

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования

**«КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
В.И. ВЕРНАДСКОГО»**

ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского»

Физико-технический институт

Кафедра Энергоснабжения и физики

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по расчетной и контрольной работе

**«РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ»**

по дисциплине

«ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ,

часть 1, 2, 3»

для студентов дневного и заочного отделений

по направлению подготовки

13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»

Симферополь

ИТ «АРИАЛ»

2017

УДК 621.31(075.8)

ББК 31.2я73

Б 42

Утверждено на заседании учебно-методического совета ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского» (протокол № 5 от 16.06.2015).

Одобрено и рекомендовано к публикации на заседании учебно-методической комиссии факультета водных ресурсов и энергетики Академии строительства и архитектуры 08.04.2015 г., протокол № 3.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры энергоснабжения и физики 27.01. 2015 г., протокол № 6.

Составители:

Бекиров Э.А., Асанов М.М., Муртазаев Э.Р., Сокут Л.Д.

Рецензенты:

Зайцев О.Н., д.т.н., профессор, зав. кафедрой теплогазоснабжения и вентиляции;

Николенко И.В., д.т.н., профессор, зав. кафедрой водоснабжения, водоотведения и санитарной техники.

Ответственный за выпуск:

зав. кафедрой энергоснабжения и физики **Бекиров Э.А.**, д.т.н., профессор

Бекиров Э.А.

Б 42 Учебное пособие по расчетной и контрольной работе «Расчет параметров электрических цепей» по дисциплине «теоретические основы электротехники, часть 1, 2, 3». – Симферополь : ИТ «АРИАЛ», 2017. – 120 с.

ISBN 978-5-906877-93-2

Учебное пособие по расчетной и контрольной работе «Расчет параметров электрических цепей» по дисциплине «Теоретические основы электротехники, часть 1, 2, 3» для студентов дневного и заочного отделений по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

УДК 621.31(075.8)

ББК 31.2я73

ISBN 978-5-906877-93-2

© Коллектив авторов, 2017

© ИТ «АРИАЛ», 2017

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие по расчетной и контрольной работе «Расчет параметров электрических цепей» по дисциплине «Теоретические основы электротехники, часть 1, 2, 3» для студентов дневного и заочного отделений по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» содержит задания по каждой из трех частей ТОЭ и необходимые пояснения для их решения.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ — Задачи по расчету цепей постоянного, переменного тока и трехфазных цепей

ЧАСТЬ ВТОРАЯ — Задачи по расчету переходных процессов в линейных электрических цепях, несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях, нелинейных магнитных цепей.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ — Задачи по разделам электростатики, по расчету электрического поля в проводящей среде и по расчету магнитных полей.

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ 1.....	6
1.1 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА.....	6
1.1.1 Анализ электрических цепей постоянного тока с одним источником.....	6
1.1.2 Методы общего анализа линейных электрических цепей с несколькими источниками.....	9
1.1.3 Частичный анализ электрических цепей. Метод эквивалентного генератора.....	15
Задание 1.1 Расчет электрических цепей постоянного тока.....	18
1.2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА.....	20
1.2.1 Однофазные электрические цепи переменного тока.....	20
Задание 1.2 Расчет однофазных электрических цепей переменного тока.....	29
1.3 ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ.....	34
Задание 1.3 Расчет трехфазных электрических цепей переменного тока	40
ЧАСТЬ 2.....	42
2.1 ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ.....	42
2.1.1 Расчет переходных процессов различными методами.....	48
Задание 2.1 Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях.....	75
2.2 ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ.....	79
2.2.1 Графоаналитический метод определения коэффициентов ряда Фурье.....	80
Задание 2.2 Расчет несинусоидальных токов и напряжений с помощью графоаналитического метода определения коэффициентов ряда Фурье.....	85
2.3 НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ.....	87
Задание 2.3 Расчет нелинейных магнитных цепей.....	90
ЧАСТЬ 3.....	94

3.1 СОСТАВ ЗАДАЧ.....	94
3.2 ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ.....	95
Задача 3.2.1.....	95
Задача 3.2.2.....	98
Задача 3.2.3.....	102
Задача 3.2.4.....	104
Задача 3.2.5.....	107
Задача 3.2.6.....	109
Задача 3.2.7.....	110
Задача 3.2.8.....	112
Задача 3.2.9.....	113
Задача 3.2.10.....	114
Задача 3.2.11.....	115
Задача 3.2.12.....	118
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	120

ЧАСТЬ 1

1.1 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1.1 Анализ электрических цепей постоянного тока с одним источником

Анализ цепей с одним источником проводится двумя методами: методом свертывания схемы (определение входного или эквивалентного сопротивления) и методом пропорциональных величин (метод подобия).

При анализе цепи с несколькими источниками используются метод непосредственного применения законов Кирхгофа, методы контурных токов (ячеек), суперпозиции (наложения), узлового напряжения (если в схеме имеется два узла) и эквивалентного генератора (для нахождения тока в одной из ветвей схемы).

В большинстве случаев при расчете электрических цепей известными (заданными) величинами являются электродвижущие силы (э.д.с), напряжения или токи источников электрической энергия и сопротивления резисторов, неизвестными (рассчитываемыми) величинами являются токи и напряжения приемников

Рассмотрим электрическую цепь, схема которой изображена на рис. 1.1. Пусть известны значения сопротивления резисторов $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$, э.д.с. E и ее внутреннее сопротивление R_0 . Требуется определить токи во всех участках цепи и напряжение, которое покажет вольтметр (сопротивление его бесконечно велико), включенный между точками схемы a и d .

Такие задачи решаются методом свертывания схемы, по которому отдельные участки схемы упрощают и постепенным преобразованием приводят схему к одному эквивалентному (входному) сопротивлению относительно зажимов источников, питания. Схема упрощается с помощью замены группы последовательно или параллельно соединенных резисторов одним эквивалентным по сопротивлению. Так, резисторы R_4 и R_5 соединены последовательно, а резистор R_6 — с ними параллельно, поэтому их эквивалентное сопротивление:

$$R_{456} = R_{45}R_6/(R_{45} + R_6),$$

где $R_{45} = R_4 + R_5$.

После произведенных преобразований схема принимает вид, показанный на рис. 1.2, а эквивалентное сопротивление всей цепи найдем из уравнения:

$$R_{\text{эк}} = R_0 + R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_{456})}{R_2 + R_3 + R_{456}}.$$

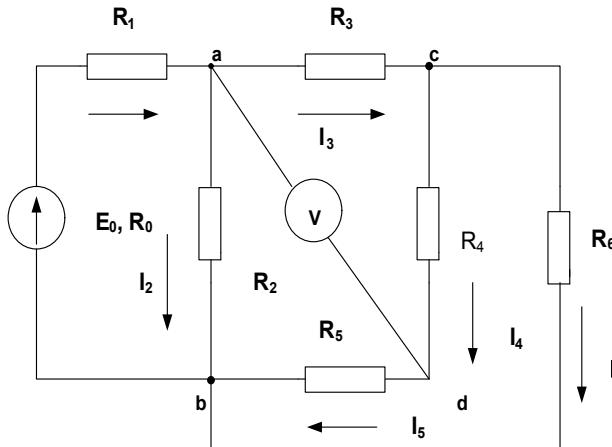


Рисунок 1.1

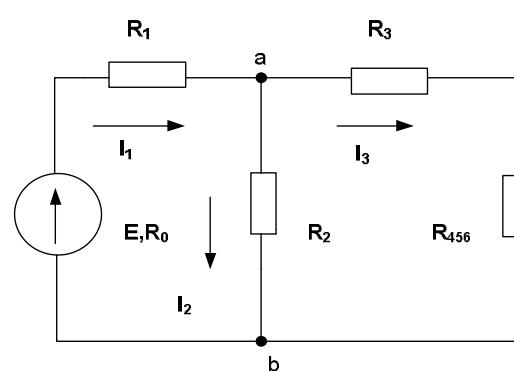


Рисунок 1.2

Ток I_1 в неразветвленной части схемы определим по закону Ома:

$$I_1 = E/R_{\text{эк}}.$$

Воспользовавшись схемой (рис. 1.2), найдем токи I_2 и I_3 :

$$I_2 = I_1 \frac{R_3 + R_{456}}{R_2 + R_3 + R_{456}}; \quad I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_{456}}.$$

Переходя к рис. 1.1, определим токи I_4, I_5 и I_6 по аналогичным уравнениям:

$$I_4 = I_5 = I_3 \frac{R_6}{R_4 + R_3 + R_6}; \quad I_6 = I_3 \frac{R_4 + R_5}{R_4 + R_5 + R_6}.$$

Зная ток I_1 , можно найти ток I_2 по-другому. Согласно второму закону Кирхгофа, $U_{ab} = E - (R_0 + R_1)I_1$ тогда $I_2 = U_{ab}/R_2$.

Показания вольтметра можно определить, составив уравнение по второму закону Кирхгофа, например, для контура $acda$:

$$R_3I_3 + R_4I_4 = U_{ad}.$$

Для проверки решения можно воспользоваться первым законом Кирхгофа и уравнением баланса мощностей, которые для схемы, изображенной на рис. 1.1, примут вид:

$$I_1 = I_2 + I_3; \quad I_3 = I_4 + I_6;$$

$$EI_1 = (R_0 + R_1)I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2 + (R_4 + R_5)I_4^2 + R_6I_6^2.$$

Электрические цепи с одним источником можно рассчитывать методом подобия (метод пропорциональных величин), который применим только для расчета линейных цепей, т.е. цепей с неизменными значениями сопротивлений. Воспользуемся свойствами линейных цепей для определения токов схемы, изображенной на рис. 1.1, в такой последовательности: задаемся произвольным значением тока I_6 в резисторе R_6 , наиболее удаленном от источника питания. По заданному току I_6 и сопротивлению резистора R_6 определяем напряжение $U_{cb} = R_6I_6$. Далее определяем:

$$I'_4 = I'_5 = U'_{cb}/(R_4 + R_5); I'_3 = I'_4 + I'_6;$$

$$U'_{ac} = R_3I'_3; U'_{ab} = U'_{ac} + U'_{cb}; I'_2 = U'_{ab}/R_2; I'_1 = I'_2 + I'_3.$$

Наконец, находим значение э.д.с. E' : $E' = (R_0 + R_1)I'_1 + R_2I'_2$. Однако найденное значение э.д.с. E' в общем случае отличается от заданной величины э.д.с. E . Поэтому для определения действительных значений токов и напряжений вычисляем так называемый коэффициент подобия $K = E/E'$. Умножив на него полученные при расчете значения токов и напряжений, находим действительные значения токов цепи. Метод пропорциональных величин особенно эффективен при расчете разветвленных линейных электрических цепей с одним источником.

Рассмотрим электрическую цепь, схема которой изображена на рис. 1.3. К источнику тока $J=0,1$ А подключены резисторы с сопротивлениями $R_1 = 12$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 16$ Ом; $R_4 = 40$ Ом; $R_5 = 60$ Ом. Определить напряжение U_{ab} источника тока и все токи. Составить баланс мощностей. Задача решается методом свертывания схемы.

Находим входное сопротивление R_{ab} схемы относительно зажимов источника тока:

$$R_{ab} = R_1 + \frac{R_2 \left(R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right)}{R_2 + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}} = 12 + \frac{10(16 + \frac{40 \cdot 60}{100})}{10 + 16 + \frac{40 \cdot 60}{100}} = 20 \text{ Ом.}$$

Находим, напряжение на зажимах источника тока U_{ab} :

$$U_{ab} = R_{ab}J = 20 \cdot 0,1 = 2 \text{ В.}$$

По закону Ома находим ток I_2 :

$$I_2 = \frac{U_{ab} - R_1 J}{R_2} = \frac{2 - 0,1 \cdot 12}{10} = 0,08 \text{ A}$$

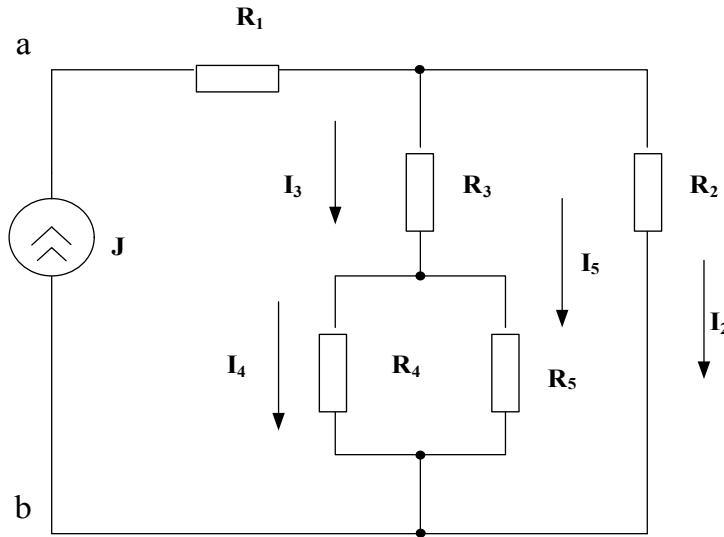


Рисунок 1.3

Ток I_3 определяем из уравнения закона Кирхгофа:

$$I_3 = J - I_2 = 0,1 - 0,08 = 0,02 \text{ A.}$$

Этот ток распределяется обратно пропорционально сопротивлениям R_4 и R_5 :

$$I_4 = I_3 \frac{R_5}{R_4 + R_5} = 0,012 \text{ A};$$

$$I_5 = I_3 \frac{R_4}{R_4 + R_5} = 0,008 \text{ A.}$$

Уравнение баланса мощностей отражает равенство мощностей, отдаваемой источником и расходуемой приемниками, т. е.:

$$U_{ab}J = R_1 J^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2; \\ 2 \cdot 0,1 = 12 \cdot 0,1^2 + 10 \cdot 0,08^2 + 16 \cdot 0,02^2 + 40 \cdot 0,012^2 + 60 \cdot 0,008^2 = 0,2 \text{ Вт.}$$

1.1.2 Методы общего анализа линейных электрических цепей с несколькими источниками

Важным вопросом этого раздела является расчет распределения токов в сложных линейных цепях с несколькими источниками. Классическим методом расчета таких цепей является непосредственное применение законов Кирхгофа. Все остальные

методы расчета исходят из этих фундаментальных законов электротехники.

Рассмотрим сложную электрическую цепь (рис. 1.4), которая содержит шесть ветвей. Если будут заданы значения всех э.д.с. и сопротивлений резисторов, а по условию задачи требуется определить токи в ветвях, то имеем задачу с шестью неизвестными. Такие задачи решаются с помощью законов Кирхгофа. В этом случае должно быть составлено столько уравнений, сколько неизвестных токов.

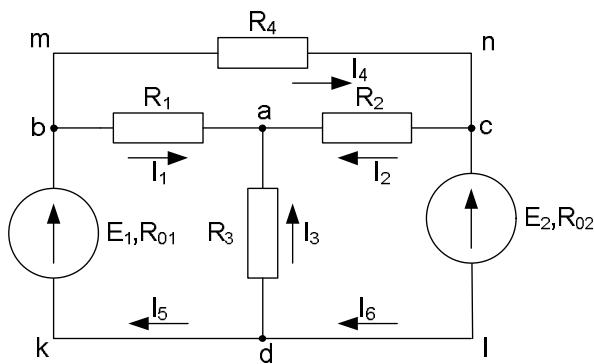


Рисунок 1.4

Порядок расчета следующий:

1. Если цепь содержит последовательные и параллельные соединения, то ее упрощают, заменяя эти соединения эквивалентными.
2. Произвольно указывают направления токов во всех ветвях. Если принятное направление тока не совпадает с действительным, то при расчете такие токи получаются со знаками минус.
3. Составляют $(n - 1)$ уравнений по первому закону Кирхгофа (n — число узлов).
4. Недостающие уравнения в количестве $m - (n - 1)$, где m — число ветвей, составляют по второму закону Кирхгофа, при этом обход контура можно производить как по часовой стрелке, так и против нее. За положительные э.д.с. и токи принимаются такие, направление которых совпадает с направлением обхода контура. Направление действия э.д.с. внутри источника всегда принимают от минуса к плюсу (см. рис. 1.4).
5. Полученную систему уравнений решают относительно неизвестных токов.

Составим расчетные уравнения для электрической цепи, изображенной на рис. 1.4. Выбрав произвольно направление токов в ветвях цепи, составляем уравнение по первому закону Кирхгофа для a, b, c :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0, \\ I_5 - I_1 - I_4 = 0, \\ I_4 - I_2 - I_6 = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Приняв направление обхода контуров по часовой стрелке, составляем уравнения по второму закону Кирхгофа для трех произвольно выбранных контуров:

- для контура $adkba$:

$$E_1 = R_1 I_1 - R_3 I_3 + R_{01} I_5; \quad (1.2)$$

- для контура $bacldkb$:

$$E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_{01} I_5 + R_{02} I_6; \quad (1.3)$$

- для контура $bmtscab$:

$$0 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_4 I_4. \quad (1.4)$$

Решая совместно уравнения (1.1), (1.2), (1.3) и (1.4), определяем токи в ветвях электрической цепи.

Легко заметить, что решение полученной системы из шести уравнений является весьма трудоемкой операцией. Поэтому при анализе электрических цепей с несколькими источниками целесообразно применять метод контурных токов (метод ячеек), позволяющий уменьшить число совместно решаемых уравнений, составляемых по двум законам Кирхгофа, на число уравнений, записанных по первому закону Кирхгофа. Следовательно, число уравнений, составляемых по методу контурных токов, равно $m - n + 1$. При решении этим методом количество уравнений определяется числом ячеек. Ячейкой называют такой контур, внутри которого отсутствуют ветви. В данном случае таких контуров-ячеек три: $badkb$, $aclda$, $mtscabm$.

