$\vec{u}(x) \in \vec{J}_0^1(\Omega) \cap \vec{H}^1(\Omega),$$

т.е. его вторые производные являются элементами из $L_2(\Omega)$. В этом случае в уравнении (2.3.9) имеем

$$\vec{f}(x) \in \vec{J}_0(\Omega), \quad \Delta \vec{u}(x) \in \vec{L}_2(\Omega). \tag{2.3.22}$$

Эти свойства позволяют в явной форме получить выражение для $\nabla p(x)$.

Введем ортопроекторы $P_0 :\ \vec{L}_2(\Omega) \to\ \vec{J}_0(\Omega)$ и $P_G :\ \vec{L}_2(\Omega) \to\ \vec{G}(\Omega)$, отвечающие ортогональному разложению (2.3.14) пространства $\vec{L}_2(\Omega)$. Тогда, действуя ими на обе части уравнения (2.3.9), будем иметь соотношения

$$\mu(-P_0 \Delta \vec{u}) = \vec{f}, \quad \nabla p = \mu P_G \Delta \vec{u}. \tag{2.3.23}$$

Отсюда получаем следующие выводы. Поле давлений ∇p определяется через поле скоростей $\vec{u}$ и данные задачи. Далее, из первого соотношения

(2.3.23) следует, что оператор A_0 гильбертовой пары является расширением оператора

$$-P_0\Delta, \quad \mathcal{D}(-P_0\Delta) = \vec{J}_0^1(\Omega) \cap \vec{H}^1(\Omega), \tag{2.3.24}$$

на множество $\mathcal{D}(A_0) \subset \vec{J}_0^1(\Omega)$, $\mathcal{R}(A_0) = \vec{J}_0(\Omega)$.

Таким образом, несмотря на то, что в задаче (2.3.9) разыскиваются два поля, т.е. поле $\vec{u}(x)$ и поле $\nabla p(x)$, но $\nabla p(x)$ находится по известному полю $\vec{u}(x)$ (см. (2.3.23)). Вот почему при определении обобщенного либо слабого решения задачи (2.3.9) (см. (2.3.18) и (2.3.20)) фигурирует лишь поле $\vec{u}(x) \in \vec{J}_0^1(\Omega)$.

2°. *Вторая задача — однородная задача Неймана для неоднородного уравнения Стокса.*

Здесь по заданному полю $\vec{f}(x)$ нужно найти $\vec{v}(x)$ и $q(x)$ из следующих уравнений и краевых условий:

$$\begin{aligned}
&\mu(\vec{v} - \Delta\vec{v}) + \nabla q = \vec{f} \ \ (\text{в } \Omega), \ \ \operatorname{div}\vec{v} = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \\
&\partial\vec{v} = \sum_{j,k=1}^{3} (\mu\tau_{jk}(\vec{v}) - q\delta_{jk})n_k\vec{e}_j = \vec{\psi} \ \ (\text{на } \Gamma), \\
&\vec{n} = \sum_{k=1}^{3} n_k\vec{e}_k, \quad \vec{v} = \sum_{j=1}^{3} v_j\vec{e}_j.
\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

Здесь $\partial\vec{v}$ — напряжение в вязкой жидкости на границе $\Gamma = \partial\Omega$; это векторное поле, не обязательно ортогональное к касательной плоскости в каждой точке Γ. Отметим еще, что в отличие от задачи (2.3.9) здесь в первое уравнение (2.3.25) добавлено слагаемое $\mu\vec{v}$, позволяющее, как сейчас выяснится, подобрать соответствующую пару гильбертовых пространств, естественно связанных с задачей (2.3.25).

Так как искомое поле скоростей не обязано обращаться в нуль на $\Gamma = \partial\Omega$ и является соленоидальным, то в качестве пространства F гильбертовой пары $(F\,;\,E)$ в задаче (2.3.25) следует, в отличие от (2.3.9), взять множество

$$\vec{J}^1(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{H}^1(\Omega) : \ \operatorname{div}\vec{v} = 0 \ \ (\text{в } \Omega)\} \supset \vec{J}_0^1(\Omega), \tag{2.3.26}$$

Определим норму в $\vec{J}^1(\Omega)$ по закону

$$\|\vec{v}\|^2_{\vec{J}^1(\Omega)} := E(\vec{v},\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)}, \quad \forall\vec{v} \in \vec{J}^1(\Omega). \tag{2.3.27}$$

Тогда (см. (1.6.6)) эта норма будет эквивалентна стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$, а $\vec{J}^1(\Omega)$ будет полным гильбертовым пространством относительно этой нормы.

Из рассмотрений задачи 1° и из (2.3.25) следует, что $\vec{J}^1(\Omega)$ плотно не в подпространстве $\vec{J}_0(\Omega)$ (см. (2.3.13) — (2.3.15)), а в более широком подпространстве

$$\vec{J}(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) : \ \operatorname{div} \vec{v} = 0\}. \tag{2.3.28}$$

Здесь, в свою очередь, плотным множеством является совокупность соленоидальных (и не обязательно финитных) полей, заданных в области Ω. Оказывается, имеет место следующее ортогональное разложение (см., например, [5], с. 103):

$$\vec{J}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_h(\Omega), \tag{2.3.29}$$

$$\vec{G}_h(\Omega) := \{\vec{w} = \nabla\varphi : \ \Delta\varphi = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \ \int\limits_\Omega \varphi \, d\Omega = 0\} \subset \vec{G}(\Omega). \tag{2.3.30}$$

Упражнение 2.3.4. Проверить свойство (2.3.29) на гладких элементах из этих пространств. □

Подпространство $\vec{G}_h(\Omega)$ называют потенциально-гармоническим подпространством векторных полей. Здесь потенциалы являются гармоническими функциями, заданными в области Ω.

Разложения (2.3.14) и (2.3.29) порождают ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_h(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega) = \vec{J}(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega), \tag{2.3.31}$$

$$\vec{G}_0(\Omega) := \{\vec{v} = \nabla\psi \in \vec{L}_2(\Omega) : \ \psi = 0 \ \ (\text{на } \Gamma)\}, \tag{2.3.32}$$

которое называют разложением Вейля. Первоначально оно возникло в работах Г. Вейля по электродинамике.

Таким образом, как следует из вышеизложенного, $(\vec{J}^1(\Omega)\,;\,\vec{J}(\Omega))$ образуют гильбертову пару пространств, причем $\vec{J}^1(\Omega)$ компактно вложено в $\vec{J}(\Omega)$. Опираясь на формулы Грина (1.6.14), (1.6.17) – (1.6.18), приведем применительно к изучаемой проблеме (2.3.25) соответствующую обобщенную формулу Грина

$$\begin{gathered} \langle \vec{\eta}, \mu(\vec{u} - \Delta\vec{u}) + \nabla p \rangle_{\vec{J}(\Omega)} = \mu(E(\vec{\eta}, \vec{u}) + (\vec{\eta}, \vec{u})_{\vec{J}(\Omega)}) - \langle \gamma\vec{\eta}, \partial\vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \\ \forall \vec{\eta}, \vec{u} \in \vec{J}^1(\Omega), \ \ \forall \vec{\eta} := \vec{\eta}|_\Gamma. \end{gathered} \tag{2.3.33}$$

Отметим, что здесь в качестве $\vec{L}_2(\Gamma)$ взято пространство векторных полей, заданных на Γ, причем в силу условия соленоидальности $\operatorname{div}\vec{u} = 0$ (в Ω) для таких полей выполнено условие

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{u}_n \, d\Gamma := \int\limits_{\Gamma} \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\Gamma = 0. \tag{2.3.34}$$

Дальнейшая схема рассуждений при исследовании задачи (2.3.25) — такая же, как для задачи (2.3.9). Именно, опираясь на формулу Грина (2.3.33), определим при $\vec{f}(x) \in \vec{J}(\Omega)$ обобщенное решение $\vec{v}(x)$ задачи (2.3.25) как такой элемент из $\vec{J}^1(\Omega)$, для которого выполнено тождество

$$\mu(E(\vec{\eta},\vec{v}) + (\vec{\eta},\vec{v})_{\vec{J}(\Omega)}) = (\vec{\eta},\vec{f})_{\vec{J}(\Omega)}, \quad \forall\vec{\eta}\in\vec{J}^1(\Omega). \tag{2.3.35}$$

Соответственно, для $\vec{f}(x) \in (\vec{J}^1(\Omega))^*$ слабое решение задачи (2.3.25) определяется из тождества

$$\mu(E(\vec{\eta},\vec{v}) + (\vec{\eta},\vec{v})_{\vec{J}(\Omega)}) = \langle\vec{\eta},\vec{f}\rangle_{\vec{J}(\Omega)}, \quad \forall\vec{\eta}\in\vec{J}^1(\Omega). \tag{2.3.36}$$

Как следует из общей теории (см. п.1.2.4, п.2.1.1), решение задач (2.3.35) и (2.3.36) дается формулой

$$\mu\vec{v} = A^{-1}\vec{f} \in \vec{J}(\Omega), \tag{2.3.37}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(\vec{J}^1(\Omega)\,;\,\vec{J}(\Omega))$, причем для обобщенного решения

$$\mathcal{D}(A) \subset \vec{J}^1(\Omega), \quad \mathcal{R}(A) = \vec{J}(\Omega),$$

а для слабого решения (т.е. для расширения оператора A)

$$\mathcal{D}(A_0) = \vec{J}^1_0(\Omega), \quad \mathcal{R}(A_0) = (\vec{J}^1_0(\Omega))^*.$$

Как и в задаче 1°, оператор задачи 2° обладает свойствами

$$A:\,\mathcal{D}(A) \subset \vec{J}^1(\Omega)\vec{J}(\Omega) \to \vec{J}(\Omega),\;\; A \gg 0,\;\; 0 < A^{-1} < \mathcal{S}_\infty(\vec{J}(\Omega)). \tag{2.3.38}$$

Что касается процесса нахождения поля ∇q, то здесь можно провести те же рассуждения, что и в задаче 1°. Именно, для гладких решений $\vec{v}(x) \in \vec{J}(\Omega)\cap\vec{H}^1(\Omega)$ имеем, в силу первого уравнения (2.3.25),

$$\mu P_0(\vec{v} - \Delta\vec{v}) = P_0\vec{f}, \quad \mu P_G(\vec{v} - \Delta\vec{v}) = \nabla q, \tag{2.3.39}$$

т.е. снова потенциальное поле ∇q вычисляется по найденному полю $\vec{v} = \vec{v}(x)$ (здесь P_0 и P_G — те же ортопроекторы, что и в задаче 1°).