Расчет сложных электрических цепей методом контурных токов ведется следующим образом:

1. Вводя понятие «контурный ток», произвольно задаемся направлением этих токов в ячейках. Удобнее все токи указать в одном направлении, например по часовой стрелке (рис. 1.5).

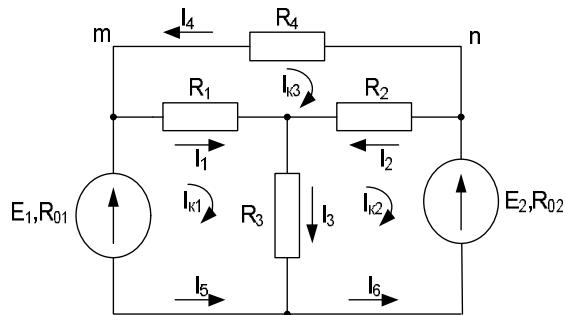


Рисунок 1.5

2. Составляем для каждого контура ячейки уравнение по второму закону Кирхгофа. Обход контуров производим по часовой стрелке:

- первый контур:

$$E_1 = (R_{01} + R_1 + R_3)I_{k1} - R_3I_{k2} - R_1I_{k3}; \quad (1.5)$$

- второй контур:

$$-E_2 = -R_3I_{k1} + (R_{02} + R_2 + R_3)I_{k2} - R_2I_{k3}; \quad (1.6)$$

- третий контур:

$$0 = -R_1I_{k1} - R_2I_{k2} + (R_1 + R_2 + R_4)I_{k3}. \quad (1.7)$$

3. Решая совместно уравнение (1.5), (1.6), (1.7), определяем контурные токи. В том случае, когда контурный ток получается со знаком минус, это означает, что его направление противоположно выбранному на схеме.

4. Токи во внутренних ветвях схемы определяются как сумма или разность соответствующих контурных токов. В том случае, когда контурные токи в ветви совпадают, берут сумму, а когда направлены навстречу из большего тока вычитают меньший.

5. Токи во внешних ветвях схемы по значению равны соответствующим контурным токам.

Пример 1.1. Найти токи в цепи, схема которой изображена на рис. 1.5.

Дано: $E_1 = 100 \text{ В}$, $E_2 = 120 \text{ В}$, $R_{01} = R_{02} = 0,5 \text{ Ом}$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 10 \text{ Ом}$. Определить токи в ветвях цепи.

Решение. Используя уравнения (1.5), (1.6) и (1.7), получаем:

$$\begin{cases} 100 = 7,5I_{k1} - 2I_{k2} - 5I_{k3}; \\ -120 = -2I_{k1} + 12,5I_{k2} - 10I_{k3}; \\ 0 = -5I_{k1} - 10I_{k2} + 25I_{k3}. \end{cases}$$

Выразим I_{k3} через I_{k1} и I_{k2} :

$$I_{k3} = \frac{5}{25}I_{k1} + \frac{10}{25}I_{k2}.$$

Произведя соответствующие подстановки, получаем:

$$\begin{cases} 100 = 6,5I_{k1} - 4I_{k2}; \\ -120 = -4I_{k1} + 8,5I_{k2}. \end{cases}$$

Совместное решение полученных уравнений дает:

$$I_{k1} = -5,2 \text{ A}; I_{k2} = -33,5 \text{ A}; I_{k3} = -14,4 \text{ A}.$$

Определяем токи в ветвях:

$$I_1 = I_{k1} - I_{k3} = -5,2 + 14,4 = 9,2 \text{ A};$$

$$I_2 = I_{k3} - I_{k2} = -14,4 + 33,5 = 19,1 \text{ A};$$

$$I_3 = I_{k1} - I_{k2} = -5,2 + 33,5 = 28,3 \text{ A};$$

$$I_4 = -I_{k3} = 14,4 \text{ A}; I_5 = -I_{k1} = 5,2 \text{ A}; I_6 = -I_{k2} = 33,5 \text{ A};$$

Пример 1.2. Определить токи и составить баланс мощностей для схемы, изображенной на рис. 1.6.

Дано: $J = 50 \text{ mA}$, $E = 60 \text{ В}$, $R_1 = 5 \text{ кОм}$, $R_2 = 4 \text{ кОм}$, $R_3 = 16 \text{ кОм}$, $R_4 = 2 \text{ кОм}$, $R_5 = 8 \text{ кОм}$

Решение. Схема содержит шесть ветвей ($m=6$) и четыре узла ($n=4$). Число уравнений, составляемых по методу контурных токов, равно $m - n + 1 - 1 = 2$, так как в схеме имеется источник тока, ток которого может быть принят равным контурному току. Зададимся произвольным направлением контурных токов I_{k1} и I_{k2} как показано на рис. 1.6. Там же нанесен известный контурный ток источника тока J . Составим систему уравнений первого и второго контуров:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_5)I_{k1} + R_5I_{k2} + R_1J = E; \\ R_5I_{k1} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{k2} - R_3J = 0. \end{cases}$$

Подставляя числовые значения и решения эти уравнения, найдем контурные токи:

$$I_{k1} = -30 \text{ mA}; I_{k2} = 40 \text{ mA}.$$

Искомые токи будут равны:

$$I_1 = J + I_{k1} = 20 \text{ mA}; I_2 = -I_{k1} = 30 \text{ mA};$$

$$I_3 = J - I_{k2} = 10 \text{ mA}; I_4 = I_{k2} = 40 \text{ mA}; I_5 = I_{k1} + I_{k2} = 10 \text{ mA}.$$

Составляем баланс мощностей:

$$P_{\text{и}} = -EI_2 + U_{cd}J = -EI_2 + (R_1I_1 + R_3I_3)J;$$

$$P_{\text{H}} = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2 + R_4I_4^2 + R_5I_5^2.$$

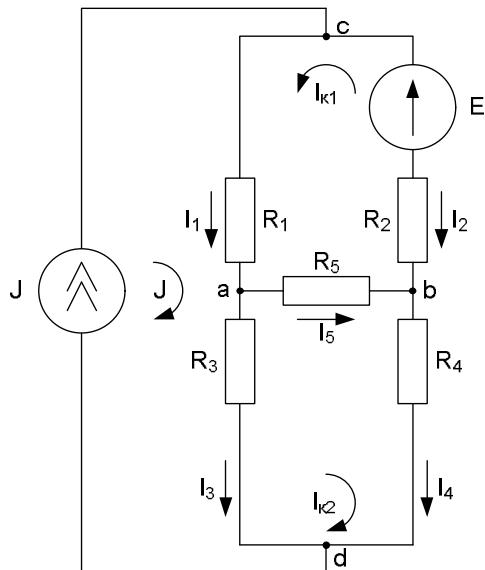


Рисунок 1.6

Подставляя числовые значения, получим, $P_{И} = P_{H} = 11,2$ Вт.

Метод наложения, основанный на принципе суперпозиции, позволяет свести расчет разветвленной цепи с несколькими источниками к нескольким расчетам этой же цепи, но с одним источником.

Порядок расчета:

1. Поочередно рассматривают действие в цепи только одного источника, а все остальные источники исключаются (остаются только их внутренние сопротивления).
2. Рассчитывают токи в ветвях от действия каждого источника.
3. Алгебраическим суммированием токов, полученных от действия каждого источника в отдельности, находят токи в ветвях цепи.

Метод является особенно эффективным при расчете токов, когда изменяется значение э. д. с. только одного источника.

В промышленной электронике, автоматике часто используют цепи, схема которых изображена на рис. 1.7. Такие схемы удобно анализировать с помощью метода узлового напряжения (напряжения между двумя узлами).

Пример 1.3. Найти токи и показание вольтметра в цепи, схема которой приведена на рис. 1.7, если $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10$ Ом.

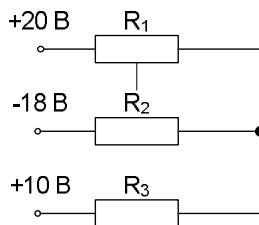


Рисунок 1.7

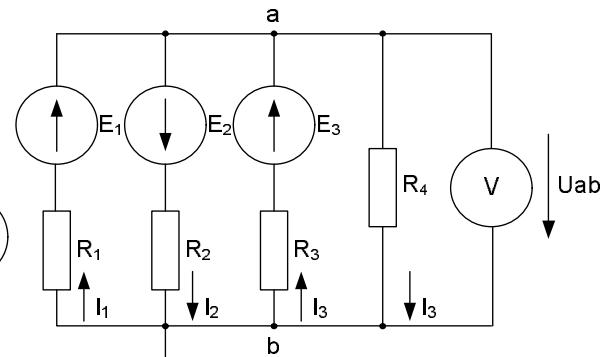


Рисунок 1.8

Решение. Рис. 1.7 соответствует схеме замещения (рис. 1.8): $E_1 = 20$ В, $E_2 = 18$ В, $E_3 = 10$ В. Найдем узловое напряжение U_{ab} (показание вольтметра):

$$U_{ab} = \frac{G_1 E_1 - G_2 E_2 + G_3 E_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} = \frac{0,1 \cdot 20 - 0,1 \cdot 18 + 0,1 \cdot 10}{0,4} = 3 \text{ В.}$$

Токи в ветвях определяются по закону Ома:

$$I_1 = (E_1 - U_{ab})/R_1 = 1,7 \text{ А; } I_2 = (E_2 + U_{ab})/R_2 = 2,1 \text{ А; } I_3 = (E_3 - U_{ab})/R_3 = 0,7 \text{ А; } I_4 = U_{ab}/R_4 = 0,3 \text{ А.}$$

1.1.3 Частичный анализ электрических цепей. Метод эквивалентного генератора

На практике часто бывает необходимо изучать режим работы только одной из ветвей сложной электрической цепи. При этом не следует производить громоздкий расчет всей цепи, а целесообразно воспользоваться методом эквивалентного генератора. Согласно этому методу, воздействие всех источников сложной электрической цепи на исследуемую ветвь можно заменить воздействием последовательно включенного с ветвью, эквивалентного источника (генератора), имеющего э.д.с. $E_{\text{эк}}$, равную напряжению холостого хода U_x на зажимах разомкнутой исследуемой ветви, и внутреннее сопротивление $R_{\text{эк}}$, равное входному сопротивлению цепи со стороны зажимов исследуемой ветви.

Порядок расчета:

1. Произвольно выбирают направление тока в исследуемой ветви.

2. Отключают исследуемую ветвь, осуществляя режим холостого хода.

3. Определяют напряжение холостого хода U_x на зажимах разомкнутой ветви.

4. Находят входное (эквивалентное) сопротивление цепи со стороны зажимов разомкнутой ветви).

5. В общем случае находят ток в исследуемой ветви по выражению:

$$I = (U_x \pm E)/(R_{\text{эк}} + R), \quad (1.8)$$

где R — сопротивление резистора ветви, в которой определяется ток; $R_{\text{эк}}$ — входное (эквивалентное) сопротивление цепи со стороны зажимов выделенной ветви; U_x — напряжение холостого хода на зажимах разомкнутой выделенной ветви; E — э.д.с, находящаяся в исследуемой ветви. Если ветвь не содержит э.д.с, то она принимается равной нулю.

Знаки плюс или минус выбирают в соответствии с законом Ома для ветви с источником, т.е. если направление э.д.с. совпадает с направлением тока, то берется знак плюс, в противном случае — минус.

Рассмотрим применение метода эквивалентного генератора на примере схемы, изображенной на рис. 1.9.

Пример 1.4. Определить ток в ветви bc , если: $E_2 = E_3 = E_4 = 20 \text{ В}$, $E_5 = 30 \text{ В}$, $E_6 = 60 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2 \text{ Ом}$, $R_5 = 3 \text{ Ом}$, $R_6 = 6 \text{ Ом}$.

Решение задачи состоит из двух этапов.

1. Определение напряжения холостого хода U_{xbc} на зажимах разомкнутой ветви bc . Схема в этом случае имеет вид, показанный на рис. 1.10. Для нахождения U_{xbc} следует найти ток I_1 и напряжение U_{ac} :

$$I_1 = E_2/(R_1 + R_2) = 20/(2 + 2) = 5 \text{ А.}$$

Напряжение U_{ac} находим по формуле узлового напряжения:

$$U_{ac} = \frac{G_5 E_5 - G_4 E_4 - G_6 E_6}{G_4 + G_5 + G_6} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 30 - \frac{1}{2} \cdot 20 - \frac{1}{6} \cdot 60}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = -10 \text{ В.}$$

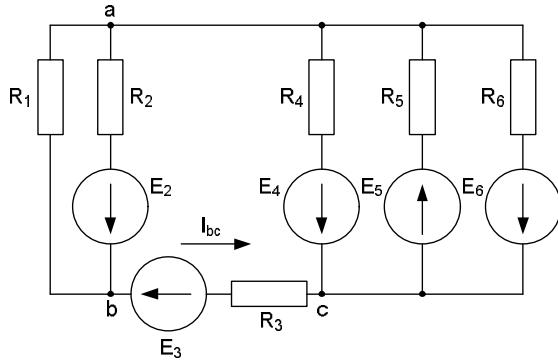


Рисунок 1.9

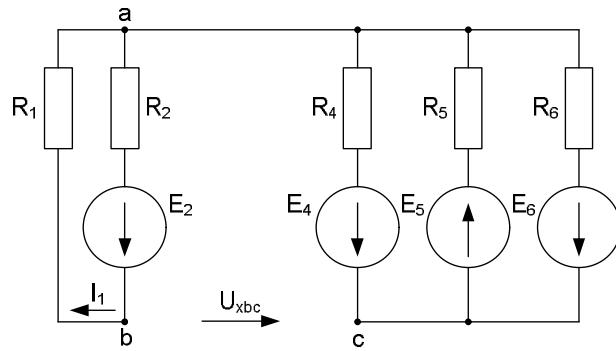


Рисунок 1.10

Напряжение U_{xbc} найдем по второму закону Кирхгофа, обходя контур $bacb$:

$$U_{xbc} = R_1 I_1 + U_{ac} = 2 \cdot 5 - 10 = 0.$$

2. Определение эквивалентного сопротивления $R_{\text{эк} bc}$. Схема в этом случае имеет вид, показанный на рис. 1.11:

$$R_{\text{эк} bc} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{1}{1/R_4 + 1/R_5 + 1/R_6} = \frac{2 \cdot 2}{2+2} + \frac{1}{1/2 + 1/3 + 1/6} = 2 \text{ Ом.}$$

Подставляя найденные значения в (1.8), получаем

$$I_{bc} = (0 - 20)/(2 + 2) = -5 \text{ А.}$$

Т.е. истинный ток в схеме имеет направление, противоположное выбранному.

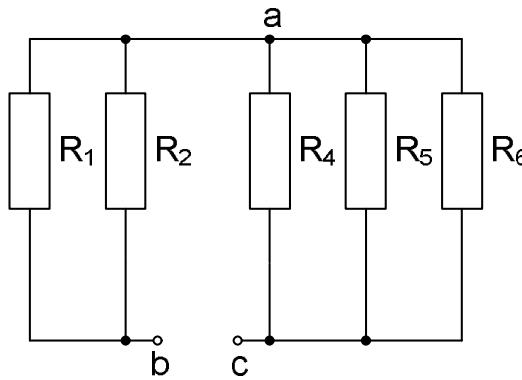


Рисунок 1.11

Метод эквивалентного генератора применяется при расчете нелинейных цепей постоянного тока с одним нелинейным элементом. Например, широко распространены мостовые схемы измерения неэлектрических величин электрическими методами, в которых с

помощью нелинейного элемента (преобразователя), включенного в одно из плеч или диагональ мостовой схемы, происходит преобразование неэлектрического воздействия в электрический сигнал (ток или напряжение), который фиксируется измерительным прибором.

При расчете нелинейных цепей постоянного тока также используется метод свертывания, который сводится к графическому определению результирующей вольтамперной характеристики нескольких нелинейных элементов, и метод пересечения характеристик, который особенно удобен, когда к источнику напряжения подключены линейный и нелинейный элементы. Последний метод широко используется в электронной технике для анализа работы управляемых нелинейных элементов (транзисторов, ламп и др.).

Задание 1.1 Расчет электрических цепей постоянного тока

Для электрической схемы выполнить следующее:

1. Составить на основании законов Кирхгофа систему уравнений для расчета токов во всех ветвях схемы.
2. Определить токи во всех ветвях схемы методом контурных токов.
3. Определить токи во всех ветвях схемы методом узловых потенциалов.
4. Определить токи во всех ветвях схемы методом наложения.
5. Определить токи во всех ветвях схемы по методу активного двухполюсника, эквивалентного генератора.
6. Составить баланс мощностей в исходной схеме.

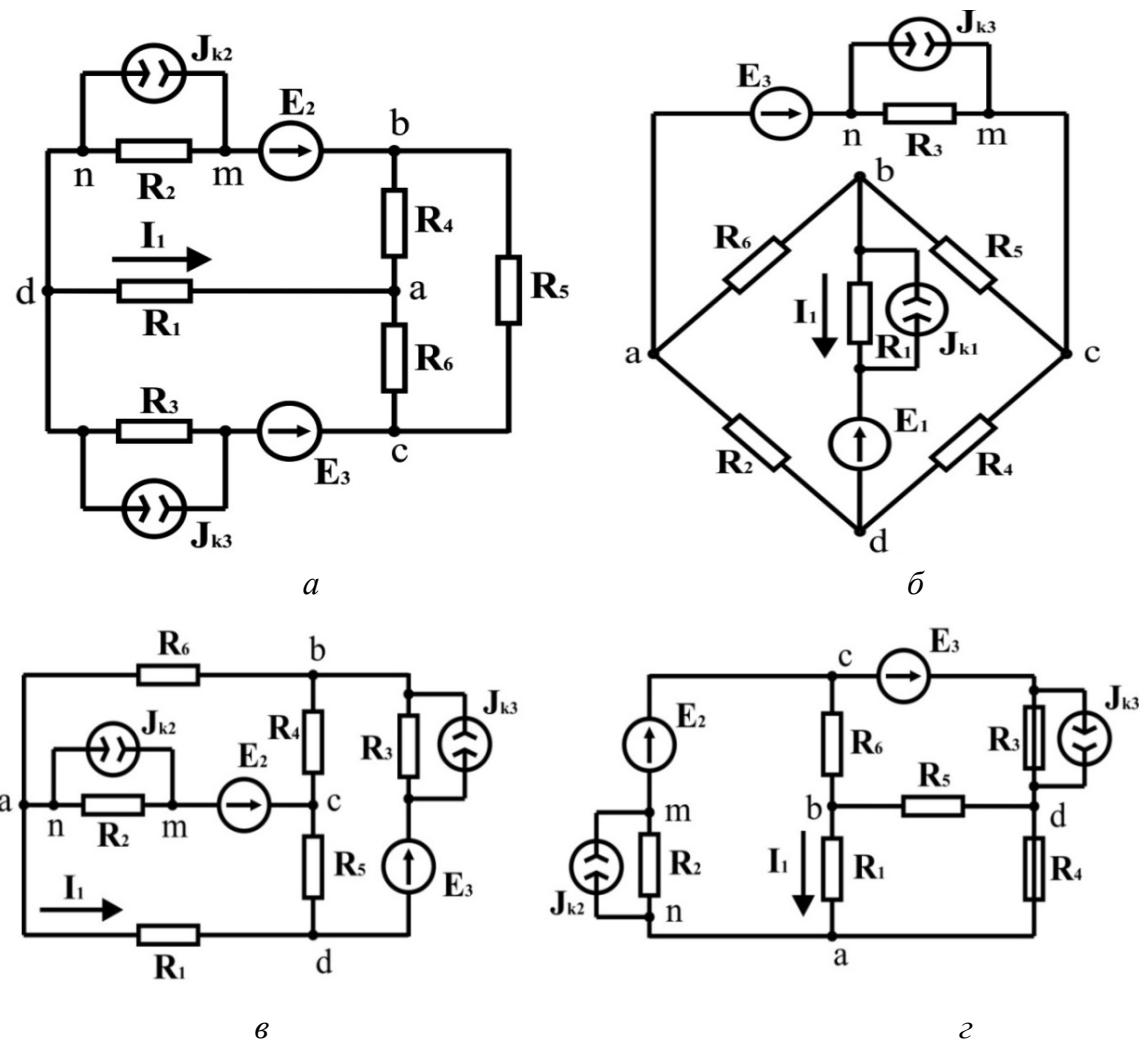


Рисунок 1.12

Таблица 1.1

Исходные данные

Вариант	Рис 1.12	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	E_1	E_2	E_3	J_{k1}	J_{k2}	J_{k3}
		Ом						В			А		
1	а	13	5	2	8	11	15	—	12	16	—	0	2
2	г	13	5	9	7	10	4	—	10	21	—	0	1
3	б	8	10	6	15	21	26	25	—	14	0	—	1
4	а	4	8	6	10	13	10	—	30	9	—	0	1
5	в	10	10	5	10	8	6	—	20	30	—	0	1
6	в	4	13	9	10	5	6	—	16	8,2	—	0	0,2
7	г	6	5	8	14	7	8	—	20	14	—	0	1
8	а	7	12	4	9	15	8	—	20	8	—	0	0,5
9	б	5	10	13	7	8	15	15	15	13	0	—	1

Продолжение таблицы 1.1

10	<i>a</i>	5	7	10	4	15	20	—	15	20	—	0	1
11	<i>в</i>	10	52,5	33	9	15	22,5	—	9	18	—	0,4	0
12	<i>a</i>	1,6	2,5	1	4	5,5	7,5	—	5	10	—	0,4	0
13	<i>в</i>	6	17,5	11	3	5	7,5	—	6,5	6	—	0,2	0
14	<i>б</i>	4	5	3	7,5	10,5	13	5	—	10	0,5	—	0
15	<i>г</i>	26	10	18	14	20	8	—	20	24	—	0	2
16	<i>a</i>	26	10	4	16	22	30	—	24	32	—	0	2
17	<i>б</i>	3	2,5	4	7	3,5	4	7,5	—	11	1	—	0
18	<i>в</i>	3,5	6	2	4,5	7,5	4	—	7	5	—	0,5	0
19	<i>г</i>	2	3,5	5	6	10	2,75	—	6,5	10	—	1	0
20	<i>a</i>	2	5,5	2,5	6	3,5	4	—	10,5	5	—	1	0
21	<i>б</i>	2,5	5	5	3,5	4	7,5	6	—	12,5	0,3	—	0
22	<i>б</i>	8	25	18	20	10	12	32	—	11	0	—	0,5
23	<i>г</i>	12	10	16	28	14	16	—	40	12	—	0	2
24	<i>г</i>	10	14	20	8	30	40	—	30	20	—	0	2
25	<i>a</i>	8	22	10	24	14	16	—	50	16,5	—	0,2	0

1.2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

1.2.1 Однофазные электрические цепи переменного тока

При изучении явлений резонанса в цепях переменного тока необходимо знать условия их возникновения, а также обратить внимание на практическое применение резонанса токов для искусственного повышения коэффициента мощности в промышленных электроустановках. В то же время следует понимать, что возникновение резонанса в электрических устройствах может представлять опасность, как для самих устройств, так и для обслуживающего персонала.

Изучая явления резонанса, необходимо усвоить следующее. При резонансе напряжение и ток на зажимах цепи всегда совпадают по фазе. Настройка же цепи на резонанс зависит от схемы соединения индуктивности и емкости. Для последовательной цепи условием резонанса является равенство индуктивного и емкостного сопротивлений: $X_L = X_C$. Для цепи, содержащей параллельный контур, в одной из ветвей которого находится индуктивная катушка, а в

другой — конденсатор, условием резонанса является равенство реактивных проводимостей ветвей: $B_L = B_C$.

При расчете цепей синусоидального тока приходится совершать различные математические операции, которые удобно производить над действующими значениями токов и напряжений, рассматривая их как векторы. Значения векторов при этом равны действующим токам и напряжениям, а начальная фаза определяет положение вектора относительно положительной горизонтальной оси координат. При положительной (опережающей) начальной фазе вектор повернут на соответствующий угол против движения часовой стрелки, а при отрицательной (отстающей) — по направлению движения часовой стрелки. Векторной диаграммой называют совокупность векторов, изображающих синусоидальные э.д.с, напряжения и токи одной частоты, выходящих из общей точки.

Для цепей синусоидального тока обычно строят потенциальную (топографическую) диаграмму, каждая точка которой соответствует определенной точке электрической цепи. Чтобы осуществить это соответствие точек диаграммы и цепи, построение потенциальной диаграммы ведут в той же последовательности, в какой обходят электрическую цепь. Обычно направление обхода выбирают противоположным принятому направлению тока в цепи. Для наглядности в некоторых случаях векторные и потенциальные диаграммы объединяют в одну. Необходимо обратить особое внимание на направление векторов на потенциальных диаграммах. Векторы напряжений направлены относительно точек потенциальной диаграммы противоположно положительным направлениям напряжений относительно соответствующих точек цепи. Ценность потенциальной диаграммы состоит в том, что она позволяет определять напряжения между любыми точками цепи. Для этого следует соединить соответствующие точки потенциальной диаграммы отрезком прямой и придать этому отрезку соответствующее направление.

С помощью потенциальной диаграммы удобно производить сложение напряжений, возникающих на отдельных участках

последовательной цепи (второй закон Кирхгофа), и сложение токов, протекающих в ветвях параллельной цепи (первый закон Кирхгофа).

При построении векторных диаграмм один из векторов принимают за основной (опорный), располагая его обычно по положительному направлению горизонтальной оси. В этом случае начальная фаза тока или напряжения в зависимости от того, что данный вектор изображает, равна нулю. Для последовательной цепи за основной вектор принимают вектор тока, а для параллельной — вектор напряжения.

На рис. 1.13 показаны последовательная цепь (рис. 1.13, *а*), ее векторная (рис. 1.13, *б*) и потенциальная (рис. 1.13, *в*) диаграммы. На рис. 1.14 в той же последовательности, что и на рис. 1.13, показаны параллельная цепь и ее векторная и потенциальная диаграммы.

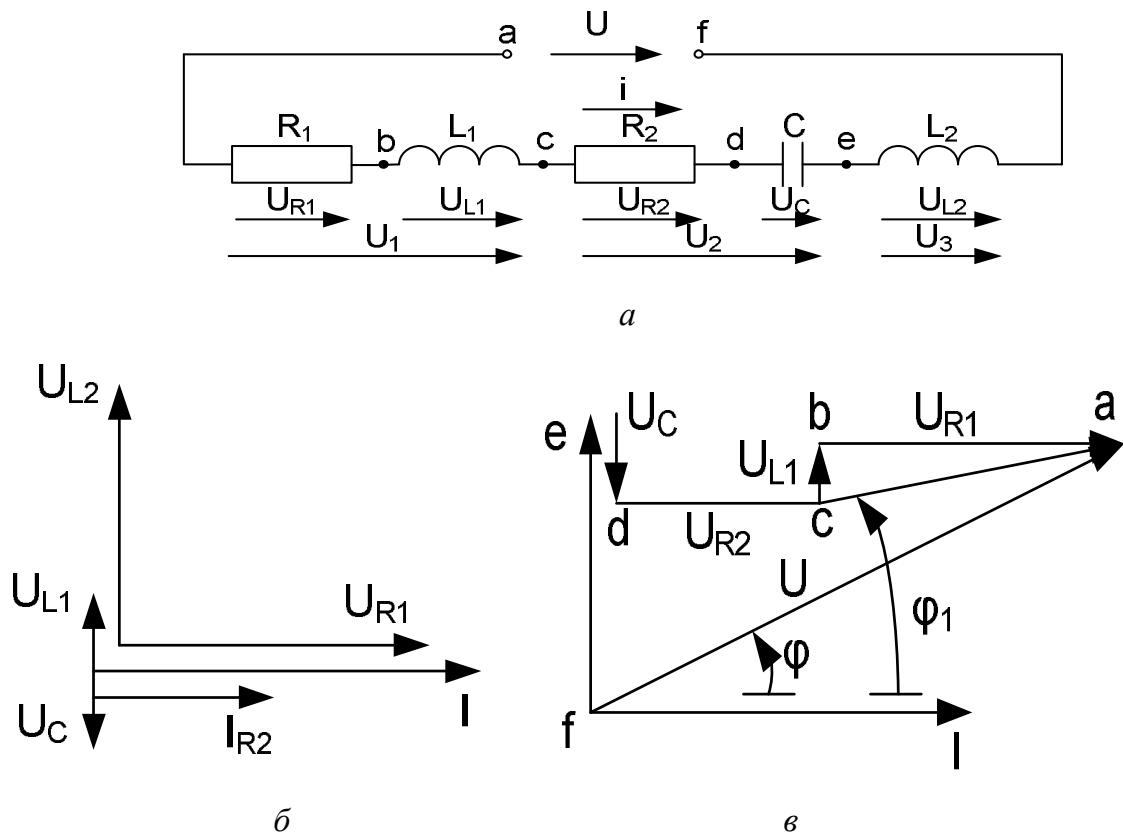


Рисунок 1.13

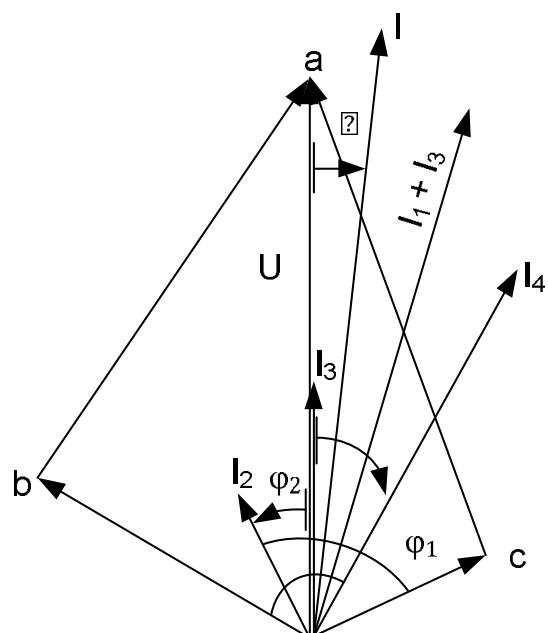
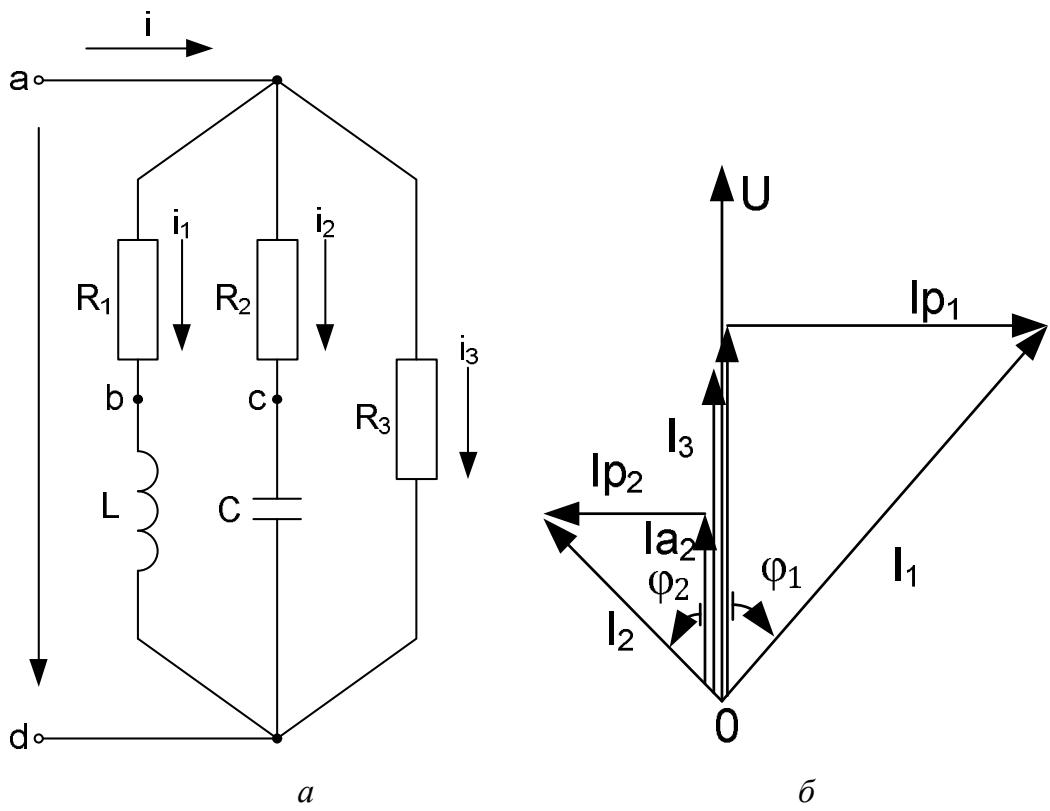


Рисунок 1.14

В том случае, когда сложение или вычитание вектора требуется производить не графически, а математически (например, при расчете электрической цепи), векторы раскладывают на две составляющие, одна из которых называется активной, а вторая — реактивной.

Активная составляющая напряжения совпадает по фазе с током, а реактивная — опережает ток или отстает от него по фазе на 90° . Активная составляющая тока совпадает по фазе с напряжением, а реактивная — опережает напряжение или отстает от него по фазе на 90° . Зная сдвиг между током и напряжением и значения векторов тока и напряжения, легко определить соответствующие составляющие этих векторов. Например, если нам задан синусоидально изменяющийся ток уравнением вида $i=I_m \sin(\omega t - \varphi)$, то его активная и реактивная составляющие для действующего значения соответственно равны $I_a = I \cos \varphi$; $I_p = I \sin \varphi$; где $I=I_m/\sqrt{2}$.

Аналогично для напряжения: $U_a = U \cos \varphi$; $U_p = U \sin \varphi$.

На диаграмме, изображенной на рис. 1.14, б показаны активные и реактивные составляющие токов. В том случае, когда необходимо произвести сложение двух или более векторов, выражающих собой токи или напряжения, определяют их активные и реактивные составляющие и модуль результирующего вектора:

$$I = \sqrt{(\Sigma I_a)^2 + (\Sigma I_L - \Sigma I_C)^2};$$

$$U = \sqrt{(\Sigma U_a)^2 + (\Sigma U_L - U_C)^2},$$

где индексы L и C указывают на характер реактивной составляющей (индуктивность или емкость).