3°. *Третья задача — неоднородная задача Неймана для однородного уравнения Стокса.*

Если поле внешних сил отсутствует, а на границе $\Gamma = \partial\Omega$ задано напряжение в жидкости, то возникает задача

$$\mu(\vec{w} - \Delta\vec{w}) + \nabla s = \vec{0}, \ \operatorname{div}\vec{v} = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \partial\vec{w} = \vec{\psi} \ (\text{на } \Gamma), \qquad (2.3.40)$$

где $\partial\vec{w}$ определяется аналогично формулам из (2.3.25) по $\vec{w}$ и s.

Для изучения вопросов разрешимости этой задачи здесь снова следует взять пару гильбертовых пространств $(\vec{J}^1(\Omega)\,;\vec{J}(\Omega))$ и использовать формулу Грина (2.3.33).

Пусть выполнено условие

$$\vec{\psi}(x) \in \vec{L}_2(\Gamma), \qquad (2.3.41)$$

причем, как уже упоминалось выше (см. (2.3.34)),

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{\psi} \cdot \vec{n}\, d\Gamma = 0. \qquad (2.3.42)$$

Тогда, исходя из формулы Грина (2.3.33), определим обобщенное решение $\vec{w} = \vec{w}(x)$ задачи (2.3.40) как такой элемент из $\vec{J}(\Omega)$, для которого имеет место тождество

$$\mu(\vec{\eta},\vec{w})_{\vec{J}^1(\Omega)} := \mu(E(\vec{\eta},\vec{w}) + (\vec{\eta},\vec{w})_{\vec{J}(\Omega)}) = (\gamma\vec{\eta},\vec{\psi})_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \ \forall\vec{\eta} \in \vec{J}^1(\Omega). \qquad (2.3.43)$$

Как следует из общей теории (см. п. 2.1.2), при выполнении условий (2.3.41), (2.3.42) задача (2.3.40) имеет единственное обобщенное решение $\vec{w} \in \vec{J}^1(\Omega)$, и это решение принадлежит подпространству $\vec{J}^1_h(\Omega)$ тех функций из $\vec{J}^1(\Omega)$, которые ортогональны в пространстве $\vec{J}^1(\Omega)$ (с нормой (2.3.27)) подпространству $\vec{J}^1_0(\Omega)$. Таким образом, возникает ортогональное разложение

$$\vec{J}^1(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{J}^1_h(\Omega), \qquad (2.3.44)$$

$$\vec{J}^1_h(\Omega) := \{\vec{w} \in \vec{J}^1(\Omega) : \ \mu(\vec{w} - \Delta\vec{w}) + \nabla s = \vec{0}\}, \qquad (2.3.45)$$

Введем теперь оснащение пространства $\vec{L}_2(\Gamma)$. Если поле $\vec{u} = \sum\limits_{j=1}^{3} u_j\vec{e}_j \in \vec{J}^1(\Omega) \subset \vec{H}^1(\Omega)$, то по теореме Гальярдо (п. 1.4.2) следы каждой компоненты u_j поля $\vec{u}(x)$ принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma)$. Введем в окрестности Γ локальную криволинейную систему координат $\widetilde{O}\xi^1\xi^2\xi^3$ таким образом, чтобы ξ^1 и ξ^2 характеризовали координаты точек на Γ, т.е. $(\xi^1, \xi^2, 0) \in \Gamma$, а координатные ξ^3–линии на Γ были направлены перпендикулярно Γ, т.е. вдоль нормали $\vec{n}$ к Γ. Тогда совокупность полей, заданных на Γ и являющихся следами полей из $\vec{J}^1(\Omega)$, можно записать в виде

$$\vec{H}^{1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}_{\Gamma}, \tag{2.3.46}$$

где в последнем пространстве учтено условие (2.3.34), т.е.

$$H^{1/2}_{\Gamma} := \{\psi(\xi) \in H^{1/2}(\Gamma) : \int\limits_{\Gamma} \psi \, d\Gamma = 0\}. \tag{2.3.47}$$

Эти рассуждения показывают, что $(\vec{H}^{1/2}(\Gamma)\,; \vec{L}_2(\Gamma))$ — гильбертова пара пространств, причем $\vec{H}^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено (по теореме Гальярдо) в $\vec{L}_2(\Gamma)$. Отсюда следует, что имеет место оснащение

$$\vec{H}^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{L}_2(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^*, \tag{2.3.48}$$

а потому линейный функционал в $\vec{H}^{1/2}(\Gamma)$ может быть задан в виде

$$l(\vec{\varphi}) := \langle \vec{\varphi}, \vec{\psi} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\varphi} \in \vec{H}^{1/2}(\Gamma), \quad \vec{\psi} \in (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^*, \tag{2.3.49}$$

причем

$$|\langle \vec{\varphi}, \vec{\psi} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}| \leqslant \|\vec{\varphi}\|_{\vec{H}^{1/2}(\Gamma)} \cdot \|\vec{\psi}\|_{(\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^*}. \tag{2.3.50}$$

Будем теперь считать, что в задаче (2.3.40) выполнено условие

$$\vec{\psi}(x) \in (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{2.3.51}$$

Тогда слабое решение задачи (2.3.40) определяется из тождества

$$\mu(\vec{\eta}, \vec{w})_{\vec{J}^1(\Omega)} = \langle \gamma\vec{\eta}, \vec{\psi} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{J}^1(\Omega), \tag{2.3.52}$$

и при любом $\vec{\psi} \in (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^*$ существует единственное слабое решение $\vec{w} \in \vec{J}^1_h(\Omega) \subset \vec{J}^1(\Omega)$ задачи (2.3.40). Кроме того, совокупность всех слабых решений этой задачи, отвечающая всевозможным $\vec{\psi}(x)$ из $(\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^*$, составляет все подпространство $\vec{J}^1_h(\Omega)$.

4°. *Четвертая задача — неоднородная задача Неймана для неоднородного уравнения Стокса.*

Если задано поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(x)$, $x \in \Omega$, и напряжения в жидкости на границе $\Gamma = \partial\Omega$, то возникает задача

$$\mu(\vec{u} - \Delta\vec{u}) + \nabla p = \vec{f}, \;\; \operatorname{div}\vec{u} = 0 \;\; (\text{в } \Omega), \;\; \partial\vec{u} = \vec{\psi} \;\; (\text{на } \Gamma). \qquad (2.3.53)$$

Пусть выполнены условия

$$\vec{f}(x) \in (\vec{J}^1(\Omega))^*, \quad \vec{\psi}(x) \in (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^*. \qquad (2.3.54)$$

Тогда слабое решение этой задачи, с использованием формулы Грина (2.3.33), можно определить следующим образом:

$$\mu(E(\vec{\eta}, \vec{u}) + (\vec{\eta}, \vec{u})_{\vec{J}(\Omega)}) = \langle \vec{\eta}, \vec{f} \rangle_{\vec{J}(\Omega)} + \langle \gamma\vec{\eta}, \vec{\psi} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{J}^1(\Omega). \quad (2.3.55)$$

Упражнение 2.3.5. Опираясь на рассмотрения задач 2° и 3°, доказать, что при выполнении условий (2.3.54) существует единственное слабое решение задачи (2.3.53), которое выражается формулой

$$\mu\vec{u} = A^{-1}\vec{f} + T_h\vec{\psi}, \qquad (2.3.56)$$

где A — оператор гильбертовой пары $(\vec{J}^1(\Omega)\,;\,\vec{J}(\Omega))$, а $T_h \;:\; (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^* \to \vec{J}_h^1(\Omega)$ — оператор, представляющий решение задачи 3° через функцию $\vec{\psi}$, т.е. по определению

$$\mu\vec{w} = T_h\vec{\psi}. \qquad (2.3.57)$$

□

Глава 3

Спектральные проблемы и абстрактная формула Грина

В этой главе рассматриваются спектральные задачи, возникающие в различных приложениях. Их исследование можно проводить на основе изучения спектральных проблем в гильбертовом пространстве как для операторов, естественно связанных с той или иной задачей, так и соответствующих операторных пучков. При этом существенную роль играют преобразования исходной задачи к равносильной форме, и эти преобразования основаны на использовании абстрактной формулы Грина, а также аналогичной формулы для смешанных краевых задач.

3.1 Классические спектральные задачи математической физики

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – область с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$. Рассмотрим типичные классические спектральные задачи математической физики, возникающие в приложениях.

3.1.1 Задачи Дирихле, Неймана, Ньютона, Зарембы

Все эти задачи сформулируем в форме, позволяющей использование тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ со стандартной нормой, $L_2(\Gamma)$, а также обычного оператора следа γ.

Напомним (см. п. 1.4.4), что в этом случае имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:

$$\begin{aligned}&\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \eta, u \in H^1(\Omega),\\ &u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} \in (H^{1/2}(\Gamma))^*.\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

1°. *Задача Дирихле*:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma := \partial\Omega). \tag{3.1.2}$$

Здесь $u \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр.

Упражнение 3.1.1. Опираясь на формулу (3.1.1), убедиться, что собственные значения λ задачи (3.1.2) положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $L_2(\Omega)$, так и в $H_0^1(\Omega)$. □

2°. *Задача Неймана*:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.1.3}$$

Здесь искомое решение $u = u(x)$, $x \in \Omega$, является элементом $H^1(\Omega)$.

Упражнение 3.1.2. Доказать, что собственные значения λ задачи (3.1.3) положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $H^1(\Omega)$, так и в $L_2(\Omega)$.

Доказать, опираясь на максиминимальные принципы для собственных значений $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ задач (3.1.2) и (3.1.3) соответственно, что имеют место неравенства

$$\lambda_k^0 \geqslant \lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.1.4}$$

□

3°. *Задача Ньютона*:

Пусть $\sigma = \sigma(x) \geqslant 0$, $x \in \Gamma$, – непрерывная функция, заданная на Γ. Под спектральной задачей Ньютона понимают следующую проблему:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.1.5}$$

Очевидно, что при $\sigma = \sigma(x) \equiv 0$ задача Ньютона переходит в задачу Неймана.

Упражнение 3.1.3. Доказать, что собственные значения λ задачи (3.1.5) положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $L_2(\Omega)$, так и в пространстве $H^1_\sigma(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)} := \int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, d\Omega + \int\limits_\Gamma \sigma |u|^2 d\Gamma, \tag{3.1.6}$$

эквивалентной стандартной норме $H^1(\Omega)$. Доказать, что для собственных значений λ_k и $\lambda_{k,\sigma}$ задач (3.1.3) и (3.1.5) имеют место неравенства

$$\lambda_{k,\sigma} \geqslant \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{3.1.7}$$

□

3°. *Задача Зарембы*:

Так иногда называют спектральную задачу для уравнения

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \tag{3.1.8}$$

когда на одной части границы $\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$ задано однородное условие Дирихле, а на другой части Γ_2 – условие Ньютона–Неймана, причем $\partial\Gamma_1 = \partial\Gamma_2$ также липшицева:

$$u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2 := \Gamma \backslash \Gamma_1). \tag{3.1.9}$$

Упражнение 3.1.4. Доказать, что собственные значения λ задачи (3.1.8) – (3.1.9) положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $L_2(\Omega)$, так и в подпространстве $H^1_{0,\Gamma_1,\sigma}(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_1,\sigma}} := \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \sigma |u|^2 d\Gamma_2, \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{3.1.10}$$

эквивалентной стандартной норме $H^1(\Omega)$. Доказать, что для собственных значений $\{\lambda^0_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda^{0,\Gamma_1,0}_k\}_{k=1}^\infty$ задач (3.1.2) и (3.1.8) – (3.1.9) при $\sigma = 0$, имеют место неравенства

$$\lambda^0_k \geqslant \lambda^{0,\Gamma_1,0}_k, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{3.1.11}$$

□

3.1.2 Спектральные задачи Стеклова

Так называют класс задач, когда спектральный параметр λ входит не в уравнение, а в граничное условие.

1°. *Задача Стеклова со спектральным параметром на всей границе.*

Это задача вида

$$u-\Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)u = \lambda u \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega), \;\; \sigma(x) \geqslant 0. \quad (3.1.12)$$

Упражнение 3.1.5. Доказать, что собственные значения λ этой задачи положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $L_2(\Gamma)$, так и в пространстве $H^1_\sigma(\Omega)$ с квадратом нормы (3.1.6). □

2°. *Задача Стеклова со спектральным параметром на части границы.*

Пусть граница $\Gamma := \partial\Omega$ области Ω разбита на три непересекающиеся части Γ_1, Γ_2 и Γ_3 с их липшицевыми границами $\partial\Gamma_1$, $\partial\Gamma_2$, $\partial\Gamma_3$. Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$u-\Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)u = \lambda u \quad (\text{на } \Gamma_1), \qquad (3.1.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \qquad (3.1.14)$$

Здесь спектральный параметр λ входит лишь в граничное условие на Γ_1, а $\sigma(x)$ по-прежнему неотрицательная функция, заданная на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \partial\Gamma_{12}$. Отметим, что в постановке задачи возможны варианты, когда $|\Gamma_2| = 0$ или $|\Gamma_3| = 0$.

Упражнение 3.1.6. Доказать, что собственные значения λ задачи (3.1.13) – (3.1.14) положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $L_2(\Gamma_1)$, так и в подпространстве $H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}$ с квадратом нормы

$$\|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}} := \int\limits_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \sigma |u|^2 dS, \;\; u = 0 \; (\text{на } \Gamma_3). \quad (3.1.15)$$

Указание. Воспользоваться здесь, как и в упражнении 3.1.4, вместо

(3.1.1) формулой Грина для смешанных краевых задач:

$$\begin{gathered}\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{2} \Big\langle \gamma_k \eta, \frac{\partial u}{\partial n_k} \Big\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \\ \eta, u \in H^1_{0,\Gamma_3}(\Omega), \;\; \gamma_k \eta := \eta|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \;\; k = 1, 2, \\ u = 0 \;\; (\text{на } \Gamma_3), \;\; \frac{\partial u}{\partial n_k} := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in (H^{1/2}(\Gamma_k))^*. \end{gathered} \tag{3.1.16}$$

(Можно доказать, что в сформулированных предположениях такая формула Грина имеет место.)

□

3.1.3 Спектральные задачи Стефана

Задачами Стефана называют задачи математической физики, которые возникают при изучении процесса таяния льда либо процесса тигельной плавки металла. Соответствующие спектральные проблемы содержат спектральный параметр в уравнении и краевом условии.

1°. *Задача Стефана со спектральным параметром на всей границе.*
Это задача вида

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u = \lambda u \quad (\text{на } \Gamma := \partial\Omega). \tag{3.1.17}$$

Упражнение 3.1.7. Проверить, что собственные значения λ задачи (3.1.17) положительны и находятся по решению $u = u(x)$ по формуле

$$\lambda = \|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)} / (\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)}), \quad \gamma u := u|_\Gamma. \tag{3.1.18}$$

Убедиться, что собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в пространстве $H^1_\sigma(\Omega)$ с нормой (3.1.6), так и в пространстве L_2, в котором квадрат нормы равен знаменателю в (3.1.18). □

2°. *Задача Стефана со спектральным параметром на части границы.*

Она от задачи (3.1.13) – (3.1.14) отличается лишь тем, что спектральный параметр присутствует и в уравнении:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u = \lambda u \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{3.1.19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \tag{3.1.20}$$

Упражнение 3.1.8. Доказать, что собственные значения λ задачи (3.1.19) – (3.1.20) положительны и находятся по решению $u = u(x)$ по формуле

$$\begin{aligned} &\lambda = \|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}} / (\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma_1 u\|^2_{L_2(\Gamma_1)}), \\ &u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3), \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1}. \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

Убедиться, что собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в пространстве $H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}$ с квадратом нормы (3.1.15), так и в пространстве L_2 с квадратом нормы в виде знаменателя из (3.1.21). □

3.1.4 Спектральные задачи Аграновича

Так будем называть спектральные несамосопряженные задачи, возникающие в теории дифракции и детально изученные М.С. Аграновичем (см. [22]). Эти задачи содержат два комплексных параметра, один из которых фиксирован и считается заданным, а другой – спектральным.

Для тройки пространств $H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, обычного оператора следа γ имеем следующие задачи:

1°. *Задача Аграновича со спектральным параметром на всей границе.*

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ – фиксированный параметр, $\mu \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, а область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеет липшицеву границу $\Gamma := \partial\Omega$. Тогда внутренняя спектральная задача дифракции формулируется следующим образом:

$$u - \Delta u + \lambda u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u = \mu u \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.1.22}$$

Отметим, что если роли параметров меняются местами, т.е. λ является спектральным, а μ – фиксированным, то соответствующую проблему (3.1.22) в общем эллиптическом случае (а не для оператора $u - \Delta u$, как в уравнении (3.1.22)) исследовала В.И. Горбачук [37].

Упражнение 3.1.9. Проверить, что собственные значения μ задачи (3.1.22) находятся по ее решению $u = u(x)$ по формуле

$$\mu = (\lambda \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)}) / \|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)}, \tag{3.1.23}$$

откуда следует, что знаки $\operatorname{Im}\lambda$ и $\operatorname{Im}\mu$ совпадают, в частности,

$$\mu \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

2°. *Задача Аграновича со спектральным параметром на части границы.*

Эта задача по аналогии с (3.1.19) – (3.1.20) имеет следующую формулировку:

$$u - \Delta u + \lambda u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = \mu u \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{3.1.24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \tag{3.1.25}$$

Упражнение 3.1.10. Проверить, что собственные значения μ задачи (3.1.24) – (3.1.25) находятся по ее решению $u = u(x)$ по формуле

$$\mu = (\lambda \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}}) / \|\gamma_1 u\|^2_{L_2(\Gamma_1)}, \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1}, \tag{3.1.26}$$

а норма в $H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}$ определена формулой (3.1.15). Отсюда также следует, что знаки $\operatorname{Im}\lambda$ и $\operatorname{Im}\mu$ совпадают. □

3.1.5 Спектральные задачи С. Крейна

Такие задачи появляются при изучении проблемы малых нормальных колебаний вязкой тяжелой жидкости в частично заполненном сосуде. Они подробно изучались С.Г. Крейном, его учениками и соавторами. Здесь приведем лишь "скалярный" вариант этой задачи применительно к тройке пространств $H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ и обычного оператора следа γ.

1°. *Задача С. Крейна со спектральным параметром в граничном условии на всей границе.*

В этой задаче спектральный параметр λ присутствует как в уравнении, так и в граничном условии:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\Big) = u \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.1.27}$$

Упражнение 3.1.11. Доказать, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (3.1.27), а ненулевые собственные значения λ по решению $u = u(x)$ находятся из уравнения

$$\lambda \|u\|^2_{L_2(\Omega)} - \|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)} + \lambda^{-1} \|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)} = 0, \quad \gamma u := u|_\Gamma, \tag{3.1.28}$$

где норма в $H^1_\sigma(\Omega)$ определена формулой (3.1.6). Проверить, что

$$\operatorname{Re}\lambda = \|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)} / (\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + |\lambda|^{-2} \|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)}) > 0, \tag{3.1.29}$$

причем все собственные значения задачи (3.1.27) расположены в правой полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. □

2°. *Задача С. Крейна со спектральным параметром на части границы.*

Будем считать, как и в задачах (3.1.13) – (3.1.14), (3.1.19) – (3.1.20), что граница $\Gamma := \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на три части Γ_1, Γ_2 и Γ_3 с их липшицевыми границами $\partial\Gamma_1$, $\partial\Gamma_2$ и $\partial\Gamma_3$. Тогда по аналогии с этими задачами формулируемая задача С. Крейна выглядит следующим образом:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\Big) = u \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{3.1.30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \tag{3.1.31}$$

Здесь спектральный параметр λ входит в уравнение и лишь в первое краевое условие, т.е. на Γ_1.

Упражнение 3.1.12. Доказать, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (3.1.30) – (3.1.31), а для ненулевых собственных значений справедливо соотношение

$$\operatorname{Re}\lambda = \|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}} / (\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + |\lambda|^{-2}\|\gamma_1 u\|^2_{L_2(\Gamma_1)}), \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1}, \tag{3.1.32}$$

откуда следует, что все собственные значения λ расположены в правой полуплоскости. Убедиться также, что они расположены симметрично относительно вещественной оси. □

3.1.6 Спектральные задачи Чуешова

Такая задача появляется при исследовании движений динамических систем с поверхностной диссипацией энергии. Соответствующие нелинейные проблемы по данному направлению исследовали И.Д. Чуешов и его соавторы [19] – [21]. Здесь будут сформулированы линеаризованные спектральные проблемы в случае тех же пространств $H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ и обычного оператора следа γ.

1°. *Задача Чуешова с динамическим условием на всей границе.*

Если на границе $\Gamma := \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ происходит диссипация энергии динамической системы, то в линеаризованной начально-краевой задаче в граничном условии на Γ появляется слагаемое вида $\alpha\,\partial u(t,x)/\partial t$, где $\alpha > 0$ – параметр, характеризующий интенсивность поверхностной диссипации энергии. В соответствующей спектральной проблеме, когда решения $u(t,x)$ разыскиваются в виде

$$u(t,x) = u(x)\exp(-\lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

для нахождения амплитудных функций $u = u(x)$ возникает следующая задача

$$u - \Delta u + \lambda^2 u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = \alpha\lambda u \quad (\text{на } \Gamma). \qquad (3.1.33)$$

Таким образом, здесь спектральный параметр λ входит в уравнении во второй степени, а в граничном условии – в первой.