Начальная фаза результирующего вектора определяется через $\operatorname{tg} \varphi$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Sigma I_L - \Sigma I_C}{\Sigma I_a} = \frac{\Sigma U_L - \Sigma U_C}{\Sigma U_a}.$$

Для практических расчетов удобнее выражать векторы тока и напряжения, а также сопротивления и проводимость комплексными числами, в которых активные составляющие являются действительными значениями, а реактивные — мнимыми. Причем знак у мнимого значения зависит от характера реактивной составляющей. При расчете электрических цепей переменного тока с помощью комплексных чисел могут быть использованы методы расчета, применяемые для цепей постоянного тока. Уравнения Кирхгофа в этом случае записываются как соответствующие геометрические суммы.

При выполнении расчетов по методу комплексных чисел следует иметь в виду, что действительная и мнимая части комплексных сопротивлений, проводимости и мощности всегда представляют собой соответственно активную и реактивную составляющие этих значений; что же касается комплексного напряжения и комплексного тока, то такое положение имеет место лишь в частных случаях. Действительная и мнимая части комплексных напряжения и тока определяются начальными фазами значений, иначе говоря, зависят от расположения соответствующих векторов относительно осей комплексной плоскости, тогда как их активная и реактивная составляющие определяются углом сдвига по фазе φ между этими двумя векторами.

При анализе магнитосвязанных электрических цепей необходимо иметь в виду, что при составлении уравнения по второму закону Кирхгофа, при учете напряжения от взаимоиндукции сравнивается напряжение обхода рассматриваемой катушки и направление тока во влияющей на нее катушке относительно одноименных зажимов катушек. Если эти направления совпадают, то напряжение взаимоиндукции учитывается в уравнении с плюсом, в противном случае — с минусом.

Пример 1.5. Рассчитать электрическую цепь синусоидального тока со смешанным соединением приемников, схема которой изображена на рис. 1.15.

Дано: $U=120$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 24$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, $L_1 = 19,1$ мГн, $C_2 = 455$ мкФ, $L_3 = 63,5$ мГн, $f = 50$ Гц. Определить токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ в ветвях цепи, напряжения на участках цепи $\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}$, активную, реактивную и полную мощности и построить векторную диаграмму на комплексной плоскости.

Решение. Выражаем сопротивления ветвей цепи в комплексной форме:

$$\underline{Z} = R \pm jX = Z e^{\pm i\varphi};$$

$$\underline{Z} = R_1 + j\omega L_1 = 10 + j2\pi \cdot 50 \cdot 19,1 \cdot 10^{-3} = 10 + j6 \text{ Ом.}$$

Переходя от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной, получаем:

$$\underline{Z}_1 = Z_1 e^{j\varphi_1} = 11,6 e^{j31^\circ} \text{ Ом},$$

где $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}$; $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{R_1}$.

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} = 24 - j \frac{10^6}{2\pi \cdot 50 \cdot 455} = 24 - j7 \text{ Ом} = 25 e^{-j16^\circ 15'} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3 = 15 + j2\pi \cdot 50 \cdot 63,5 \cdot 10^{-3} = 15 + j20 \text{ Ом} = 25 e^{j53^\circ 05'} \text{ Ом}$$

Выражаем заданное напряжение U в комплексной форме. Если начальная фаза напряжения не задана, то ее можно принять равной нулю и располагать вектор напряжения совпадающим с положительным направлением действительной оси. В этом случае мнимая составляющая комплексного числа отсутствует (рис. 1.16) $\dot{U} = U = 120$ В. Полное комплексное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 10 + j6 + \frac{(24 - j7)(15 + j20)}{39 + j13} = 10 + j6 + \frac{25 e^{-j16^\circ 15'} \cdot 25 e^{j53^\circ 05'}}{41 e^{j18^\circ 25'}} = \\ &= 24,4 + j10,8 = 26,7 e^{j23^\circ 55'} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

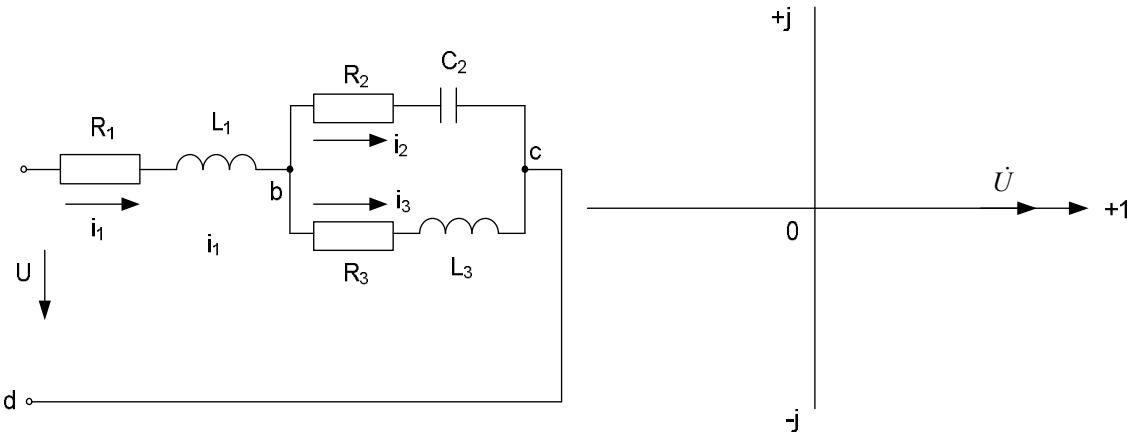


Рисунок 1.15

Рисунок 1.16

Определим ток в неразветвленной части цепи:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} / \underline{Z} = 120 / 26,7 e^{j23^\circ 55'} = 4,5 e^{-j23^\circ 55'}.$$

Токи \dot{I}_2 и \dot{I}_3 в параллельных ветвях могут быть выражены через ток в неразветвленной части цепи:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4,5 e^{-j23^\circ 55'} \frac{15 + j20}{39 + j13} = 2,7 e^{-j58^\circ 45'} \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4,5 e^{-j23^\circ 55'} \frac{27 - j7}{39 + j13} = 2,74 e^{-j58^\circ 35'} \text{ А}.$$

Токи \dot{I}_2 и \dot{I}_3 можно найти иначе:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{bc} = \underline{Z}_{bc} \dot{I}_1 &= \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \dot{I}_1 = \frac{(24-j7)(15+j20)}{39+j13} 4,5e^{-j23^\circ 55'} = 68,4e^{-j5^\circ 30'} \text{ В;} \\ \dot{I}_2 &= \dot{U}_{bc} / \underline{Z}_2 = 68,4e^{-j5^\circ 30'} / 25e^{-j16^\circ 15'} = 2,74e^{j10^\circ 45'} \text{ А;} \\ \dot{I}_3 &= \dot{U}_{bc} / \underline{Z}_3 = 68,4e^{-j5^\circ 30'} / 25e^{j53^\circ 05'} = 2,74e^{-j58^\circ 35'} \text{ А.}\end{aligned}$$

Найдем мощность всей цепи и отдельных ее ветвей:

$$\dot{S} = \dot{U} \overset{*}{I} = 120 \cdot 4,5e^{j23^\circ 55'} = 540e^{j23^\circ 55'} \text{ ВА.}$$

Для определения активной и реактивной мощностей полную мощность, выраженную комплексным числом в показательной форме, переводим в алгебраическую форму. Тогда действительная часть комплекса представляет собой активную мощность, а мнимая реактивную:

$$\dot{S} = 540 \cos 23^\circ 55' + j540 \sin 23^\circ 55' = 494 + j218 \text{ ВА.}$$

Откуда $P=494$ Вт; $Q=218$ ВАр.

Активную и реактивную мощность можно найти иначе:

$$P = \operatorname{Re} \left[\dot{U} \overset{*}{I}_1 \right] = R_e [120 \cdot 4,5e^{j23^\circ 55'}] = 120 \cdot 4,5 \cos 23^\circ 55' = 494 \text{ Вт.}$$

$$P_1 = R_1 I_1^2 = 104,5^2 = 202 \text{ Вт}; P_2 = R_2 I_2^2 = 180 \text{ Вт};$$

$$P_3 = R_3 I_3^2 = 112 \text{ Вт.}$$

Проверка показывает, что $P = P_1 + P_2 + P_3$.

$$Q = \operatorname{Im} \left[\dot{U} \overset{*}{I} \right] = \operatorname{Im} [120 \cdot 4,5e^{j23^\circ 55'}] = 120 \cdot 4,5 \sin 23^\circ 55' = 218 \text{ ВАр};$$

$$Q_1 = X_1 I_1^2 = 6 \cdot 4,5^2 = 122 \text{ ВАр}; Q_2 = X_2 I_2^2 = -52,5 \text{ ВАр};$$

$$Q_3 = X_3 I_3^2 = 150 \text{ ВАр.}$$

Учитывая, что Q_1 и Q_3 положительны (реактивная мощность индуктивных катушек), а Q_2 отрицательно (реактивная мощность конденсатора), получим $Q = Q_1 - Q_2 + Q_3 = 218$ ВАр.

На рис. 1.17 приведена векторная диаграмма токов и напряжений, построенная по расчетным данным. Порядок ее построения следующий: по результатам расчетов отложены векторы токов \dot{I}_1, \dot{I}_2 и \dot{I}_3 затем по направлению \dot{I}_1 отложен вектор $R_1 \dot{I}_1$ и перпендикулярно к нему в сторону опережения — вектор $jX_1 \dot{I}_1$. Их сумма дает вектор $\underline{Z}_1 \dot{I}_1$. Далее в фазе с \dot{I}_2 построен вектор $R_2 \dot{I}_2$ и перпендикулярно к нему в сторону отставания вектор $jX_2 \dot{I}_2$, а их

сумма дает вектор напряжения на параллельном участке \dot{U}_{bc} . Тот же вектор можно получить, если в фазе с \dot{I}_3 отложить $R_3 \dot{I}_3$ и к нему прибавить вектор $jX_3 \dot{I}_3$, опережающий \dot{I}_3 на 90° . Сумма векторов \underline{Z}_1 и \dot{U}_{bc} дает вектор приложенного напряжения \dot{U} .

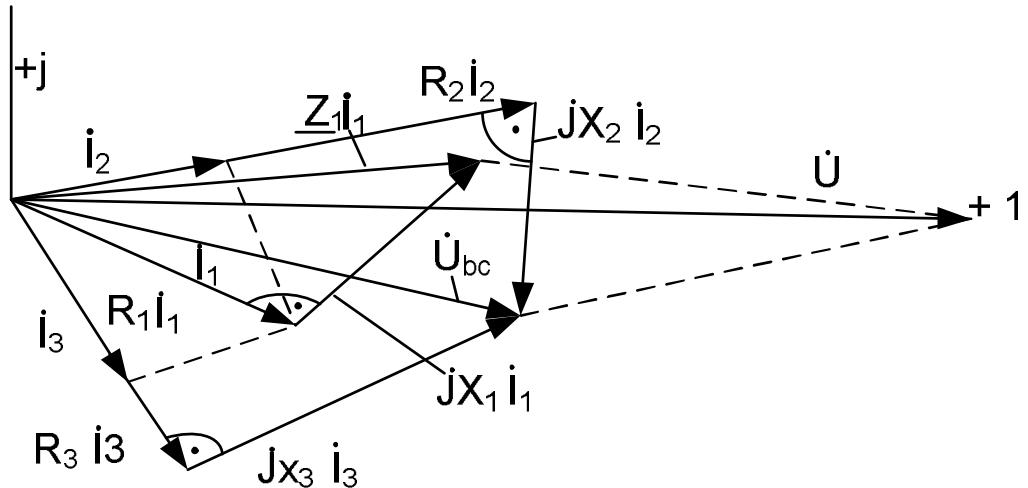


Рисунок 1.17

Пример 1.6. Определить эквивалентное комплексное сопротивление цепи (рис. 1.18, *a*), ток и напряжение между точками *a* и *b*, *c* и *d*, если $U = 130$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $\omega L_1 = 3$ Ом, $\omega L_2 = 7$ Ом, $\omega M = 1$ Ом.

Решение. Из рис. 1.18, *a* следует, что при заданном направлении тока в каждой катушке потоки самоиндукции и взаимной индукции одинаково направлены. Следовательно, катушки включены согласно. Заданная цепь может быть представлена схемой замещения, показанной на рис 1.18, *б*. Составим для нее уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U} = R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I}.$$

Эквивалентное комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{Z} = R_1 + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 + 2j\omega M = 5 + j12 = 13e^{-j67^\circ 20'} \text{ Ом.}$$

Искомый ток:

$$\dot{I} = \dot{U} / \underline{Z} = 130 / (13e^{-j67^\circ 20'}) = 10e^{-j67^\circ 20'} \text{ А.}$$

Комплексные напряжения между точками *a* и *b*, *c* и *d* равны:

$$\dot{U}_{ab} = (R_1 + j\omega L_1 + j\omega M) \dot{I} = (2 + j4)10e^{-j67^\circ 20'} = 44,7e^{-j3^\circ 50'} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{cd} = (R_2 + j\omega L_2 + j\omega M) \dot{I} = (3 + j8)10e^{-j67^\circ 20'} = 85,5e^{j2^\circ 05'} \text{ В.}$$

На рис. 1.18, *в* представлена векторная диаграмма. По действительной оси отложен вектор напряжения, от него в сторону отставания на $67^{\circ}20'$ направлен вектор тока, затем отложены векторы падения напряжения в каждой из катушек.

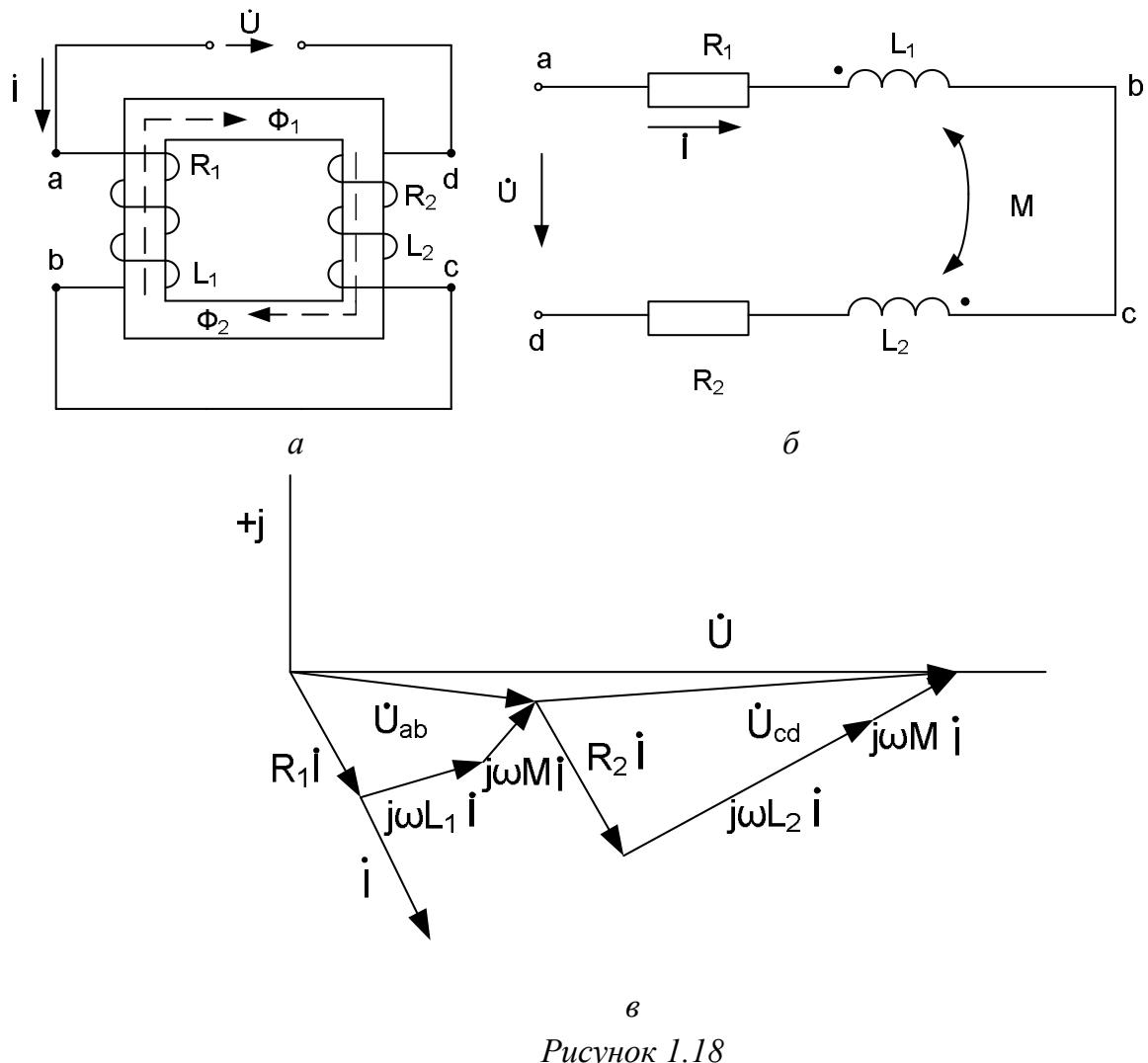


Рисунок 1.18

Задание 1.2 Расчет электрических цепей однофазного переменного тока

Для электрической схемы, соответствующей номеру варианта и изображённой на рисунке, выполнить следующие задания:

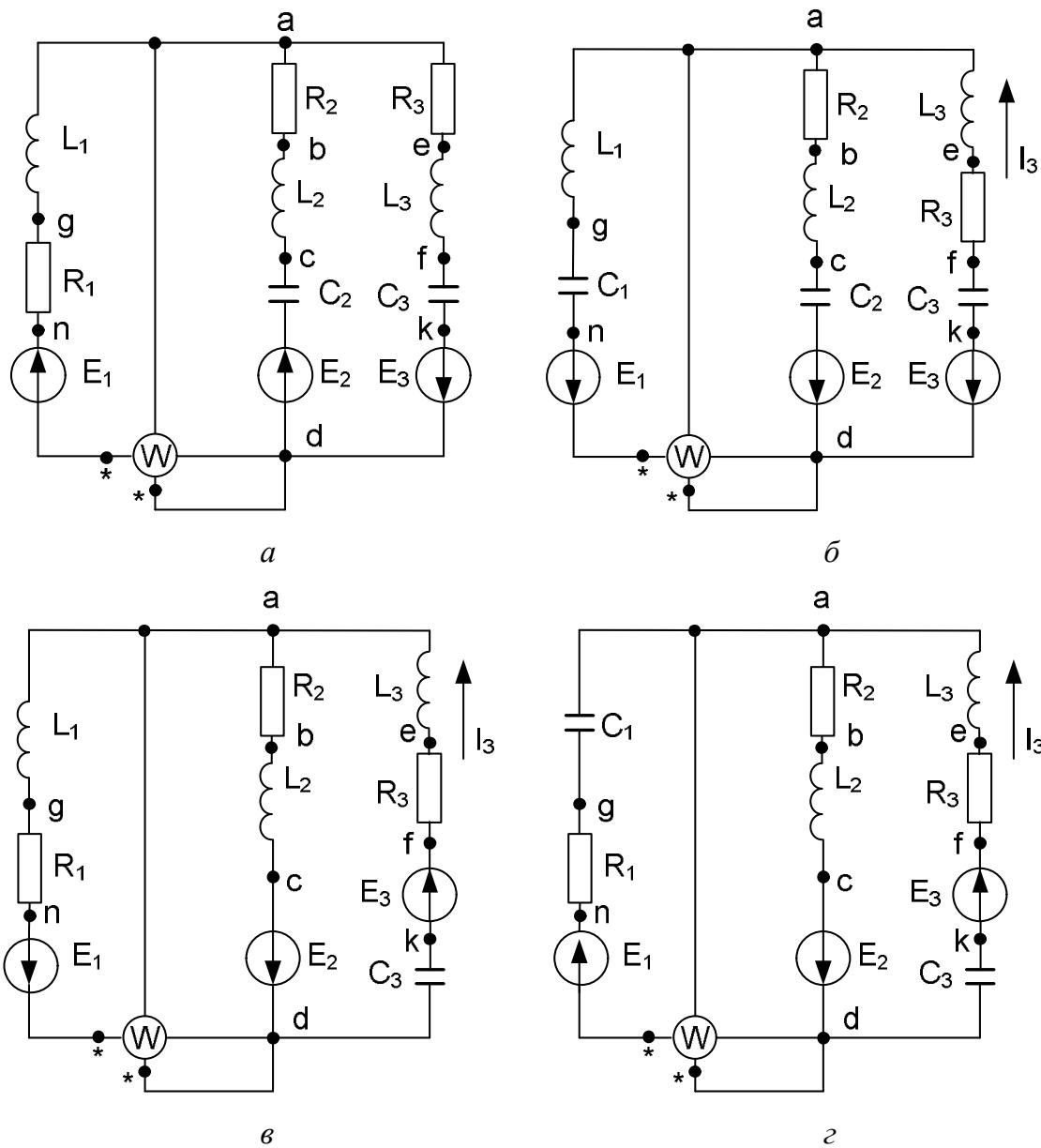
1. На основании законов Кирхгофа составить для контуров систему уравнений в дифференциальной и комплексной форме.

2. Определить комплексы действующих значений токов во всех ветвях схемы, воспользовавшись одним из методов расчёта линейных электрических цепей.

3. По результатам расчёта определить показание вольтметра с помощью выражений для комплексов тока и напряжения на вольтметре.

4. Построить векторную диаграмму токов.

5. Используя данные расчётов записать выражения для мгновенных значений токов и построить график зависимости их от времени.



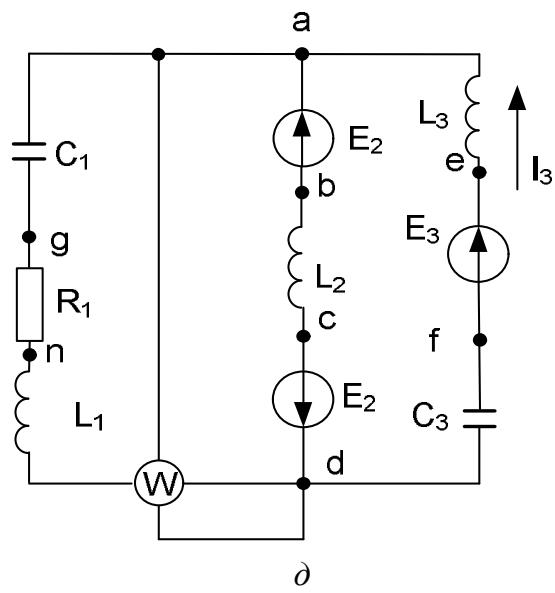


Рисунок 1.19

Таблица 1.2

Исходные данные

		Бар.1 Рис.1.19,а	Бар.2 Рис.1.19,б	Бар.3 Рис.1.19,в	Бар.4 Рис.1.19,г	Бар.5 Рис.1.19,д	Бар.6 Рис.1.19,е	Бар.7 Рис.1.19,а
e_1'	B	$311 \sin(\omega t + 30^\circ)$	-	$400 \sin(\omega t + 60^\circ)$	-	-	-	$400 \sin(\omega t)$
e_1''	B	-	$400 \sin(\omega t + 45^\circ)$	-	$311 \sin(\omega t + 45^\circ)$	-	-	-
e_2'	B	$689 \sin(\omega t + 12^\circ)$	$220 \sin(\omega t + 45^\circ)$	$200 \sin(\omega t + 30^\circ)$	$311 \sin(\omega t + 45^\circ)$	$450 \sin(\omega t + 60^\circ)$	$315 \sin(\omega t + 30^\circ)$	$311 \sin(\omega t + 15^\circ)$
e_2''	B	$496 \cos(\omega t - 149^\circ)$	-	-	-	-	$450 \sin(\omega t + 45^\circ)$	-
e_3'	B	$705 \sin(\omega t + 307^\circ)$	$400 \sin(\omega t + 60^\circ)$	$300 \sin(\omega t + 75^\circ)$	$311 \sin(\omega t + 30^\circ)$	$600 \sin(\omega t + 30^\circ)$	$600 \sin(\omega t + 60^\circ)$	$127 \sin(\omega t + 30^\circ)$
e_3''	B	-	-	-	-	-	-	-
R ₁	Ом	60	50	100	-	50	50	100
R ₂	Ом	-	40	80	40	70	-	60
R ₃	Ом	-	70	120	50	80	-	100
L ₁	$M\Gamma_H$	-	-	70	100	70	-	-
L ₂	$M\Gamma_H$	80	80	60	80	80	40	50
L ₃	$M\Gamma_H$	145	150	50	70	100	80	70
C ₁	МКФ	-	100	-	25	-	-	80
C ₂	МКФ	-	-	-	50	100	-	-
C ₃	МКФ	44.5	-	25	70	50	100	-
f	$\Gamma_{ц}$	120	50	50	50	50	50	100

Продолжение таблицы 1.2

	Bap.8 Рис.1.19,г	Bap.9 Рис.1.19,д	Bap.10 Рис.1.19,а	Bap.11 Рис.1.19,б	Bap.12 Рис.1.19,б	Bap.13 Рис.1.19,в	Bap.14 Рис.1.19,л
e_1'	B	$127\sin(\omega t+30^\circ)$	-	$300\sin(\omega t+60^\circ)$	-	$400\sin(\omega t+45^\circ)$	-
e_1''	B	-	-	-	$400\sin(\omega t+30^\circ)$	-	-
e_2'	B	$450\sin(\omega t+45^\circ)$	$400\sin(\omega t+30^\circ)$	$350\sin(\omega t+75^\circ)$	$300\sin(\omega t+60^\circ)$	$250\sin(\omega t+60^\circ)$	$200\sin(\omega t+15^\circ)$
e_2''	B	-	-	-	-	-	$150\sin(\omega t+10^\circ)$
e_3'	B	$220\sin(\omega t+30^\circ)$	$300\sin(\omega t+45^\circ)$	$400\sin(\omega t+60^\circ)$	$450\sin(\omega t+75^\circ)$	$500\sin(\omega t+25^\circ)$	$300\sin(\omega t+45^\circ)$
e_3''	B	-	-	-	-	-	$220\sin(\omega t+20^\circ)$
R_1	ОМ	-	100	120	-	150	80
R_2	ОМ	60	80	40	100	100	90
R_3	ОМ	80	60	70	120	75	40
L_1	$M\Gamma_H$	60	75	90	90	45	-
L_2	$M\Gamma_H$	80	80	100	70	40	50
L_3	$M\Gamma_H$	120	85	70	100	90	70
C_1	$M\Phi$	50	110	50	25	-	50
C_2	$M\Phi$	100	75	25	12.5	80	-
C_3	$M\Phi$	125	25	100	75	75	-
f	Γ_{Π}	100	50	100	50	100	50

1.3 ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

В трехфазных цепях могут быть два режима: симметричный и несимметричный. Расчет трехфазных цепей в симметричном режиме сводится к расчету для одной фазы и производится аналогично расчету однофазной цепи с одним источником. Трехфазные цепи можно рассматривать как разветвленные цепи с тремя источниками питания, и для их расчета применяются методы, используемые при расчете электрических цепей с несколькими источниками. Например, если несимметричный приемник соединен без нейтрального провода, то для расчета трехфазных цепей можно применить метод узлового напряжения в комплексной форме.

Необходимо:

1. Знать основные элементы трехфазных цепей, способы соединения фаз обмотки генератора и включения в трехфазные цепи приемников; способы изображения трехфазной симметричной системы Э.Д.С.
2. Понимать роль нейтрального провода; принципы построения потенциальных диаграмм; влияние рода и схемы включения нагрузки на величину тока в нейтральном проводе, схемы электроснабжения предприятий.
3. Уметь анализировать различные режимы симметричных и несимметричных цепей; читать схемы соединения трехфазных и однофазных приемников; предвидеть последствия коммутационных изменений в цепи на ее электрическое состояние.

Пример 1.7. В трехфазных цепях с линейным напряжением $U_L = 220$ В включен приемник, соединенный по схеме треугольник, сопротивление каждой фазы которого $Z = (10 + j10)$ Ом (рис. 1.20). Найти токи в каждой фазе нагрузки и линии и показания каждого ваттметра. Построить векторную диаграмму. Найти те же величины при обрыве цепи в точке d .

Решение. Расчет токов в трехфазных цепях производится комплексным методом. Примем, что вектор линейного напряжения \dot{U}_{AB} направлен по действительной оси, тогда:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{U}_{ab} = 220 \text{ В}; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{bc} = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_{ca} = 220e^{j120^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

Определяем фазные токи:

$$\begin{aligned}I_{ab} &= \dot{U}_{ab}/Z = 220/(10 + j10) = 15,6e^{j-45^\circ} = 11 - j11 \text{ А}; \\ I_{bc} &= \dot{U}_{bc}/Z = 220e^{j120^\circ}/(10 + j10) = 15,6e^{j165^\circ} = 4,03 + j15 \text{ А}; \\ I_{ca} &= \dot{U}_{ca}/Z = 220e^{j120^\circ}/(10 + j10) = 15,6e^{j75^\circ} = 4,03 + j15 \text{ А}.\end{aligned}$$

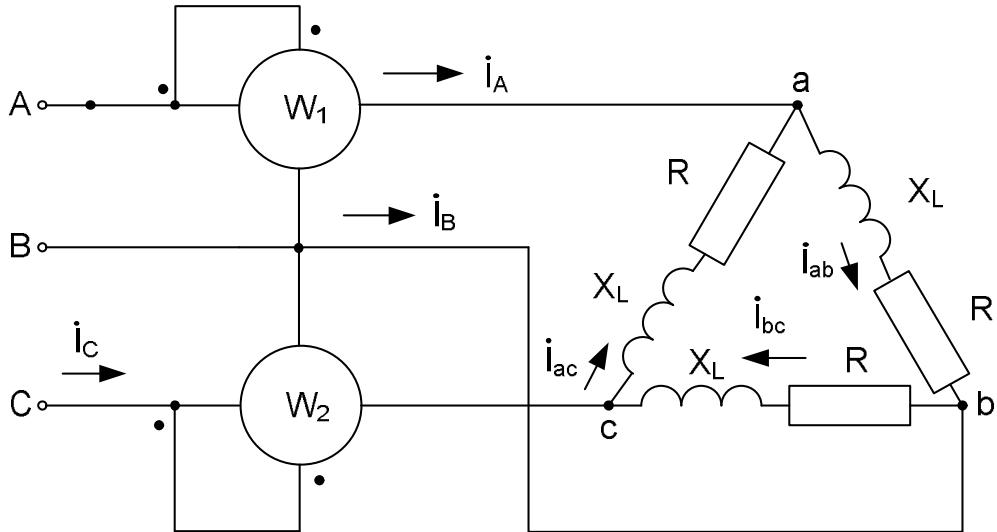


Рисунок 1.20

Находим линейные токи:

$$\begin{aligned}I_A &= I_{ab} - I_{ca} = 6,97 - j26 = 26,9e^{-j75^\circ} \text{ А}; \\ I_B &= I_{bc} - I_{ab} = -26 + j6,97 = 26,9e^{-j165^\circ} \text{ А}; \\ I_C &= I_{ca} - I_{bc} = 19 + j19 = 26,9e^{j45^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

Определяем показания ваттметров:

$$\begin{aligned}P_1 &= \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{AB} I_A^* \right] = \operatorname{Re} \left[220 \cdot 26,9e^{j75^\circ} \right] = 220 \cdot 26,9 \cos 75^\circ = 1530 \text{ Вт}; \\ P_2 &= \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{CB} I_C^* \right] = \operatorname{Re} \left[-220e^{-j120^\circ} \cdot 26,9e^{-j45^\circ} \right] = \operatorname{Re} \left[220e^{j60^\circ} \cdot 26,9e^{-j45^\circ} \right] = \\ &= 220 \cdot 26,9 \cos 15^\circ = 5730 \text{ Вт}.\end{aligned}$$

Определяем активную мощность цепи (алгебраическая сумма показаний ваттметров):

$$P = P_1 + P_2 = 1530 + 5730 = 7260 \text{ Вт}.$$

Или:

$$P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 26,9 \cos 45^\circ = 3RI_{\Phi}^2 = 7260 \text{ Вт}.$$

На рис. 1.21 приводится векторная диаграмма напряжений и токов.

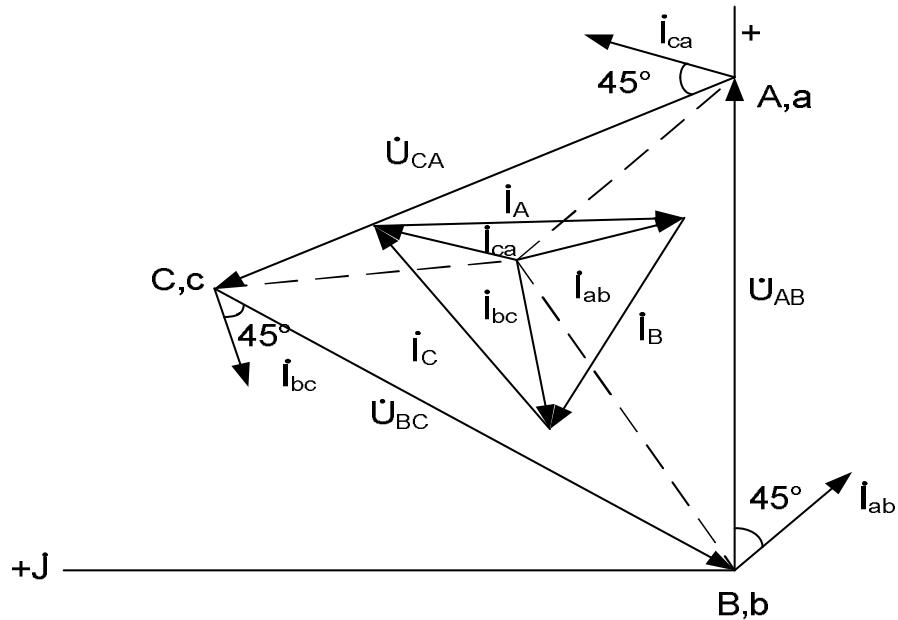


Рисунок 1.21

При обрыве в точке d токи в фазах нагрузки будут:

$$\dot{I}_{bc} = \dot{U}_{bc}/Z = 220e^{-j120^\circ}/(10 + j10) = -15 - j4,03 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{ab} = \dot{I}_{ca} = \dot{U}_{cb}/2Z = -220e^{-j120^\circ}/2(10 + j10) = 7,5 + j2,02 \text{ A}.$$

Вычислим линейные токи:

$$\dot{I}_A = 0; \dot{I}_C = -\dot{I}_B = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} = 22,5 + j6,05 = 23,3e^{j15^\circ} \text{ A}.$$

Находим показание ваттметра:

$$P_1 = 0;$$

$$P_2 = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{CB} I_C^* \right] = \operatorname{Re} \left[220e^{j60^\circ} \cdot 23,3e^{-j15^\circ} \right] = 220 \cdot 23,3 \cos 45^\circ = 3630 \text{ Вт}.$$

Пример 1.8. В четырехпроводную сеть с линейным напряжением $U_L = 220$ В включен по схеме звезда приемник, активные и индуктивные сопротивления фаз которой соответственно равны: $R_a = 3 \text{ Ом}$; $X_a = 4 \text{ Ом}$; $R_b = 3 \text{ Ом}$; $X_b = 5,2 \text{ Ом}$; $R_c = 4 \text{ Ом}$; $X_c = 3 \text{ Ом}$ (рис. 1.22). Определить токи в линейных и нейтральном проводах и построить векторную диаграмму.