Упражнение 3.1.13. Убедиться, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (3.1.33), а ненулевые собственные значения находятся по решениям $u = u(x)$ из квадратного уравнения

$$\lambda^2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)} - \lambda\alpha\|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)} = 0, \ \alpha > 0, \gamma u := u|_\Gamma. \qquad (3.1.34)$$

Проверить, что все собственные значения λ находятся в правой комплексной полуплоскости и расположены симметрично относительно вещественной оси. □

2°. *Задача Чуешова с динамическим условием на части границы.*

Снова разбивая границу $\Gamma := \partial\Omega$ на три части, как это уже было сделано в проблеме (3.1.30) – (3.1.31) и других, приходим к следующей спектральной задаче:

$$u - \Delta u + \lambda^2 u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = \alpha\lambda u \quad (\text{на } \Gamma_1), \qquad (3.1.35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \qquad (3.1.36)$$

Упражнение 3.1.14. Проверить, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (3.1.35) – (3.1.36), а ненулевые собственные значения λ находятся по решению $u = u(x)$ из квадратного уравнения

$$\lambda^2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)} - \lambda\alpha\|\gamma_1 u\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}(\Omega)} = 0, \ \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1}. \qquad (3.1.37)$$

Снова убедиться, как и в предыдущем упражнении, что все собственные значения λ расположены симметрично относительно вещественной оси и находятся в правой полуплоскости. □

Подводя итоги рассмотрения приведенных спектральных задач, отметим, что здесь представлены как классические задачи, рассматриваемые в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$, так и некоторые новые несамосопряженные задачи (Аграновича, С. Крейна, Чуешова). При этом все они сформулированы для скалярных искомых функций и применительно к стандартной тройке пространств $H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ и обычного оператора следа.

3.2 Абстрактные спектральные задачи

В этом параграфе кратко изучаются абстрактные спектральные задачи, обобщающие классические и неклассические задачи математической физики, приведенные в параграфе 3.1. Основой для исследования задач такого вида является абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа. Каждая из изучаемых задач приводится к рассмотрению спектральной проблемы для самосопряженного оператора либо операторного пучка, действующего в гильбертовом пространстве.

Перед исследованием обсуждаемых ниже абстрактных спектральных задач напомним содержание основной теоремы о спектре (см. [2], а также, например, [4], параграф 2.3). Пусть $(F; E)$ — гильбертова пара пространств и A — оператор этой гильбертовой пары. Пусть, далее, пространство $F = E^{1/2}$ компактно вложено в $E : F \hookrightarrow\hookrightarrow E$. Тогда задача на собственные значения

$$Au = \lambda u,\ u \in \mathcal{D}(A) = E^1 \hookrightarrow\hookrightarrow E^{1/2} = F = \mathcal{D}(A^{1/2}) \hookrightarrow\hookrightarrow E = E^0, \quad (3.2.1)$$

имеет дискретный положительный спектр, т.е. имеют место следующие свойства:

1) спектр задачи (3.2.1) состоит из конечнократных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$,
$0 < \lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(A) \leqslant \ldots,\ \lambda_k(A) \longrightarrow +\infty\ (k \to \infty)$;

2) собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающие этим собственным значениям, ортогональны как в пространстве $E = E^0$, так и в энергетическом пространстве $H_A = F = E^{1/2}$; при этом выполнены формулы ортонормировки

$$(u_k, u_l)_E = \delta_{kl},\ \ (u_k, u_l)_F = \lambda_k(A)\,\delta_{kl},\ \ k, l \in \mathbb{N}. \quad (3.2.2)$$

3.2.1 Задача Дирихле

Будем считать, что для тройки пространств E, F, G и оператора следа γ выполнены условия существования абстрактной формулы Грина (см. (1.3.39) в главе 1):

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{3.2.3}$$

$$L \in \mathcal{L}(F, F^*), \quad \gamma \in \mathcal{L}(F, G_+), \quad \partial \in \mathcal{L}(F, (G_+)^*). \tag{3.2.4}$$

Абстрактная спектральная задача Дирихле по аналогии с (3.1.2) формулируется следующим образом:

$$Lu = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(L) = F \subset E, \quad \gamma u = 0\,. \tag{3.2.5}$$

Сразу сформулируем основной результат о свойствах решений задачи (3.2.5).

Теорема 3.2.1. *Пусть подпространство $N := \ker\gamma \subset F$ компактно вложено в E. Тогда задача (3.2.5) равносильна операторному уравнению*

$$A_0 u = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(A_0) \subset N, \tag{3.2.6}$$

где A_0 – оператор гильбертовой пары $(N; E)$ и потому он положительно определен, самосопряжен и имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(A_0)\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из конечнократных положительных собственных значений $\lambda_k(A_0)$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Система $\{u_k(A_0)\}_{k=1}^{\infty}$ его собственных элементов образует ортогональный базис в пространствах E и $N = \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \subset F$:

$$(u_k(A_0), u_l(A_0))_E = \delta_{kl}, \tag{3.2.7}$$

$$(A_0 u_k(A_0), u_l(A_0))_E = (u_k(A_0), u_l(A_0))_F = \lambda_k(A_0)\delta_{kl}. \tag{3.2.8}$$

Доказательство. Если $u \in \mathcal{D}(L) = F$ и $\gamma u = 0$, то $u \in N$. Воспользуемся теперь тождеством (1.2.66) из главы 1, которое определяет оператор A гильбертовой пары $(F;\, E)$:

$$\langle \eta, Au \rangle_E = (A^{1/2}\eta,\, A^{1/2}u)_E = (\eta, u)_F, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{3.2.9}$$

Так как N плотно в E и для любого $u \in N \subset F$ имеем

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in N,$$

то $(N;\, E)$ – гильбертова пара пространств. Далее, из (3.2.3) имеем

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F, \quad \forall \eta, u \in N. \tag{3.2.10}$$

Сравнивая (3.2.10) и (3.2.9), приходим к выводу, что оператор L с областью определения $\mathcal{D}(L) = N$ является оператором гильбертовой пары пространств $(N; E)$. Обозначая этот оператор через A_0, получаем, что задача (3.2.5) равносильна задаче (3.2.6).

Так как по условию N компактно вложено в E, то по основной теореме о спектре (см. введение в этот параграф) приходим к выводу, что задача (3.2.6), а вместе с ней и задача (3.2.5) имеют дискретный спектр со свойствами, описанными в формулировке данной теоремы.

□

Следствием этой теоремы является такое утверждение.

Теорема 3.2.2. *Задача Дирихле* (3.1.2) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$, *состоящий из собственных значений* $\lambda_k^0 := \lambda_k(A_0)$ *оператора* A_0, $0 < \lambda_1^0 \leqslant \lambda_2^0 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k^0 \leqslant \ldots, \quad \lambda_k^0 \to +\infty \, (k \to \infty)$, *и систему собственных функций* $\{u_k^0(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *образующих ортогональный базис в* $L_2(\Omega)$ *и* $H_0^1(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega} u_k^0(x) u_l^0(x) d\Omega = \delta_{kl}\,, \quad \int\limits_{\Omega} (\nabla u_k^0 \cdot \nabla u_l^0 + u_k^0 u_l^0) d\Omega = \lambda_k^0 \delta_{kl}\,, \qquad k, l = 1,\, 2,\, \ldots\,. \tag{3.2.11}$$

Доказательство. В самом деле в этой задаче $\ker\gamma = H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, причем $H_0^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$. Поэтому по теореме 3.2.1 при $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $N = H_0^1(\Omega)$, $\gamma u := u|_{\Gamma}$, $G = L_2(\Gamma)$ получаем сформулированные выше выводы. □

3.2.2 Задача Неймана

Абстрактная спектральная задача Неймана по аналогии с (3.1.3) формулируется следующим образом:

$$Lu = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(L) = F \subset E, \quad \partial u = 0. \tag{3.2.12}$$

Здесь тоже можно сразу сформулировать основной результат о свойствах решений спектральной задачи.

Теорема 3.2.3. *Задача* (3.2.12) *равносильна уравнению*

$$Au = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(A) := \{u \in \mathcal{D}(L) = F : \, \partial u = 0\}, \tag{3.2.13}$$

где A – оператор гильбертовой пары $(F;E)$. Если F компактно вложено в E, то оператор A самосопряжен, положительно определен и имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k := \lambda_k(A) > 0$, причем $\lambda_k \to +\infty\,(k \to \infty)$. Для собственных элементов $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, справедливы утверждения о базисности этих элементов в E и F, а также формулы ортогональности (3.2.7), (3.2.8) *с заменой A_0 на A.*

Для собственных значений $\lambda_k^0 := \lambda_k(A_0)$ задачи (3.2.6) *и собственных значений $\lambda_k := \lambda_k(A)$ задачи* (3.2.12) *справедливы неравенства*

$$\lambda_k(A_0) \geqslant \lambda_k(A), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.2.14}$$

Доказательство. Если $u \in \mathcal{D}(L) = F$ и $\partial u = 0$, то по формуле Грина (3.2.3) имеем

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F, \quad \eta \in F, \quad u \in \mathcal{D}(L), \quad \partial u = 0. \tag{3.2.15}$$

Поэтому для решений задачи (3.2.12) получаем

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = \langle \eta, \lambda u \rangle_E = (\eta, u)_F = (A^{1/2}\eta,\, A^{1/2}u)_F = \langle \eta, Au \rangle_E,\ \forall \eta \in F. \tag{3.2.16}$$

Отсюда следует, что

$$Lu = Au = \lambda u, \quad \mathcal{D}(A) := \{u \in \mathcal{D}(L) = F :\ \partial u = 0\}, \tag{3.2.17}$$

т.е. оператор A гильбертовой пары $(F;E)$ является оператором краевой задачи Неймана (3.2.12). Можно проверить, снова используя формулу Грина (3.2.3), что решения уравнения $Au = \lambda u$ являются также решениями задачи (3.2.12).

Если F компактно вложено в E, то оператор A^{-1} компактен, поэтому задача (3.2.13) имеет дискретный спектр, и справедливы утверждения данной теоремы о базисности и ортогональности собственных элементов.

Неравенства (3.2.14) следуют из максиминимальных принципов для собственных значений задач (3.2.6) и (3.2.13) и того факта, что N является подпространством F. $\square$

В качестве следствия из теоремы 3.2.3 получаем такой результат.

Теорема 3.2.4. *Задача Неймана* (3.1.3) *имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из собственных значений λ_k, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$, $\lambda_k \to +\infty\,(k \to \infty)$, и систему собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, образующих ортогональный базис в $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$:*

$$\int\limits_{\Omega} u_k(x)u_l(x)d\Omega = \delta_{kl}\,, \quad \int\limits_{\Omega}(\nabla u_k \cdot \nabla u_l + u_k u_l)d\Omega = \lambda_k\delta_{kl}\,, \qquad k,l = 1,\,2,\,\ldots\,. \tag{3.2.18}$$

Для собственных значений λ_k^0 *и* λ_k *задач* (3.1.2) *и* (3.1.3) *соответственно имеют место неравенства*

$$\lambda_k^0 \geqslant \lambda_k, \quad k = 1,\,2,\,\ldots\,. \tag{3.2.19}$$

Доказательство. Оно такое же, как в теореме 3.2.2. Здесь $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, причем $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$. Неравенства (3.2.19) следуют из того, что $H_0^1(\Omega)$ – бесконечномерное подпространство $H^1(\Omega)$. □

3.2.3 Задача Ньютона

Пусть $\sigma \in \mathcal{L}(G_+, (G_+)^*)$ – оператор, обладающий свойством неотрицательности:

$$\langle\varphi,\,\sigma\varphi\rangle_G \geqslant 0, \quad \forall\varphi \in G_+. \tag{3.2.20}$$

Под абстрактной спектральной задачей Ньютона понимают следующую проблему:

$$Lu = \lambda u, \quad (u \in \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) = F), \quad \partial u + \sigma\gamma u = 0. \tag{3.2.21}$$

При исследовании этой задачи можно применить те же приемы, что и выше, в теоремах 3.2.1 и 3.2.3, с учетом усложнений, связанных с наличием оператора σ в граничном условии (3.2.21).

Теорема 3.2.5. *Задача* (3.2.21) *равносильна уравнению*

$$\lambda A^{-1}u = u + K_\sigma u, \quad u \in F, \quad K_\sigma := P_M\gamma_M^*\sigma\gamma_M P_M, \tag{3.2.22}$$

где A – оператор гильбертовой пары $(F;E)$, $P_M : F \to M$ – ортопроектор на M, $F = N \oplus M$, а $K_\sigma : F \to F$ – ограниченный неотрицательный оператор. Если F компактно вложено в E, то задачи (3.2.21) *и* (3.2.22) *имеют дискретный спектр* $\{\lambda_k(A_\sigma)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_k(A_\sigma) \to +\infty\,(k \to \infty)$,

$$\begin{aligned} &A_\sigma := (I + K_\sigma)^{1/2}A(I + K_\sigma)^{1/2}, \\ &\mathcal{D}(A_\sigma) = \mathcal{R}(A_\sigma^{-1}) = \mathcal{R}((I + K_\sigma)^{-1/2}A^{-1}(I + K_\sigma)^{-1/2}) \subset F. \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *этих задач, отвечающие собственным значениям* $\{\lambda_k(A_\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$, *образуют ортогональный базис в* E *и в пространстве* F_σ *с квадратом нормы*

$$\|u\|_{F_\sigma}^2 := \|u\|_F^2 + \langle \gamma u, \, \sigma \gamma u \rangle_G, \tag{3.2.24}$$

эквивалентной норме пространства F. *При этом выполнены свойства ортогональности*

$$(u_k, u_l)_E = \delta_{kl}, \quad (u_k, u_l)_F + \langle \gamma u_k, \, \sigma \gamma u_l \rangle_G = \lambda_k(A_\sigma)\delta_{kl}. \tag{3.2.25}$$

Для собственных значений $\lambda_k(A)$ *задачи* (3.2.13) *и собственных значений* $\lambda_k(A_\sigma)$ *задачи* (3.2.22) *выполнены неравенства*

$$\lambda_k(A_\sigma) \geqslant \lambda_k(A), \quad k = 1, \, 2, \, \ldots \, . \tag{3.2.26}$$

Доказательство. Если $u \in \mathcal{D}(L) = F$ – решение задачи (3.2.21), то по формуле Грина (3.2.3) имеем

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = \langle \eta, \lambda u \rangle_E = (\eta, \lambda u)_E = (\eta, u)_F + \langle \gamma \eta, \sigma \gamma u \rangle_G, \ \ \forall \eta \in F. \tag{3.2.27}$$

Отсюда при $\eta = u$ с учетом свойства (3.2.20) получаем, что собственные значения λ задачи (3.2.21) положительны.

Напомним (см. [2], [4]), что ненулевой элемент $u \in F$ называют обобщенным собственным элементом задачи (3.2.21), отвечающим собственному значению λ, если выполнено тождество (3.2.27) при любом $\eta \in F$.

Рассмотрим при $\eta, u \in F$ билинейную (полуторалинейную) форму $\langle \gamma \eta, \sigma \gamma u \rangle_G$. Так как $\sigma \in \mathcal{L}(G_+, \, G_-)$, $\gamma \in \mathcal{L}(F, \, G_+)$, то эта форма имеет представление

$$\langle \gamma \eta, \sigma \gamma u \rangle_G = (\eta, K_\sigma u)_F, \quad K_\sigma \in \mathcal{L}(F). \tag{3.2.28}$$

Действительно, пусть $P_M : F \to M$ – ортопроектор на $M \subset F$. Тогда для любого $u \in F$ имеем $\gamma u = \gamma_M P_M u$, так как $\gamma w = 0$ для $w = P_N u \in N = F \ominus M$. Вспоминая еще соотношения $T_M = (\partial_M)^{-1} = \gamma_M^*$ (см. п.1.3.2) и используя тождество (1.3.14) главы 1, приходим к тождеству

$$\begin{aligned} &\langle \gamma \eta, \sigma \gamma u \rangle_G = \langle \gamma_M P_M \eta, \sigma \gamma_M P_M u \rangle_G = \\ &= (P_M \eta, \gamma_M^* \sigma \gamma_M P_M u)_F = (\eta, P_M \gamma_M^* \sigma \gamma_M P_M u)_F, \ \forall \eta, u \in F. \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Отсюда и из (3.2.28) следует, что K_σ имеет представление (3.2.22) и является ограниченным неотрицательным оператором, действующим в F.

Учитывая еще соотношение

$$(\eta, u)_E = (A^{1/2}\eta,\ A^{-1/2}u)_E = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}(A^{-1}u))_E = (\eta, A^{-1}u)_F,\ \eta, u \in F, \tag{3.2.30}$$

из тождества (3.2.27) получаем

$$(\eta, (\lambda A^{-1}u - u - K_\sigma u))_F = 0, \quad \forall \eta \in F, \tag{3.2.31}$$

откуда следует, в силу произвольности $\eta \in F$, что решения задачи (3.2.21) удовлетворяют уравнению (3.2.22). Однако все проведенные преобразования можно обратить, использовать формулу Грина (3.2.3) и от (3.2.22) вернуться к задаче (3.2.21). Поэтому эти две задачи равносильны.

Докажем теперь, что задача (3.2.22) имеет дискретный спектр и выполнены остальные утверждения данной теоремы. Так как $K_\sigma \geqslant 0$ и ограничен, то $I + K_\sigma \geqslant I \gg 0$ и потому имеет ограниченный обратный оператор, который является положительно определенным. Учитывая этот факт, осуществим в (3.2.22) замену

$$(I + K_\sigma)^{1/2}u = v \in F \tag{3.2.32}$$

и применим слева оператор $(I + K_\sigma)^{-1/2}$. Это дает уравнение

$$\lambda A_\sigma^{-1}v = v,\ A_\sigma^{-1} := (I + K_\sigma)^{-1/2}A^{-1}(I + K_\sigma)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(F), \tag{3.2.33}$$

равносильное спектральной задаче

$$A_\sigma v = \lambda v, \quad v \in \mathcal{D}(A_\sigma) = \mathcal{R}(A_\sigma^{-1}). \tag{3.2.34}$$

Так как A_σ^{-1} – компактный положительный оператор (проверьте это!) в пространстве F, то задачи (3.2.33) и (3.2.34) имеют дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(A_\sigma)\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $+\infty$. Собственные элементы $\{v_k\}_{k=1}^\infty$, $v_k := v_k(A_\sigma)$, этих задач образуют ортогональный базис в пространстве F и по форме оператора A_σ^{-1}; их можно выбрать удовлетворяющими следующим свойствам ортогональности:

$$(A_\sigma^{-1}v_k, v_l)_F = \delta_{kl},\ (v_k, v_l)_F = \lambda_k(A_\sigma)\delta_{kl},\ k, l = 1, 2, \ldots . \tag{3.2.35}$$

Отсюда, с использованием обратной замены (3.2.32) и формулы (3.2.28), приходим к формулам (3.2.25).

Отметим в заключение доказательства, что неравенства (3.2.26) следуют из максиминимальных принципов для собственных значений спектральных задач (3.2.13) и (3.2.34), а также из неравенства

$$\|u\|^2_{F_\sigma} \geqslant \|u\|^2_F, \quad \forall u \in F = F_\sigma, \tag{3.2.36}$$

следующего из (3.2.24) и свойства (3.2.20). □

Упражнение 3.2.1. Проверить, что решения задачи (3.2.22) являются также решениями задачи (3.2.21). □

Из теоремы 3.2.5 получаем следствие о свойствах решений спектральной задачи (3.1.5).

Теорема 3.2.6. *Задача Ньютона* (3.1.5) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k(A_\sigma)\}_{k=1}^\infty$, $0 < \lambda_1(A_\sigma) \leqslant \lambda_2(A_\sigma) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(A_\sigma) \leqslant \ldots$,
$\lambda_k(A_\sigma) \to +\infty\,(k \to \infty)$, *и систему собственных функций* $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$, *образующих ортогональный базис в* $L_2(\Omega)$ *и по форме* $H^1_\sigma(\Omega)$ *:*

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega u_k(x) u_l(x) d\Omega = \delta_{kl}\,, \\ &\int\limits_\Omega (\nabla u_k \cdot \nabla u_l + u_k u_l) d\Omega + \int\limits_\Gamma \sigma u_k u_l d\Gamma = \lambda_k(A_\sigma)\delta_{kl}\,. \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Для собственных значений λ_k *и* $\lambda_k(A_\sigma)$ *задач Неймана и Ньютона соответственно (см.* (3.1.3), (3.1.5)*) имеют место неравенства*

$$\lambda_k \leqslant \lambda_k(A_\sigma), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots\,. \tag{3.2.38}$$

□

Упражнение 3.2.2. Выведите соотношения (3.2.37), обоснуйте неравенства (3.2.38). □

3.2.4 Задача Стеклова

Абстрактным обобщением задачи (3.1.12) является следующая спектральная проблема:

$$Lw = 0, \quad \partial w + \sigma\gamma w = \lambda\sigma_0\gamma w, \tag{3.2.39}$$

где операторы $\sigma \in \mathcal{L}(G_+,\, (G_+)^*)$ и $\sigma_0 \in \mathcal{L}(G)$ обладают следующими свойствами:

$$\langle \varphi,\, \sigma\varphi\rangle_G \geqslant 0, \quad (\varphi,\, \sigma_0\varphi)_G \geqslant c_0^2\,\|\varphi\|^2_G, \quad \forall \varphi \in G_+, \quad c_0 \neq 0. \tag{3.2.40}$$

Здесь спектральный параметр λ входит лишь в краевое условие.