Решение. Считаем что вектор фазного напряжения \dot{U}_a направлен по действительной оси, тогда $\dot{U}_a = \frac{U_\text{л}}{\sqrt{3}} = 127$ В, $\dot{U}_b = 127e^{-j120^\circ}$ В, $\dot{U}_c = 127e^{j120^\circ}$ В.

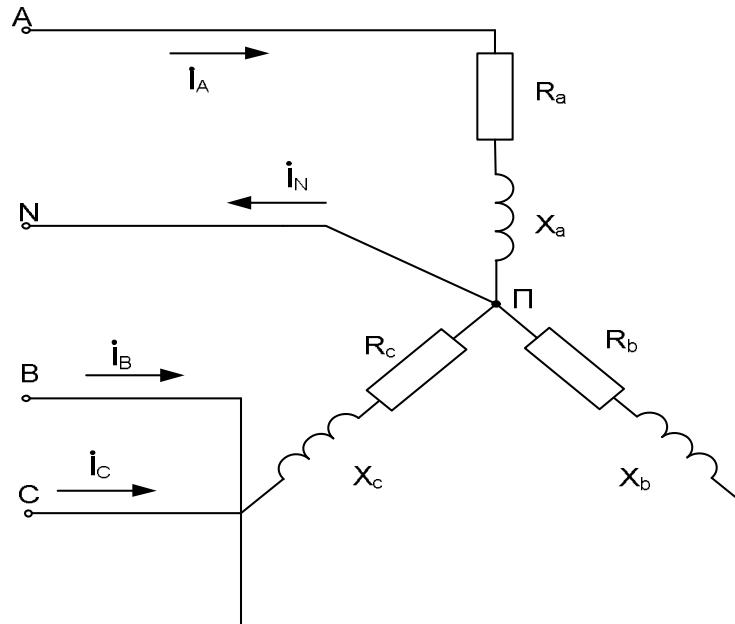


Рисунок 1.22

Находим линейные токи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_a &= \dot{U}_a/Z = 127/(3 + j4) = 127/(5e^{j53^\circ}) = 25,4e^{-j53^\circ} \text{ А;} \\ \dot{I}_b &= \dot{U}_b/Z_b = 127e^{-j120^\circ}/(3 + j5,2) = 127e^{-j120^\circ}/(6e^{j60^\circ}) = \\ &= 21,2e^{-j180^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_c = \dot{U}_c/Z_c = 120e^{j120^\circ}/(4 + j3) = 127e^{j120^\circ}/5e^{j37^\circ} = 25,4e^{j83^\circ} \text{ А}$$

Ток в нейтральном проводе определяется как геометрическая сумма линейных токов:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 25,4e^{-j53^\circ} + 21,2e^{-j180^\circ} + 25,4e^{j83^\circ} = 5,9e^{j124^\circ} \text{ А.}$$

Векторная диаграмма показана на рис. 1.23.

При несимметричной нагрузке для определения активной мощности находят мощность каждой фазы отдельно: $P_\phi = U_\phi I_\phi \cos \varphi$, а мощность всей трехфазной системы получают как сумму мощностей всех фаз или используют схему включения двух ваттметров.

Пример 1.9. В трехфазных цепях с линейным напряжением $U_\text{л} = 380$ В включен по схеме звезда приемник, активное, индуктивное и емкостное сопротивления фаз которого равны:

$R_a = X_L = X_c = 22$ Ом (рис. 1.24). Определить токи и построить векторную диаграмму.

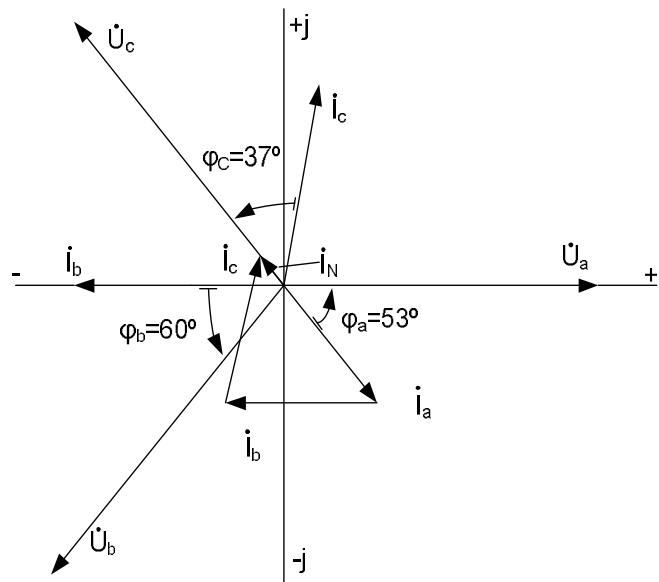


Рисунок 1.23

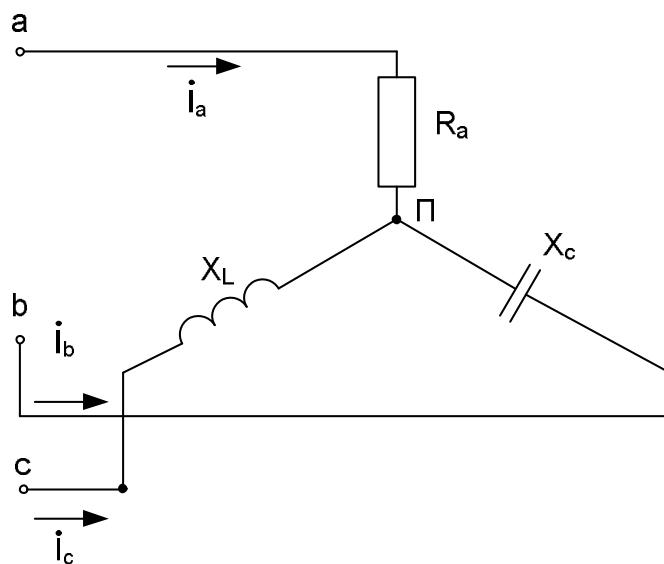


Рисунок 1.24

Решение. Расчет токов производим комплексным методом.
Находим фазные напряжения:

$$U_\phi = U_\pi / \sqrt{3} = 280 / 1,73 = 220 \text{ В.}$$

$$\dot{U}_a = 220 \text{ В}; \dot{U}_b = 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j191) \text{ В};$$

$$\dot{U}_c = 220e^{j120^\circ} = (-110 + j191) \text{ В.}$$

Определяем напряжение между нейтральными точками приемника и источника питания:

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_a + \underline{Y}_b \dot{U}_b + \underline{Y}_c \dot{U}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \frac{\frac{1}{22} \cdot 220 + j \frac{1}{22} (-110 - j191) - j \frac{1}{22} (-110 + j191)}{\frac{1}{22} + j \frac{1}{22} - j \frac{1}{22}} = 602 \text{ B.}$$

Находим напряжения на зажимах фаз приемника:

$$\dot{U}_{an} = 220 - 602 = -382 \text{ B;}$$

$$\dot{U}_{bn} = (-110 - j191) - 602 = (-712 - j191) \text{ B;}$$

$$\dot{U}_{cn} = (-110 + j191) - 602 = (-712 + j191) \text{ B.}$$

Находим фазные (линейные) токи:

$$I_a = \frac{\dot{U}_{an}}{R_a} = -\frac{382}{22} = -17,3 \text{ A;}$$

$$I_b = \dot{U}_{bn}/(-jX_c) = (-712 - j191)/(-j22) = (8,68 - j32,4) \text{ A;}$$

$$I_c = \dot{U}_{cn}/(jX_L) = (-712 + j191)/j22 = (8,68 + j32,4) \text{ A.}$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 1.25.

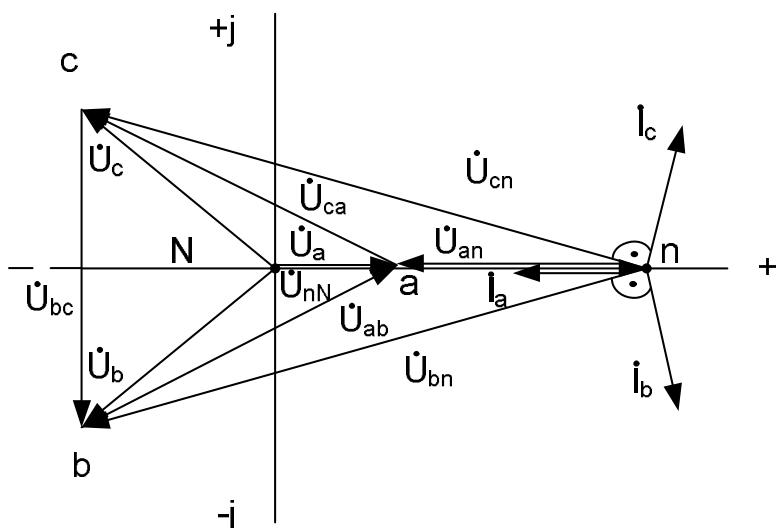


Рисунок 1.25

Для подсчета активной мощности в данной схеме можно воспользоваться уравнениями, записанными для схемы включения двух ваттметров. Из рассмотрения этой задачи следует, что напряжения на зажимах фаз приемника получаются неодинаковыми. Поэтому несимметричные приемники (бытовые и т.д.) соединяют либо четырехпроводная по схеме звездой, либо по схеме треугольником.

Задание 1.3 Расчет трехфазных электрических цепей переменного тока

Определить токи, напряжения и мощность в симметричном режиме.

1. Записать систему фазных напряжений генератора в комплексной форме.
2. Определить фазные токи, напряжения приёмника, падения напряжения в линии и фазных нагрузках приёмника.
3. Определить активную, реактивную и полную мощность приёмника.
4. Определить все токи и напряжения при обрыве одной фазы нагрузки приёмника (фаза А).
5. Определить все токи и напряжения при коротком замыкании одной фазы нагрузки приёмника (фаза А).

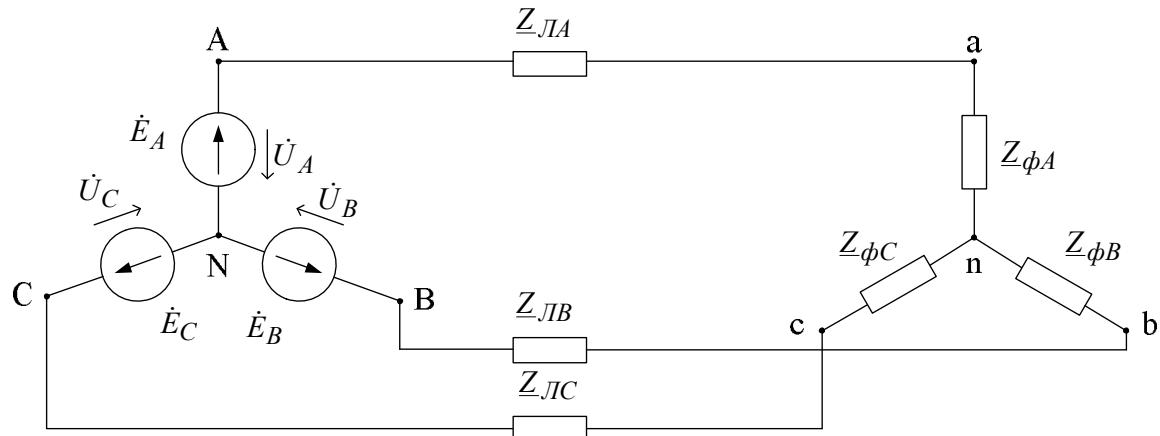


Рисунок 1.26

Таблица 1.3

Исходные данные

Вариант	U_L , В	$\underline{Z}_{\phi A} = \underline{Z}_{\phi B} = \underline{Z}_{\phi C} = \underline{Z}_H$, Ом	$\underline{Z}_{LA} = \underline{Z}_{LB} = \underline{Z}_{LC} = \underline{Z}_L$, Ом
1	220	$20,64 e^{j73,3}$	$0,707 e^{j45}$
2	220	$20,5 e^{j30}$	$0,5 e^{j30}$
3	220	$20,5 e^{j45}$	$0,5 e^{j45}$
4	220	$20,5 e^{j60}$	$0,5 e^{j60}$
5	220	$45 e^{j90}$	$0,5 e^{j90}$
6	220	$45 e^{-j45}$	$0,5 e^{-j90}$
7	220	$45 e^{-j90}$	$0,707 e^{j30}$
8	127	$40 e^{j30}$	$0,707 e^{j45}$
9	127	$40 e^{j0}$	$0,707 e^{j60}$
10	127	$40 e^{j60}$	$0,707 e^{j75}$
11	380	$50 e^{j0}$	$1,0 e^{j30}$
12	380	$50 e^{j30}$	$1,0 e^{j45}$
13	380	$50 e^{j45}$	$1,0 e^{j60}$
14	380	$50 e^{j60}$	$1,0 e^{-j90}$
15	380	$50 e^{j90}$	$1,0 e^{j90}$
16	380	$50 e^{-j90}$	$1,0 e^{j60}$

ЧАСТЬ 2

2.1 ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

После изучения данного раздела студенты должны:

1. Знать законы изменения токов и напряжений в простейших электрических цепях при переходном процессе, решение уравнений электрического состояния цепи при переходном процессе.

2. Понимать причины возникновения переходных процессов в электрических цепях; законы коммутации; характер изменения токов и напряжений в электрических цепях при переходных процессах; смысл и значение постоянной времени.

3. Уметь составлять уравнения электрического состояния линейных электрических цепей при переходных процессах; определять постоянную времени простейших электрических цепей; определять закон изменения токов и напряжений в простейших линейных электрических цепях при переходных процессах.

Переходный (неустановившийся) процесс возникает в электрической цепи как в результате изменения параметров цепи, так и при негармоническом изменении значения приложенного напряжения.

Изучая переходные процессы, определяем закономерности изменения тока и напряжения в элементах электрических цепей в функции времени при переходе от одного установившегося состояния к другому. Этот переход сопровождается изменением энергии магнитного поля в индуктивной катушке $W_L = Li^2/2$ и энергии электрического поля в конденсаторе $W_C = Cu^2/2$. Эти энергии не могут изменяться скачком, так как мощность, равная производной энергии по времени, $P = dW/dt$ должна в этом случае достигнуть бесконечно большого значения, что практически невозможно. Следовательно, если не могут скачком измениться энергии W_L и W_C , то не могут меняться скачком ток i в ветви с индуктивной катушкой L и напряжение u на конденсаторе C , что и обуславливает законы коммутации.

Для цепи, состоящей из трех последовательно соединенных элементов с параметрами R , L и C , уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа, для мгновенных напряжений и тока имеет следующий вид:

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt \quad (2.1)$$

Это уравнение справедливо для любого момента времени, а, следовательно, как для установившегося состояния, так и для переходного процесса. Уравнение (2.1) является неоднородным и его общий интеграл можно представить как сумму частного решения данного уравнения и его общего решения при равенстве нулю правой части.

Решением уравнения для переходного процесса являются показательные и тригонометрические функции, играющие главенствующую роль при исследовании переходных процессов. Представим себе, что уравнение (2.1) рассматривается для установившегося состояния. Назовем ток установившегося состояния «установившимся» током и обозначим через i_y , тогда уравнение (2.1) примет вид:

$$u = L \frac{di_y}{dt} + Ri_y + \frac{1}{C} \int i_y dt. \quad (2.2)$$

Вычитая (2.2) из (2.1), получаем:

$$0 = L \frac{d(i_{\text{пер}} - i_y)}{dt} + R(i_{\text{пер}} - i_y) + \frac{1}{C} \int (i_{\text{пер}} - i_y) dt. \quad (2.3)$$

В полученном уравнении разность токов $(i_{\text{пер}} - i_y)$ является не чем иным, как некоторым током, который существует в электрической цепи только во время переходного процесса; напряжение u равно нулю и ток $(i_{\text{пер}} - i_y)$ существует как бы независимо от приложенного к цепи внешнего напряжения. Этот ток называют «свободным» и обозначают через $i_{\text{св}}$: $i_{\text{св}} = i_{\text{пер}} - i_y$.

Откуда:

$$i_{\text{пер}} = i_y + i_{\text{св}}. \quad (2.4)$$

Как показывает выражение (2.4), ток переходного процесса может быть получен как сумма двух токов, одним из которых является ток установившегося состояния i_y , определяемый как

частное решение дифференциального уравнения (2.1), а вторым — ток, определяемый как общее решение соответствующего однородного уравнения.

Заменяя $(i_{\text{пер}} - i_y)$ в уравнении (2.3) на i_{cb} , получаем однородное дифференциальное уравнение для определения свободного тока:

$$0 = L \frac{di_{\text{cb}}}{dt} + Ri_{\text{cb}} + \frac{1}{C} \int i_{\text{cb}} dt. \quad (2.5)$$

Таким образом, для исследования переходного процесса в последовательной цепи составляется дифференциальное уравнение, описывающее переходный процесс (2.1), уравнение, определяющее собой ток установившегося состояния (2.2), и однородное дифференциальное уравнение для свободного тока (2.5).