Теорема 3.2.7. *Пусть* G_+ *компактно вложено в* G *и выполнены сформулированные выше условия. Тогда задача* (3.2.39) – (3.2.40) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$, $\lambda_k \longrightarrow +\infty$ $(k \to \infty)$, *и систему собственных элементов* $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, *ортогональных по формам* $(\gamma w,\, \sigma_0 \gamma w)_G$ *и* $\|w\|_F^2 + \langle \gamma w,\, \sigma \gamma w\rangle_G$ *и образующих базис в подпространстве* $M \subset F$, $M = F \ominus N$, $N = \ker \gamma$. *Эти элементы можно выбрать удовлетворяющими следующим условиям ортонормированности:*

$$(\gamma w_k,\, \sigma_0 \gamma w_l)_G = \delta_{kl}, \quad (w_k, w_l)_F + \langle \gamma w_k,\, \sigma \gamma w_l \rangle_G = \lambda_k \delta_{kl}\,. \tag{3.2.41}$$

Доказательство. Заметим сначала, что из условия $Lw = 0$ следует, что $w \in M = F \ominus N$, $N := \ker \gamma$. Тогда

$$\begin{gathered} \gamma w = \gamma_M w =: \varphi \in G_+, \quad \partial w = \partial_M w = (\gamma_M T_M)^{-1} \gamma_M w = \\ = (\gamma_M \gamma_M^*)^{-1} \gamma_M w = (\gamma_M^*)^{-1}, \quad w = \gamma_M^{-1} \varphi, \quad \|w\|_F = \|\varphi\|_{G_+}. \end{gathered} \tag{3.2.42}$$

Поэтому граничное условие в (3.2.39) в этих терминах можно переписать в виде

$$B\varphi := ((\gamma_M^*)^{-1} \gamma_M^{-1} + \sigma)\varphi = \lambda \sigma_0 \varphi, \quad \varphi \in G_+ \subset G. \tag{3.2.43}$$

Здесь оператор $\sigma_0 : G \to G$ ограничен, положительно определен и самосопряжен в пространстве G. Покажем, что оператор B, стоящий слева в (3.2.43), является положительно определенным неограниченным самосопряженным оператором, действующим в G и заданным на тех же элементах $\varphi \in G_+ \subset G$, для которых $B\varphi \in G$.

С этой целью вычислим квадратичный функционал

$$\begin{aligned} &(\varphi,\, B\varphi)_G = \langle \varphi,\, B\varphi \rangle_G = \langle \varphi,\, (\gamma_M^*)^{-1} \gamma_M^{-1} \varphi \rangle_G + \langle \varphi,\, \sigma\varphi \rangle_G = \\ &= \|\gamma_M^{-1} \varphi\|_F^2 + \langle \varphi,\, \sigma\varphi \rangle_G = \|w\|_F^2 + \langle \varphi,\, \sigma\varphi \rangle_G = \\ &= \|\varphi\|_{G_+}^2 + \langle \varphi,\, \sigma\varphi \rangle_G, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B). \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

Отсюда и из свойств оператора σ следует, что

$$\begin{gathered} \|\varphi\|_{G_+}^2 \leqslant (\varphi, B\varphi)_G = \|B^{1/2}\varphi\|_G^2 = \|\varphi\|_B^2 \leqslant (1 + \|\sigma\|) \|\varphi\|_{G_+}^2, \\ \varphi \in \mathcal{D}(B), \end{gathered} \tag{3.2.45}$$

так как

$$\langle \varphi,\, \sigma\varphi \rangle_G \leqslant \|\varphi\|_{G_+} \cdot \|\sigma\varphi\|_{(G_+)^*} \leqslant \|\varphi\|_{G_+} \cdot (\|\sigma\| \cdot \|\varphi\|_{G_+}) = \|\sigma\| \cdot \|\varphi\|_{G_+}^2. \tag{3.2.46}$$

Поэтому после замыкания, т.е. после перехода от множества $\mathcal{D}(B)$ до всего G_+, приходим к выводу, что имеют место двусторонние оценки

$$\|\varphi\|^2_{G_+} \leqslant \|\varphi\|^2_B \leqslant (1 + \|\sigma\|)\|\varphi\|^2_{G_+}, \quad \forall \varphi \in H_B = \mathcal{D}(B^{1/2}), \tag{3.2.47}$$

где H_B – энергетическое пространство оператора B.

Заметим теперь, что энергетическое пространство H_{σ_0} с нормой

$$\|\varphi\|^2_{\sigma_0} := (\varphi, \sigma_0\varphi)_G = \|{\sigma_0}^{1/2}\varphi\|^2_G\,, \tag{3.2.48}$$

в силу эквивалентности норм (3.2.48) и пространства G, совпадает с G, а собственные значения λ задачи (3.2.43) совпадают с собственными значениями вариационного отношения

$$\frac{\|\varphi\|^2_B}{\|\varphi\|^2_{\sigma_0}} = \frac{\|\varphi\|^2_{G_+} + \langle\varphi, \sigma\varphi\rangle_G}{(\varphi, \sigma_0\varphi)_G}, \quad \varphi \in G_+\,. \tag{3.2.49}$$

Так как по условию теоремы G_+ компактно вложено в G, то в силу установленных выше фактов H_B компактно вложено в H_{σ_0}. Поэтому по основной теореме о спектре (см. введение к параграфу) задача (3.2.43), а вместе с ней и исходная задача (3.2.39) имеют дискретный положительный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений λ_k с предельной точкой $\lambda = +\infty$.

При этом собственным значениям λ_k задачи (3.2.43) отвечает система собственных элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset G_+$, образующих ортогональный базис по формам операторов B и σ_0:

$$(\varphi_k, \sigma_0\varphi_l)_G = \delta_{kl}, \quad (B\varphi_k, \varphi_l)_G = \lambda_k\delta_{kl}\,. \tag{3.2.50}$$

Так как между элементами G_+ и M имеется изометрический изоморфизм (см. последнюю формулу в (3.2.42)), то элементы

$$\{w_k\}_{k=1}^\infty, \quad w_k = \gamma_M^{-1}\varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \tag{3.2.51}$$

образуют базис в M, ортогональный по формам

$$(\gamma w, \sigma_0\gamma w)_G, \quad \|w\|^2_F + \langle\gamma w, \sigma\gamma w\rangle_G\,.$$

Отсюда и из (3.2.50) следует, что выполнены формулы ортогональности (3.2.41). $\square$

Следствием теоремы 3.2.7 является такое утверждение.

Теорема 3.2.8. *Задача Стеклова* (3.1.12) *имеет дискретный положительный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = +\infty$, *а собственные элементы* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающие собственным значениям* λ_k, *образуют базис в подпространстве* $H_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ *(гармонических функций из* $H^1(\Omega)$*), и для элементов* $u_k(x)$ *этого базиса выполнены следующие формулы ортогональности*

$$\int_{\Gamma} u_k u_l d\Gamma = \delta_{kl}\,, \int_{\Omega} (\nabla u_k \cdot \nabla u_l + u_k u_l) d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma u_k u_l d\Gamma = \lambda_k \delta_{kl}\,. \quad (3.2.52)$$

□

Упражнение 3.2.3. Доказать теорему 3.2.8. □

3.2.5 Задача Стефана

Сформулируем абстрактную постановку этой задачи, обобщающую задачу (3.1.17). Она имеет следующий вид:

$$Lu = \lambda u, \quad \partial u + \sigma \gamma u = \lambda \sigma_0 u. \quad (3.2.53)$$

Будем считать, что здесь выполнены условия

$$\sigma \in \mathcal{L}(G_+, (G_+)^*), \quad \langle \varphi, \sigma\varphi \rangle_G \geqslant 0, \quad \varphi \in G_+, \quad (3.2.54)$$

$$\sigma_0 \in \mathfrak{S}_\infty(G_+, (G_+)^*), \quad \langle \varphi, \sigma_0\varphi \rangle_G \geqslant 0, \quad \varphi \in G_+. \quad (3.2.55)$$

Отметим, что при $\sigma_0 = 0$ получаем задачу Ньютона (3.2.21), а при $\sigma_0 = \sigma = 0$ – задачу Неймана (3.2.22).

Теорема 3.2.9. *Задача* (3.2.53) – (3.2.55) *равносильна уравнению*

$$\lambda(A^{-1} + K_{\sigma_0})u = (I + K_\sigma)u, \quad u \in F, \quad (3.2.56)$$

$$K_{\sigma_0} := P_M \gamma_M^* \sigma_0 \gamma_M P_M \geqslant 0, \quad K_\sigma := P_M \gamma_M^* \sigma \gamma_M P_M \geqslant 0. \quad (3.2.57)$$

Если F *компактно вложено в* E, *то задачи* (3.2.53) – (3.2.55) *и* (3.2.56) – (3.2.57) *имеют дискретный спектр* $\{\lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma})\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma}) \to +\infty\,(k \to \infty)$,

$$A_{\sigma_0,\sigma} := (I + K_\sigma)^{1/2}(A^{-1} + K_{\sigma_0})^{-1}(I + K_\sigma)^{1/2}, \quad (3.2.58)$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(A_{\sigma_0,\sigma}) = \mathcal{R}(A_{\sigma_0,\sigma}^{-1}) = \\ &= \mathcal{R}((I + K_\sigma)^{-1/2}(A^{-1} + K_{\sigma_0})(I + K_\sigma)^{-1/2})\,. \end{aligned} \quad (3.2.59)$$

Собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ этих задач образуют ортогональный базис по формам

$$\|u\|_E^2 + \langle \gamma u,\, \sigma_0 \gamma u\rangle_G, \quad \|u\|_F^2 + \langle \gamma u,\, \sigma \gamma u\rangle_G\,;$$

для этих собственных элементов выполнены следующие формулы ортогональности:

$$\begin{aligned} &(u_k,\, u_l)_E + \langle \gamma u_k,\, \sigma_0 \gamma u_l\rangle_G = \delta_{kl}, \\ &(u_k, u_l)_F + \langle \gamma u_k,\, \sigma \gamma u_l\rangle_G = \lambda_k(A_{\sigma_0,\,\sigma})\delta_{kl}\,. \end{aligned} \tag{3.2.60}$$

Доказательство. Оно повторяет с некоторыми усложнениями схему доказательства теоремы 3.2.5.