Для решения однородного дифференциального уравнения свободного тока составляется характеристическое уравнение, для чего однородное дифференциальное уравнение свободного тока записывают в алгебраической форме путем замены производной d/dt через оператор p , а интеграла $\int dt$ через $1/p$.

Произведя указанные операции над уравнением (2.5), получаем:

$$0 = pLi_{\text{cb}} + Ri_{\text{cb}} + \frac{1}{pC} i_{\text{cb}}.$$

Вынося за скобку i_{cb} , находим :

$$0 = \left(pL + R + \frac{1}{pC} \right) i_{\text{cb}}.$$

Так как здесь i_{cb} , не равен нулю, то $pL+R+1/pC = 0$. Откуда получаем искомое характеристическое управление

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Показатель степени p определяет порядок дифференциального уравнения свободного тока. Таким образом, в цепи, состоящей из трех последовательно соединенных элементов с параметрами R , L и C имеем дифференциальное уравнение второго порядка.

Определяем корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}.$$

В зависимости от значения корней характеристического уравнения (соотношения между параметрами цепи R , L и C) будут

получены следующие частные решения однородного дифференциального уравнения свободного тока:

1. Если $(R/2L)^2 > 1/LC$, то:

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

2. Если $(R/2L)^2 < 1/LC$, то:

$$i_{\text{св}} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t).$$

3. Если $(R/2L)^2 = 1/LC$, то:

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{pt} + A_2 e^{pt};$$

$$\delta = R/2L; \omega' = \sqrt{1/(LC) - (R/2L)^2}.$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования;

p_1 и p_2 — корни характеристического уравнения.

Корни характеристического уравнения во втором случае соответственно равны: $p_1 = -\delta + j\omega'$, $p_2 = -\delta - j\omega'$.

Пример 2.1. Определить ток переходного процесса при подключении индуктивной катушки (последовательно соединены элементы с параметрами R и L) к источнику постоянного напряжения и к источнику синусоидального напряжения.

Дано: $R = 10$ Ом, $L = 0,1$ Гн, для постоянного напряжения $U = 100$ В, для синусоидального напряжения $u = 100 \sin(\omega t + 30^\circ)$ В, $f=50$ Гц.

Решение. Постоянное напряжение. Определяем ток установившегося состояния:

$$i_y = U/R = 100/10 = 10 \text{ А.}$$

Уравнения свободного тока:

$$0 = Ri_{\text{св}} + L \frac{di_{\text{св}}}{dt}.$$

Его характеристическое уравнение:

$$0 = R + Lp,$$

Откуда корень характеристического уравнения:

$$p = -R/L = -10/0,1 = -100.$$

Свободный ток:

$$i_{\text{пер}} = Ae^{pt} = Ae^{-100t} \text{ А.}$$

Ток переходного процесса:

$$i_{\text{пер}} = i_y + i_{\text{св}} = 10 + Ae^{-100t} \text{ А.}$$

Определяем постоянную интегрирования A . Полагая $t = 0$ и учитывая, что ток в индуктивной катушке скачком возникнуть не может (цепь до начала переходного процесса была разомкнута, $i=0$), получаем $i_{(t=0)} = i_{y(t=0)} + i_{\text{св}(t=0)} = 10 + A$, откуда $A = -10$.

Таким образом, ток переходного процесса будет равен:

$$i_{\text{пер}} = 10 - 10e^{-100t} \text{ А.}$$

2. Синусоидальное напряжение. Определяем установившийся ток:

$$\underline{Z} = R + j\omega L = 10 + j2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 = 10 + j31,4 = 33e^{j72^\circ} \text{ Ом}$$

$$\dot{I}_{my} = \dot{U}_m / \underline{Z} = 100e^{j30^\circ} / 33e^{j72^\circ} = 3e^{-j42^\circ} \text{ А;}$$

$$i_y = 3 \sin(\omega t - 42^\circ) \text{ А.}$$

Так как свободный ток не зависит от напряжения, то воспользуемся его выражением, полученным в предыдущей задаче. Тогда ток переходного процесса:

$$i_{\text{пер}} = i_y + i_{\text{св}} = 3 \sin(\omega t - 42^\circ) + A e^{-100t} \text{ А.}$$

Определяем постоянную интегрирования A :

$$i_{(t=0)} = 3 \sin(-42^\circ) + A = -2 + A = 0.$$

$$A = 2.$$

Таким образом, ток переходного процесса:

$$i = 3 \sin(\omega t - 42^\circ) + 2e^{-100t} \text{ А.}$$

Пример 2.2. Определить ток переходного процесса в цепи с последовательным соединением конденсатора и резистора при подключении ее как к источнику постоянного напряжения, так и к источнику синусоидального напряжения.

Дано: $R = 10$ Ом, $C = 200$ мкФ для постоянного напряжения $U = 100$ В, для синусоидального напряжения $u = 100 \sin(\omega t + 30^\circ)$ В, $f = 50$ Гц.

Решение.

1. Постоянное напряжение. Установившийся ток в цепи с конденсатором, подключенной к постоянному напряжению, равен нулю, так как конденсатор, зарядившись до величины питающего напряжения, размыкает цепь.

Следовательно, ток переходного процесса определяется только свободным током. Уравнение свободного тока:

$$0 = Ri_{\text{cb}} + \frac{1}{C} \int i_{\text{cb}} dt.$$

Дифференцируя уравнение свободного тока, получаем:

$$0 = R \frac{di_{\text{cb}}}{dt} + i_{\text{cb}}/C.$$

Тогда характеристическое уравнение:

$$0 = Rp + 1/C.$$

Откуда корень характеристического уравнения

$$p = -1/RC = -10^6/10 \cdot 200 = -500.$$

Ток переходного процесса:

$$i_{\text{пер}} = i_{\text{cb}} = Ae^{pt} = Ae^{-500t} \text{ А.}$$

Определяем постоянную интегрирования A . Полагая $t = 0$ и учитывая, что напряжение на конденсаторе скачком возникнуть не может (конденсатор до начала переходного процесса не был заряжен, $u_c = 0$), получаем:

$$i_{(t=0)} = A = U/R = 100/10 = 10 \text{ А.}$$

Таким образом, ток переходного процесса:

$$i_{\text{пер}} = 10e^{-500t} \text{ А.}$$

2. Синусоидальное напряжение. Определяем установившийся ток:

$$\begin{aligned} Z &= R - j \frac{1}{\omega C} = 10 - j \frac{10^6}{2\pi \cdot 50 \cdot 200} = 10 - j16 = 19e^{-j58} \text{ Ом;} \\ I_{my} &= \frac{U_m - 100e^{j30^\circ}}{Z} = \frac{100e^{j30^\circ}}{19e^{-j58^\circ}} = 5,3e^{j88^\circ} \text{ А;} \\ i_y &= 5,3 \sin(\omega t + 88^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

Воспользуемся выражением для свободного тока из предыдущей задачи. Тогда ток переходного процесса:

$$i_{\text{пер}} = i_y + i_{\text{cb}} = 5,3 \sin(\omega t + 88^\circ) + Ae^{-500t} \text{ А.}$$

Определяем постоянную интегрирования A :

$$i_{(t=0)} = 5,3 \sin 88^\circ + A = 5,3 + A.$$

Откуда $A = i_{(t=0)} - 5,3$.

Найдем ток $i_{(t=0)}$ в момент включения:

$$i_{(t=0)} = u_{(t=0)}/R = 100 \sin 30^\circ / 10 = 5 \text{ А.}$$

Следовательно $A = 5 - 5,3 = -0,3$.

Таким образом, ток переходного процесса

$$i_{\text{пер}} = 5,3 \sin(\omega t + 88^\circ) - 0,3e^{-500t} \text{ А.}$$

Пример 2.3. Определить емкость C конденсатора в цепи с последовательным соединением резистора и конденсатора, включенной на постоянное напряжение $U_0 = 200$ В, из условия, что через время $t = T_1 = 30$ мс после включения напряжение на конденсаторе при заряде его через резистор с сопротивлением $R = 5$ мОм достигнет значения $U_{c1} = 30$ В. Найти значение тока i_C в момент $t = T_1$.

Решение. Выражение для напряжения на конденсаторе во время переходного процесса в рассматриваемой цепи имеет вид $u_C = U_0(1 - e^{-t/RC})$. Из этого выражения определим значение емкости конденсатора C .

При $t = T_1 = 30$ мс, $u_{C(t_1=T_1)} = U_{c1} = 30$ В, следовательно, $30 = 200(1 - e^{-T_1/RC})$, откуда $e^{-T_1/RC} = 170/200 = 0,85$.

Отсюда:

$$\frac{-T_1}{RC} = \ln 0,85 = \ln 85 - \ln 10 = 2,14 - 2,3 = -0,16.$$

Т.е. $T_1 = 0,16RC = 30$ мс.

Окончательно:

$$C = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{0,16 \cdot 5 \cdot 10^6} = 0,037 \text{ мкФ.}$$

Выражение для тока в цепи запишем в виде:

$$i_C = \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC}$$

Подставляя в это выражение значения U_0, R, C и $t = T_1 = 30$ мс, находим:

$$i_{c1} = \frac{U_0}{R} e^{-T_1/RC} = \frac{200}{5 \cdot 10^6} e^{-0,16} = 34,2 \text{ мкА.}$$

2.1.1 Расчет переходных процессов различными методами

1. Классический метод.
2. Операторный метод.
3. Метод переменных состояний.
4. Метод интеграла Диамеля.

Пример 2.4.

1. Рассчитать переходные токи в ветвях и переходные напряжения на реактивных элементах для схемы рис. 2.1 классическим, операторным и методом переменных состояния. Построить графики зависимости переходных тока в ветви с индуктивностью и переходного напряжения в ветви с конденсатором.

2. Рассчитать переходной ток в ветви с источником Э.Д.С. (в форме одиночного прямоугольного импульса), методом интеграла Дюамеля (перед началом расчета цепи упростить схему закоротив C). Построить график зависимости переменной тока в ветви с источником Э.Д.С.

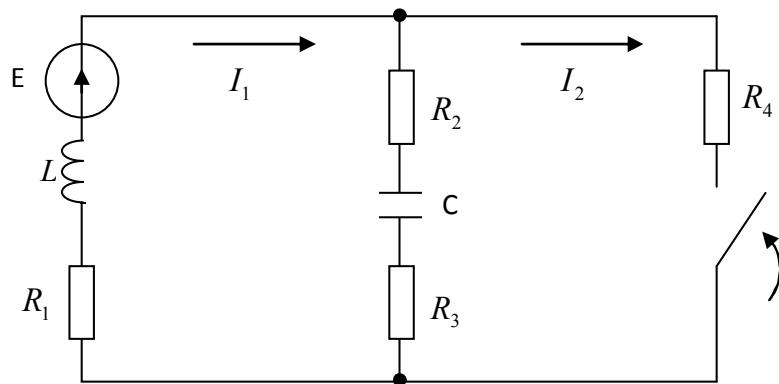


Рисунок 2.1

$$E = 15 \text{ В};$$

$$L = 204 \text{ мкГн} = 204 \times 10^{-6} \text{ Гн};$$

$$C = 174 \text{ нФ} = 174 \times 10^{-9} \text{ Ф};$$

$$R_1 = 8 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 5 \text{ Ом};$$

$$R_4 = 2 \text{ Ом};$$

$$t_1 = 8,5 \text{ мкс};$$

$$t_2 = t_1.$$

Решение.

I. Расчет классическим методом

1. Выбираем положительное направление токов в ветви в соответствии с рис. 2.2.

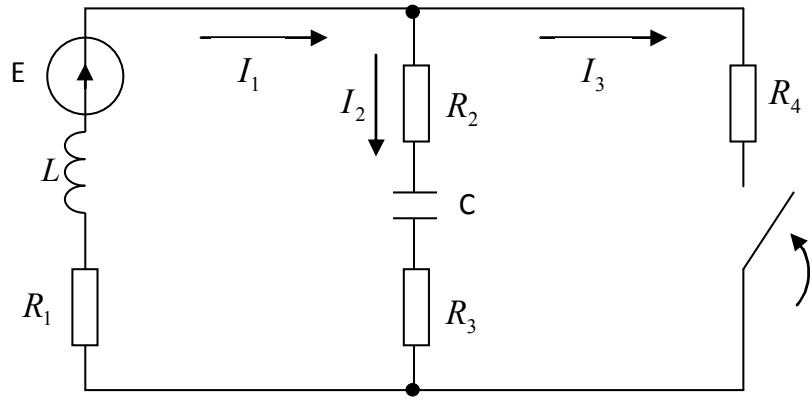


Рисунок 2.2

2. Составим уравнения по 1-му и 2-му закону Кирхгофа после коммутации:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 R_1 + L \frac{di_1}{dt} + i_3 R_4 = E \\ i_2 (R_2 + R_3) + \frac{1}{C} \int i_2 dt - i_3 R_4 = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Дифференцируем по t 1 и 3 уравнения системы (2.6):

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} - \frac{di_3}{dt} = 0 \\ i_1 R_1 + L \frac{di_1}{dt} + i_3 R_4 = E \\ (R_2 + R_3) \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} i_2 - R_4 \frac{di_3}{dt} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

3. Используя систему (2.6) составляем выражение переходного тока в ветви с емкостью C из 3^{го} уравнения системы (2.7):

$$i_2 (R_2 + R_3) + U_C - i_3 R_4 = 0$$

Заменяя $i_3 = i_1 - i_2$ значением из 1^{го} уравнения системы (2.6):

$$i_2 (R_2 + R_3) + U_C - (i_1 - i_2) R_4 = 0,$$

где

$$i_2 = \frac{i_1 R_4 - U_C}{R_2 + R_3 + R_4}. \quad (2.8)$$

4. Используя систему (2.7) составляем выражения для производных переходных токов через переходные токи.

Из 2^{го} уравнения системы (2.7):

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{E - i_1 R_1 - i_3 R_4}{L}. \quad (2.9)$$

Из 3^{го} уравнения системы (2.7) определим:

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{R_2 + R_3}{R_4} \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{CR_4} i_2$$

Подставим в 1^е уравнение системы (2.7):

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{R_4 C} i_2 - \frac{R_2 + R_3}{R_4} \frac{di_2}{dt} &= 0 \\ \frac{di_2}{dt} \left(1 + \frac{R_2 + R_3}{R_4} \right) &= \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{R_4 C} i_2 \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \left(\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{R_4 C} i_2 \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из уравнения 1 системы (2.7) определим

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} \quad (2.11)$$

5. Составляем выражение свободных токов в ветвях (для схемы после коммутации)

5.1 Схема после коммутации, для свободного режима рис. 2.3 (E отсутствует). Для упрощения преобразований вместо свободных токов в ветвях используем контурные токи.

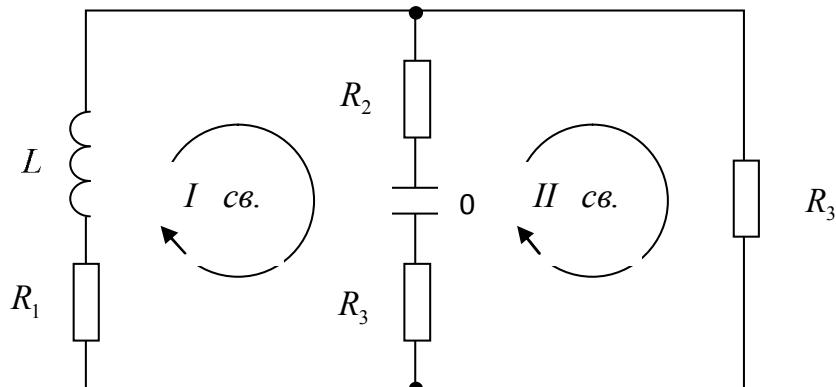


Рисунок 2.3

5.2 Система дифференциальных уравнений свободных контурных токов, по 2 закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_{I_{ce}}(R_1 + R_2 + R_3) + L \frac{di_{I_{ce}}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{I_{ce}} dt - (R_2 + R_3)i_{II_{ce}} - \frac{1}{C} \int i_{II_{ce}} dt = 0 \\ i_{I_{ce}}(R_2 + R_3) - \frac{1}{C} \int i_{I_{ce}} dt + i_{II_{ce}}(R_2 + R_3 + R_4) + \frac{1}{C} \int i_{II_{ce}} dt = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Линеаризуем систему (2.12):

$$\begin{cases} i_{I_{ce}} \left(R_1 + R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \right) - i_{II_{ce}} \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{Cp} \right) = 0 \\ -i_{I_{ce}} \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{Cp} \right) + i_{II_{ce}} \left(R_2 + R_3 + R_4 + \frac{1}{Cp} \right) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

5.3 Определитель системы (2.13):

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} & -\left(R_2 + R_3 + \frac{1}{Cp} \right) \\ -\left(R_2 + R_3 + \frac{1}{Cp} \right) & R_2 + R_3 + R_4 + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix} = \\ &= \left((R_1 + R_2 + R_3) + Lp + \frac{1}{Cp} \right) \left((R_2 + R_3 + R_4) + \frac{1}{Cp} \right) - \left((R_2 + R_3) + \frac{1}{Cp} \right)^2 = \\ &= (R_1 + R_2 + R_3)(R_2 + R_3 + R_4) + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{Cp} + L(R_2 + R_3 + R_4)p + \frac{L}{C} + \\ &+ \frac{(R_2 + R_3 + R_4)}{Cp} + (R_2 + R_3)^2 - \frac{2(R_2 + R_3)}{Cp} = \\ &= \frac{(R_1 + R_2 + R_3)(R_2 + R_3 + R_4)Cp + (R_1 + R_2 + R_3) + LC(R_2 + R_3 + R_4)p^2 +}{Cp} \\ &+ \underline{Lp + (R_2 + R_3 + R_4) - (R_2 + R_3)Cp - 2(R_2 + R_3)} = \\ &= \frac{L(C(R_2 + R_3 + R_4)p^2 + pC(R_1 + R_2 + R_3) + L) + R_1 + R_4}{Cp} = 0 \end{aligned}$$