Если $u \in \mathcal{D}(L) = F$ – решение задачи (3.2.53), то для этого решения по формуле Грина (3.2.3) приходим к тождеству

$$(\eta, \lambda u)_E + \langle \gamma\eta, \lambda\sigma_0\gamma u\rangle_G = (\eta, u)_F + \langle \gamma\eta, \sigma\gamma u\rangle_G, \quad \forall \eta \in F. \tag{3.2.61}$$

Если это тождество выполнено для некоторого λ и ненулевого $u \in F$, то такой элемент u будем называть слабым решением спектральной задачи (3.2.53) – (3.2.55).

Из (3.2.61) при $\eta = u$ следует, что

$$\lambda = (\|u\|_F^2 + \langle \gamma u, \sigma\gamma u\rangle_G)/(\|u\|_E^2 + \langle \gamma u, \sigma_0\gamma u\rangle_G) > 0\,. \tag{3.2.62}$$

Проверим, что тождество (3.2.61) равносильно операторному уравнению (3.2.56), где K_{σ_0} и K_σ определены формулами (3.2.57). Доказательство этих формул – такое же, как соотношений (3.2.28), (3.2.29). Тогда вместо (3.2.61) получаем тождество

$$(\eta, \lambda A^{-1}u)_F + (\eta, \lambda K_{\sigma_0}u)_F = (\eta, u)_F + (\eta, K_\sigma u)_F, \quad \forall \eta \in F, \tag{3.2.63}$$

откуда и следует (3.2.56).

Отметим свойства операторов K_{σ_0} и K_σ, следующие из (3.2.54), (3.2.55) и представлений (3.2.57). Оба этих оператора неотрицательны, причем K_{σ_0} компактен, а K_σ – ограничен в F.

Осуществим теперь в (3.2.56) замену

$$(I + K_\sigma)^{1/2}u = v \in F, \tag{3.2.64}$$

а затем подействуем слева в (3.2.56) оператором $(I + K_\sigma)^{-1/2} \in \mathcal{L}(F)$. Тогда возникает спектральная задача

$$\lambda A^{-1}_{\sigma_0,\,\sigma} v := \lambda(I+K_\sigma)^{-1/2}(A^{-1}+K_{\sigma_0})(I+K_\sigma)^{-1/2}v = v, \quad v \in F, \tag{3.2.65}$$

где $A^{-1}_{\sigma_0,\,\sigma}$ – компактный положительный оператор в F. В самом деле, свойство компактности этого оператора следует из того, что оператор $(I+K_\sigma)^{-1/2}$ ограничен, K_{σ_0} – неотрицателен и компактен, а потому $A^{-1}+K_{\sigma_0}$ – компактный положительный оператор в F.

Задача (3.2.65) равносильна уравнению

$$A_{\sigma_0,\,\sigma}v=\lambda v,\quad v\in\mathcal{D}(A_{\sigma_0,\,\sigma})\subset F, \tag{3.2.66}$$

где $A_{\sigma_0,\,\sigma}$ определен формулами (3.2.58), (3.2.59). Из свойства положительности и компактности $A^{-1}_{\sigma_0,\,\sigma}$ следует, что задачи (3.2.65) и (3.2.66) имеют дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(A_{\sigma_0,\,\sigma})\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}_+$, $\lambda_k(A_{\sigma_0,\,\sigma})\to+\infty\,(k\to\infty)$, а система собственных элементов $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в F и по форме $(A^{-1}_{\sigma_0,\,\sigma}v,v)_F$. Если для элементов $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ выбрать условия ортонормировки в виде

$$(A^{-1}_{\sigma_0,\,\sigma}v_k,v_l)_F=\delta_{kl},\quad (v_k,v_l)_F=\lambda_k(A_{\sigma_0,\,\sigma})\delta_{kl}\,, \tag{3.2.67}$$

то после обратной замены (3.2.64) для собственных элементов $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задач (3.2.56), (3.2.53) приходим к формулам (3.2.60), если учесть соотношения

$$(\eta,K_{\sigma_0}u)_F=\langle\gamma\eta,\sigma_0\gamma u\rangle_G,\quad (\eta,K_\sigma u)_F=\langle\gamma\eta,\sigma\gamma u\rangle_G. \tag{3.2.68}$$

$\square$

Упражнение 3.2.4. Доказать, что для собственных значений задачи (3.2.66) с операторными коэффициентами σ_0, σ, удовлетворяющими общим свойствам (3.2.54), (3.2.55), справедливы неравенства

$$\lambda_k(A_{0,\,\sigma})\geqslant\lambda_k(A_{\sigma_0,\,\sigma})\geqslant\lambda_k(A_{\sigma_0,\,0}),\quad k=1,2\,\ldots\,. \tag{3.2.69}$$

$\square$

Упражнение 3.2.5. Доказать, что спектральная задача Стефана (3.1.17) имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k\leqslant\ldots$, $\lambda_k\to+\infty$ $(k\to\infty)$, а система собственных элементов $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\subset H^1(\Omega)$ образует ортогональный базис по формам

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)}+\langle\gamma u,\,\sigma\gamma u\rangle_{L_2(\Gamma)},\ \|u\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)},\ \Gamma:=\partial\Omega\,, \tag{3.2.70}$$

и выполнены следующие условия ортогональности:

$$\int\limits_\Omega u_ku_l d\Omega+\int\limits_\Gamma u_ku_l d\Gamma=\delta_{kl}\,,\int\limits_\Omega(\nabla u_k\cdot\nabla u_l+u_ku_l)d\Omega+\int\limits_\Gamma\sigma u_ku_l d\Gamma=\lambda_k\delta_{kl}\,.$$

3.2.6 Задача Аграновича

Абстрактным обобщением задачи (3.1.22), возникшей в теории дифракции, является следующая проблема:

$$Lu + \lambda u = 0, \quad \partial u + \sigma\gamma u = \mu\sigma_0\gamma u, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}. \tag{3.2.71}$$

Относительно операторов σ и σ_0 по-прежнему предполагаем, что для них выполнены условия (3.2.54) – (3.2.55).

Нетрудно видеть, что задача (3.2.71) получается из задачи Стефана (3.2.53), если в первом уравнении (3.2.53) параметр λ заменить на $-\lambda$, а во втором уравнении заменить λ на μ. Поэтому можно сразу сформулировать утверждение, непосредственно следующее из теоремы 3.2.9.

Теорема 3.2.10. *Задача* (3.2.71) *равносильна спектральной проблеме*

$$L_\mu(\lambda)u := (I + K_\sigma + \lambda A^{-1} - \mu K_{\sigma_0})u = 0, \quad u \in E, \tag{3.2.72}$$

рассматриваемой в пространстве F, а также проблеме

$$\widetilde{L}_\mu(\lambda)v := (I + \widetilde{K}_\sigma + \lambda A^{-1} - \mu\widetilde{K}_{\sigma_0})v = 0, \quad v = A^{1/2}u \in E, \tag{3.2.73}$$

$$\widetilde{K}_\sigma := A^{1/2}K_\sigma A^{-1/2}, \quad \widetilde{K}_{\sigma_0} := A^{1/2}K_{\sigma_0}A^{-1/2}, \tag{3.2.74}$$

рассматриваемой в пространстве E.

Доказательство. Уравнение (3.2.72) получается из (3.2.56) после указанных выше замен параметров (λ на $-\lambda$ и λ на μ). Далее, так как любой элемент u из F можно представить в форме $u = A^{-1/2}v$, $v \in E$, то после указанной замены и применения слева оператора $A^{1/2}$ приходим к уравнению (3.2.73) с коэффициентами $\widetilde{K}_\sigma$ и $\widetilde{K}_{\sigma_0}$, выражаемыми формулами (3.2.74), что следует из (3.2.57). □

Замечание 3.2.1. В уравнении (3.2.72) оператор A^{-1} действует в F, и в шкале пространств E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, построенной по оператору A, он переводит $F = E^{1/2}$ в $\mathcal{D}(A) = E^{3/2} \subset E^{1/2} = F$. Как оператор, действующий в $F = E^{1/2}$, он является компактным положительным оператором.

Соответственно в уравнении (3.2.73) под A^{-1} понимается расширение этого оператора на пространство $E = E^0$. При этом A^{-1} переводит E^0 в $E^1 = \mathcal{D}(A) \subset E$; как оператор, действующий в E, A^{-1} снова является компактным положительным оператором. □

Замечание 3.2.2. Форма уравнений (3.2.72), (3.2.73) удобна тем, что здесь параметры λ и μ в определенном смысле равноправны: любой из них можно считать спектральным, а другой – фиксированным. Подробное исследование несамосопряженных задач дифракции в форме (3.2.72), (3.2.73) проведено в работах [23] – [25]. □

Упражнение 3.2.6. Провести в задаче дифракции (3.1.22) преобразования по общей схеме теорем 3.2.9, 3.2.10 и получить итоговые уравнения вида (3.2.72), (3.2.73) применительно к тройке пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, и оператора следа γ, $\gamma u := u|_\Gamma$. Выяснить свойства операторных коэффициентов этих уравнений. □

Замечание 3.2.3. Можно доказать, что операторные коэффициенты $\widetilde{K}_\sigma$ и $\widetilde{K}_{\sigma_0}$ уравнения (3.2.73) обладают следующими свойствами как операторы, действующие в E: $\widetilde{K}_\sigma$ является неотрицательным ограниченным оператором, а $\widetilde{K}_{\sigma_0}$ – неотрицательным компактным оператором. □

3.2.7 Задача С. Крейна

Обобщением скалярной модельной задачи (3.1.27) С. Крейна является следующая несамосопряженная спектральная проблема:

$$Lu = \lambda u, \quad \lambda(\partial u + \sigma\gamma u) = \sigma_0\gamma u. \tag{3.2.75}$$

Видно, что эта задача отличается от абстрактной задачи Стефана (3.2.53) лишь тем, что во втором уравнении (3.2.75) спектральный параметр λ стоит множителем не справа, а слева.

Относительно коэффициентов σ и σ_0 по-прежнему предположим, что выполнены условия (3.2.54), (3.2.55), за исключением того, что оператор σ_0 является не неотрицательным, а положительным:

$$\sigma_0 \in \mathfrak{S}_\infty(G_+, (G_+)^*), \quad \langle\varphi, \sigma_0\varphi\rangle_G > 0, \quad 0 \neq \varphi \in G_+. \tag{3.2.76}$$

Теорема 3.2.11. *Задача* (3.2.75), (3.2.76) *равносильна проблеме*

$$L(\lambda)u := (I + K_\sigma - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}K_{\sigma_0})u = 0, \quad u \in F, \tag{3.2.77}$$

рассматриваемой в пространстве F, а также проблеме

$$\widetilde{L}(\lambda)v := (I + \widetilde{K}_\sigma - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}\widetilde{K}_{\sigma_0})v = 0, \quad v = A^{1/2}u \in E, \tag{3.2.78}$$

рассматриваемой в пространстве E. При этом операторы K_σ, K_{σ_0}, $\widetilde{K}_\sigma$ и $\widetilde{K}_{\sigma_0}$ определяются формулами (3.2.74), (3.2.57), *причем*

$$K_\sigma \geqslant 0, \quad \widetilde{K}_\sigma \geqslant 0, \quad K_{\sigma_0} > 0, \quad \widetilde{K}_{\sigma_0} > 0. \tag{3.2.79}$$

□

Замечание 3.2.4. Задачи (3.2.77) и (3.2.78) являются несамосопряженными. Их исследованию посвящено достаточно много работ. Операторный пучок $\widetilde{L}(\lambda)$ называют пучком С. Крейна. Оказывается, что при сформулированных выше условиях задача (3.2.78) имеет дискретный спектр с двумя предельными точками: $\lambda = \infty$ и $\lambda = 0$. Все собственные значения задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены на положительной полуоси, а собственные элементы обладают свойством базисности Рисса, а при некоторых дополнительных условиях – и свойством p-базисности. Подробный анализ свойств решений задачи вида (3.2.78) при $\widetilde{K}_{\sigma_0} \geqslant 0$, $\widetilde{K}_{\sigma_0} \neq 0$, можно найти в [7], гл. 7, а также в [26]-[28]. □

Упражнение 3.2.7. Провести в задаче С. Крейна (3.1.27) преобразования, которые приводят к пучку вида (3.2.77), а также (3.2.78). Убедиться, что возникающие операторные коэффициенты этих пучков обладают свойствами (3.2.79). □

3.2.8 Задача Чуешова

Обобщая на абстрактный случай задачу (3.1.33), возникшую при исследовании динамических систем с поверхностной диссипацией энергии, приходим к следующей проблеме:

$$Lu + \lambda^2 u = 0, \quad \partial u + \sigma\gamma u = \alpha\lambda\gamma u, \quad \alpha > 0. \tag{3.2.80}$$

Здесь снова видно, что эта задача отличается от задача Стефана лишь тем, что в первом уравнении задачи Стефана параметр λ следует заменить на $-\lambda^2$, а во втором уравнении – параметр λ на $\alpha\lambda$, $\alpha > 0$. Поэтому общие преобразования, проделанные выше для задач Стефана, Аграновича и С. Крейна, можно осуществить и в задаче (3.2.80).

Теорема 3.2.12. *Задача* (3.2.80) *равносильна проблеме*

$$L_\alpha(\lambda)u := (I + K_\sigma - \lambda\alpha K_{\sigma_0} + \lambda^2 A^{-1})u = 0, \quad u \in F, \tag{3.2.81}$$

рассматриваемой в пространстве F, а также проблеме

$$\widetilde{L}_\alpha(\lambda)v := (I + \widetilde{K}_\sigma - \lambda\alpha\widetilde{K}_{\sigma_0} + \lambda^2 A^{-1})v = 0,\ v = A^{1/2}u \in E, \tag{3.2.82}$$

рассматриваемой в пространстве E. Здесь операторы K_σ и $\widetilde{K}_\sigma$ неотрицательны, а K_{σ_0} и $\widetilde{K}_{\sigma_0}$ при предположении (3.2.76) – *положительны и компактны.* □

Замечание 3.2.5. Спектральные задачи (3.2.81) и (3.2.82) для квадратичных по λ операторных пучков $L_\alpha(\lambda)$ и $\widetilde{L}_\alpha(\lambda)$ появились сравнительно недавно. Общие свойства спектра исследованы на некоторых примерах, допускающих разделение переменных в задачах математической физики. На этих примерах установлено, что спектр $\{\lambda_k^\pm\}_{k=1}^\infty$ этих задач дискретен (при $\alpha = 0$ он находится на мнимой оси, а собственные значения $\lambda_k^\pm(0) = \pm i\lambda_k^{1/2}(A)$, $k = 1, 2, \ldots$). Далее, при возрастании α от нуля он отходит от мнимой оси и при некотором $\alpha = \alpha_* > 0$ целиком переходит в бесконечно удаленную точку. При изменении α от $\alpha = \alpha_*$ до $+\infty$ спектр возвращается на мнимую ось, однако не к решениям задачи Неймана–Ньютона, отвечающим значению $\alpha = 0$ (см. (3.2.80)), а к решениям задачи Дирихле

$$Lu + \lambda^2 u = 0, \quad \gamma u = 0. \tag{3.2.83}$$

В общей ситуации установлено (при некоторых дополнительных естественных предположениях), что спектр задач (3.2.81), (3.2.82) дискретен, расположен в правой полуплоскости и имеет предельную точку $\lambda = \infty$ (см. [29]). Задачи (3.2.81), (3.2.82) требуют, по-видимому, дополнительного подробного исследования. □

Упражнение 3.2.8. В прямоугольнике $\Omega = (0,\pi) \times (0,1)$ исследуйте методом разделения переменных задачу Чуешова типа (3.1.35) – (3.1.36) (см. [29]):

$$\begin{gathered} -\Delta u + \lambda^2 u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } (\partial\Omega\backslash\Gamma), \\ \frac{\partial u}{\partial y} + u - \alpha\lambda u = 0 \quad \text{на } \Gamma := \{(x,y) : 0 < x < \pi,\ y = 1\}. \end{gathered} \tag{3.2.84}$$

Покажите, что общие свойства спектра, о которых говорилось выше в замечании 3.2.5, имеют место для задачи (3.2.84). Убедитесь, что критическое значение $\alpha_* > 0$ параметра α, при котором спектр уходит в бесконечно удаленную точку, равно 1, а для $\alpha > 1$ при $\alpha \to +\infty$ спектр из бесконечно удаленной точки возвращается на мнимую ось. □

Литература

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учебн. пособие. В 10 т. Том VI. Гидродинамика. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. – 736 с.

[2] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

[3] Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала. – М.–Л.: Гостехиздат, 1952. – 280 с.

[4] Копачевский Н.Д. Операторные методы математической физики: специальный курс лекций. – Симферополь: ООО "ФОРМА" , 2008. – 140 с.

[5] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

[6] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.

[7] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[8] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

[9] Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 384 с.

[10] Showalter R.E. Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations [Электронный ресурс] // Electronic Journal of Differential Equations. – 1994. – Vol. 1. – 214 p. — Режим доступа: http://www.emis.ams.org/journals/EJDE/Monographs/01/toc.html

[11] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи // Украинский матем. вестник. – 2004. – Т. 1. – № 1. – С. 69 – 97.

[12] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина и задача Стокса // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Математика и механика сплошной среды. – Ростов-на-Дону, 2004. – С. 137 – 141.

[13] Копачевский Н.Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). – 2004. – Т. 2. – С. 52 – 80.

[14] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2007. – Т. 20(59). – № 2. – С. 3 – 12.

[15] Войтицкий В.И., Копачевский Н.Д., Старков П.А. Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2009. – Т. 34. – С. 5 – 44.

[16] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

[17] Gagliardo E. Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni in „n" variabili //Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. – 1957. – Vol. 27. – pp. 284 – 305.

[18] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[19] Чуешов И.Д. Введение в теорию бесконечномерных диссипативных систем. – Харьков: Акта, 1999. – 436 с.

[20] Chueshov I., Eller M., Lasieska I. Finite dimensionality of the attractor for a semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation // Comm. Part. Diff. Eq-s. – 2004. – V. 29. – № 11-12. – pp. 1847-1876.

[21] Chueshov I., Lasieska I. Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipations // J. Diff. Eq-s. – 2004. – V. 198. – pp. 196-231.

[22] Agranovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N. Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory. – Wiley-VCH, Berlin, ..., Toronto, 1999. – 378 p.

[23] Старков П.А. Операторный подход к задачам сопряжения // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2002. – Т. 15(54). – № 1. – С. 58 – 62.

[24] Старков П.А. Случай общего положения для операторного пучка, возникающего при исследовании задач сопряжения // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2002. – Т. 15(54). – № 2. – С. 82 – 88.

[25] Старков П.А. О базисности системы собственных элементов в задачах сопряжения // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). – 2003. – Вып. 1. – С. 118 – 131.

[26] Крейн С.Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // ДАН СССР. – 1964. – Т. 159. – № 2. – С. 262 – 265.

[27] Крейн С.Г., Лаптев Г.И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Т. 1. – № 2. – С. 40 – 50.

[28] Аскеров Н.К., Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные ней операторные уравнения // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Т. 2. – № 2. – С. 21 – 32.

[29] Андронова О.А., Копачевский Н.Д. Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи //

Современная математика. Фундаментальные направления. – 2008. – Т. 29. – С. 11 – 28.

[30] Копачевский Н.Д. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых ее приложениях // Спектральные и эволюционные задачи (Труды КРОМШ-2010). - Симферополь: изд-во ТНУ. – 2011. – (в печати).

[31] McLean W. Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. – Cambridge University Press, 2000. – 358 p.

[32] Съярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

[33] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

[34] Agranovich M.S. Remarks on Potential Spaces and Besov Spaces in a Lipschitz Domain and on Whitney Arrays on its Boundary // Russian Journal of Math. Physics. – 2008. – Vol. 15. – № 2. – pp. 146 – 155.

[35] Агранович М.С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57. – Вып. 5(347). – С. 3 – 78.

[36] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

[37] Горбачук В.И. Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений // Функциональные и численные методы математической физики. Ин-т матем. и механики: сб. научн. трудов (редкол.: Скрыпник И.В. и др.). – К.: Наукова думка, 1998. – С. 60 – 63.

Предметный указатель

Томас Яковлевич Азизов
Николай Дмитриевич Копачевский

Абстрактная формула Грина и ее приложения

Специальный курс лекций
для студентов специальности ”Математика”

Корректура и верстка: *Э.Л. Газиев*

Подписано к печати 01.09.2011г. Формат 70x84 1/16.
Бумага тип. ОП. Объем 8,75 п.л. Тираж 100. Заказ –

95000, г. Симферополь, ул. Москалева 15/1.
ФЛП "Бондаренко О.А."