5.4. Приравнивая к нулю получим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
& p^2 + p \frac{(C((R_1 + R_2 + R_3)(R_2 + R_3 + R_4) - (R_2 + R_3)^2) + L)}{LC(R_2 + R_3 + R_4)} + \\
& + \frac{R_1 + R_4}{LC(R_2 + R_3 + R_4)} = 0
\end{aligned}$$

Подставим числовые значения R, L, C :

$$\begin{aligned}
& p^2 + \frac{P(174 \times 10^{-9} ((8 + 10 + 5) \times (10 + 5 + 2) - (10 + 5)^2) + 204 \times 10^6)}{204 \times 10^{-6} \times 174 \times 10^{-9} (10 + 5 + 2)} + \\
& + \frac{8 + 2}{204 \times 10^{-6} \times 174 \times 10^{-9} \times 17} = 0 \\
& p^2 + p \frac{(174 \times 10^{-9} \times 166 + 204 \times 10^{-6})}{6,035 \times 10^{-10}} + \frac{10}{6,035 \times 10^{-10}} = 0 \\
& p^2 + 3,86 \times 10^5 p + 10^{10} = 0 \tag{2.14}
\end{aligned}$$

5.5. Вычислим корни уравнения (2.14):

$$\begin{aligned}
p &= \frac{-3,86 \times 10^5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,86 \times 10^5}{2}\right)^2 - 1,657 \times 10^{10}} = -1,93 \times 10^5 \pm 1,44 \times 10^5 \\
p_1 &= -3,37 \times 10^5 \quad p_2 = -4,9 \times 10^4
\end{aligned}$$

5.6 Выражение для свободных токов:

$$\begin{aligned}
i_{1_{ce}} &= A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \\
i_{2_{ce}} &= B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} \\
i_{3_{ce}} &= C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Выражение для переходных токов в ветвях описанных системой (2.15):

$$\begin{aligned}
i_1 &= i_{1np} + i_{1ce} = i_{1np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \\
i_2 &= i_{2np} + i_{2ce} = i_{2np} + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} \\
i_3 &= i_{3np} + i_{3ce} = i_{3np} + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \tag{2.16}
\end{aligned}$$

6. Используя систему (2.16), составим выражение для производных переходных токов.

$$\begin{aligned}
\frac{di_1}{dt} &= A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t} \\
\frac{di_2}{dt} &= B_1 p_1 e^{p_1 t} + B_2 p_2 e^{p_2 t} \\
\frac{di_3}{dt} &= C_1 p_1 e^{p_1 t} + C_2 p_2 e^{p_2 t}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

7. На основании систем (2.16) и (2.17) запишем значение $i(0)u \frac{di}{dt}(0)$ и получим систему уравнений для определения $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2; t=0$

$$\begin{cases}
i_1(0) = i_{1np} + A_1 + A_2 \\
i_2(0) = i_{2np} + B_1 + B_2 \\
i_3(0) = i_{3np} + C_1 + C_2 \\
\frac{di_1}{dt}(0) = A_1 P_1 + A_2 P_2 \\
\frac{di_2}{dt}(0) = B_1 P_1 + B_2 P_2 \\
\frac{di_3}{dt}(0) = C_1 P_1 + C_2 P_2
\end{cases} \tag{2.18}$$

8. Группируя попарно уравнение системы (2.18) получим 3 системы

$$\begin{cases}
i_1(0) = i_{1np} + A_1 + A_2 \\
\frac{di_1}{dt}(0) = A_1 P_1 + A_2 P_2
\end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases}
i_2(0) = i_{2np} + B_1 + B_2 \\
\frac{di_2}{dt}(0) = B_1 P_1 + B_2 P_2
\end{cases} \tag{2.20}$$

$$\begin{cases}
i_3(0) = i_{3np} + C_1 + C_2 \\
\frac{di_3}{dt}(0) = C_1 P_1 + C_2 P_2
\end{cases} \tag{2.21}$$

9. Решим системы (2.19), (2.20), (2.21) относительно $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$, определим выражения для постоянных интегрирования.

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= i_1(0) - i_{1np} \\
A_1 P_1 + A_2 P_2 &= \frac{di_1}{dt}(0) \quad \Rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = -(p_1 - p_2)
\end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i_1(0) - i_{1np} & 1 \\ \frac{di_1}{dt}(0) & p_2 \end{vmatrix} = P_2[i_1(0) - i_{1np}] - \frac{di_1}{dt}(0)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & i_1(0) - i_{1np} \\ p_1 & \frac{di_1}{dt}(0) \end{vmatrix} = \frac{di_1}{dt}(0) - [i_1(0) - i_{1np}] \cdot p_1$$

$$A_1 = \frac{p_2[i_1(0) - i_{1np}] - \frac{di_1}{dt}(0)}{p_1 - p_2} \quad (2.22.1)$$

$$A_2 = \frac{\frac{di_1}{dt}(0) - [i_1(0) - i_{1np}] \cdot p_1}{p_1 - p_2} \quad (2.22.2)$$

Аналогично определяем:

$$B_1 = \frac{\frac{di_2}{dt}(0) - [i_2(0) - i_{2np}] \cdot p_2}{p_1 - p_2} \quad (2.23.1)$$

$$B_2 = \frac{\frac{di_2}{dt}(0) - [i_2(0) - i_{2np}] \cdot p_1}{p_1 - p_2} \quad (2.23.2)$$

$$C_1 = \frac{\frac{di_3}{dt}(0) - [i_3(0) - i_{3np}] \cdot p_2}{p_1 - p_2} \quad (2.24.1)$$

$$C_2 = \frac{\frac{di_3}{dt}(0) - [i_3(0) - i_{3np}] \cdot p_1}{p_1 - p_2} \quad (2.24.2)$$

10. Принужденные точки в ветвях и напряжение на емкости до коммутации

$$i_{1np-} = i_1(0_-) = 0$$

$$i_{2np-} = i_2(0_-) = 0$$

$$i_{3np-} = i_3(0_-) = 0$$

$$U_{cnp-} = U_c(0_-) = E = 15B$$

11. Переходные токи в ветвях и переходное напряжение на емкости в момент времени $t=0_+$ по 1-му закону коммутации:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0)$$

$$i_1(0) = i_1(0_+) = i_1(0_-) = i_{1np_-} = 0$$

По 2-му закону коммутации:

$$U_c(0_-) = U_c(0_+) = U_c(0)$$

$$U_c(0) = U_c(0_+) = U_c(0_-) = U_{cnp_-} = E$$

На основании уравнения (2.8) определим:

$$i_2(0_-) = \frac{i_1(0)R_4 - U_C(0)}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{0 - 15}{10 + 5 + 2} = -0,822$$

Из 1-го уравнения системы (2.6) определим:

$$i_3(0_+) = i_1(0) - i_2(0) = 0 - (-0,822) = 0,822 \text{ A.}$$

12. Из уравнения (2.9), (2.10), (2.11) определим:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt}(0); \quad \frac{di_2}{dt}(0); \quad \frac{di_3}{dt}(0) \\ \frac{di_1}{dt}(0) = \frac{E - i_1(0)R_1 - i_3(0)R_4}{L} = \frac{15 - 0,882 \cdot 2}{204 \cdot 10^{-6}} = 6,488 \cdot 10^4 \\ \frac{di_2}{dt}(0) = \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot \left(\frac{di_1}{dt}(0) - \frac{1}{R_4 \cdot C} \cdot i_2(0) \right) = \frac{2}{10 + 5 + 2} \times \\ \times \left(6,488 \cdot 10^4 + \frac{0,822}{2 \cdot 174 \cdot 10^{-9}} \right) = 3,058 \cdot 10^5 \\ \frac{di_3}{dt}(0) = \frac{di_1}{dt}(0) - \frac{di_2}{dt}(0) = 6,488 \cdot 10^4 - 3,058 \cdot 10^5 = -2,409 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

13. Принужденные токи в ветвях и напряжение на емкости после коммутации

$$i_{1np} = \frac{E}{R_1 + R_4} = \frac{15}{8 + 2} = 1,5 \text{ A}$$

$$i_{2np} = 0$$

$$i_{3np} = i_{1np} = 1,5 \text{ A}$$

$$U_{cnp} = i_{3np} \cdot R_4 = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ B}$$

14. Подставим в уравнения (2.22), (2.23), (2.24) значения P_1, P_2 $I(0)$ и $\frac{di}{dt}(0)$ определим постоянные интегрирования.

$$A_1 = \frac{6,488 \cdot 10^4 - (0 - 1,5) \cdot (-4,9 \cdot 10^4)}{-3,37 \cdot 10^5 + 4,9 \cdot 10^4} = 0,0299$$

$$A_2 = \frac{-6,488 \cdot 10^4 - 1,5 \cdot 3,37 \cdot 10^5}{-2,88 \cdot 10^5} = -1,53$$

$$B_1 = \frac{3,058 \cdot 10^5 - (-0,882 - 0) \cdot (4,9 \cdot 10^4)}{-3,37 \cdot 10^5 + 4,9 \cdot 10^4} = -0,912$$

$$B_2 = \frac{-3,058 \cdot 10^5 + (-0,882) \cdot 3,37 \cdot 10^5}{-3,37 \cdot 10^5 + 4,9 \cdot 10^4} = 0,0297$$

$$C_1 = \frac{-2,409 \cdot 10^5 - (0,882 - 1,5) \cdot (-4,9 \cdot 10^4)}{-3,37 \cdot 10^5 + 4,9 \cdot 10^4} = 0,942$$

$$C_2 = \frac{-2,409 \cdot 10^5 + (0,882 - 1,5) \cdot 3,37 \cdot 10^5}{-3,37 \cdot 10^5 + 4,9 \cdot 10^4} = -1,56$$

15. Поставим в уравнение (2.16) значения $P_1, P_2, i_{1np}; i_{2np}; i_{3np}; A_2; B_1; B_2; C_1; C_2$ запишем выражение для переходных токов

$$i_1 = 1,5 + 0,03e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 1,53e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ A}$$

$$i_2 = -0,912e^{-3,37 \cdot 10^5 t} + 0,03e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ A}$$

$$i_3 = 1,5 + 0,942e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 1,56e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ A}$$

16. Напряжение на реактивных элементах

$$U_L = L \cdot \frac{di_1}{dt} = -3,37 \cdot 10^5 \cdot 0,03e^{-3,37 \cdot 10^5 t} + 1,53 \cdot 4,9 \cdot 10^4 e^{-4,9 \cdot 10^4 t} = -1,01 \cdot 10^4 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} + 7,5 \cdot 10^4 e^{-4,9 \cdot 10^4 t}$$

$$U_C = \frac{1}{c} \int i_2 dt = \frac{1}{174 \cdot 10^{-9}} \left(\int (-0,912e^{-3,37 \cdot 10^5 t} + 0,03e^{-4,9 \cdot 10^4 t}) dt \right) = 15,55e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 3,55e^{-4,9 \cdot 10^4 t} + N$$

Постоянную интегрирования N определим из условия:

$$U_C = 3 \text{ В} \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$U_C = U_{Cnp} = N \quad N = 3$$

$$U_C = 3 + 15,55e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 3,55e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ В}$$

II. Расчет операторным методом

Запишем независимые начальные условия:

$$i_1(0) = i_1(0_+) = i_1(0_-) = 0$$

$$U_c(0) = U_c(0_+) = U_c(0_-) = 15 \text{ В}$$

Используя результаты, полученные классическим методом, запишем изображение э.д.с. основного источника и изображение э.д.с. дополнительного источника в ветви с индуктивностью в ветви с емкостью.

$$E(p) = \frac{E}{p} = \frac{15}{p}$$

$$Li_1(0) = Li_1(0_+) = Li_1(0_-) = 0$$

$$\frac{U_c(0)}{P} = \frac{15}{P}$$

Изображаем эквивалентную операторную схему (после коммутации). Для упрощения преобразований вместо операторных токов в ветвях находим операторные контурные токи.

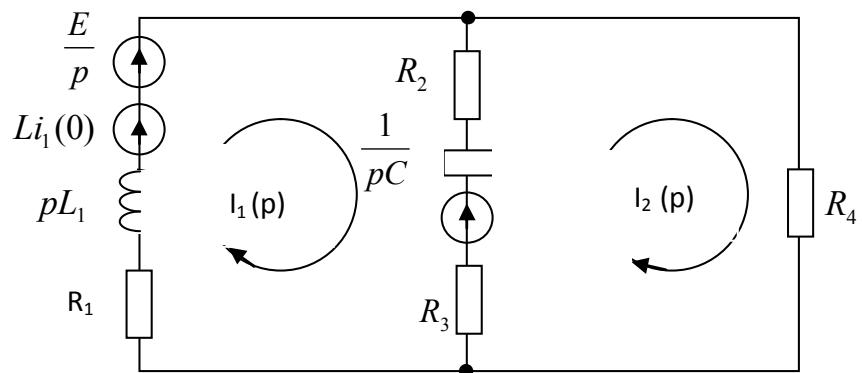


Рисунок 2.4

По второму закону Кирхгоффа составляем систему уравнений для операторных контурных токов.

$$I_1(p) \left(R_1 + R_2 + pL + \frac{1}{pC} \right) - I_2(p) \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \right) = \frac{E}{p} + Li_1(0) - \frac{U_c(0)}{p}$$

$$-I_1(p) \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \right) + I_2(p) \left(R_2 + R_3 + R_4 + \frac{1}{pC} \right) = \frac{U_c(0)}{p}$$

Учитывая, что $Li_1(0) = 0$ и $\frac{E}{p} = \frac{U_c(0)}{p}$ запишем:

$$\begin{aligned} I_1(p) \left(R_1 + R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC} \right) - \left(I_2(p)R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \right) &= 0 \\ -I_1(p) \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \right) + \left(I_2(p)R_2 + R_3 + R_4 + \frac{1}{pC} \right) &= \frac{U_c(0)}{p} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Записываем и вычисляем основной и дополнительный определители системы (2.25):

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + pL + \frac{1}{pC} & -\left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \right) \\ -\left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \right) & R_2 + R_3 + R_4 + \frac{1}{pC} \end{bmatrix} = \\ &= \left(R_1 + R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC} \right) \cdot \left(R_2 + R_3 + R_4 + \frac{1}{pC} \right) - \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} \right)^2 = \\ &= \frac{LC(R_2 + R_3 + R_4)p^2 + p\{C[(R_1 + R_2 + R_3) \cdot (R_2 + R_3 + R_4) - (R_2 + R_3)^2] + \\ &\quad + L\} + R_1 + R_4}{pC} = \frac{204 \cdot 10^{-6} \cdot 174 \cdot 10^{-9} \cdot 17p^2 + p[174 \cdot 10^{-9} \cdot (23 \cdot 17 - 225) + \\ &\quad 204 \cdot 10^{-6}] + 10}{174 \cdot 10^{-9} p} = \frac{3,468 \cdot 10^{-3} p^2 + 1339p + 5,747 \cdot 10^7}{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -\left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}\right) \\ \frac{U_C(0)}{p} & R_2 + R_3 + R_4 + \frac{Ui(0)}{p} \end{bmatrix} = \frac{U_C(0)}{p} \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}\right) = \\
&= \frac{15}{p} \left(15 + \frac{1}{174 \cdot 10^{-9} p}\right) = \frac{225p + 8,621 \cdot 10^7}{p^2} \\
\Delta_2 &= \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC} & 0 \\ -\left(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}\right) & \frac{U_C}{p} \end{bmatrix} = \left(R_1 + R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC}\right) \times \\
&\times \frac{U_C}{p} = \frac{(R_1 + R_2 + R_3)U_C(0)pC + LC + U_C(0)p^2 + U_C(0)}{p^2C} = \\
&= \frac{204 \cdot 10^{-6} \cdot 174 \cdot 10^{-9} \cdot 15p^2 + 23 \cdot 15 \cdot 174 \cdot 10^{-9} p + 15}{174 \cdot 10^{-9} p^2} = \\
&= \frac{3,06 \cdot 10^{-3} p^2 + 345p + 8,621 \cdot 10^7}{p^2}
\end{aligned}$$

Записываем выражения операторных контурных токов.

$$I_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{225p + 8,621 \cdot 10^7}{p(3,468 \cdot 10^{-3} p^2 + 1339p + 5,747 \cdot 10^7)} \quad (2.26)$$

$$I_{II}(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3,06 \cdot 10^{-3} p^2 + 345p + 8,621 \cdot 10^7}{p(3,468 \cdot 10^{-3} p^2 + 1339p + 5,747 \cdot 10^7)} \quad (2.27)$$

Представляем токи (2.26) и (2.27) в виде дробей с одинаковыми значениями:

$$I_1(p) = \frac{F_1(p)}{F(p)} = \frac{F_1(p)}{p\Phi(p)} = \frac{225p + 8,621 \cdot 10^7}{p(3,468 \cdot 10^{-3} p^2 + 1339p + 5,747 \cdot 10^7)}$$

$$I_{II}(p) = \frac{F_{II}(p)}{F(p)} = \frac{F_{II}(p)}{p\Phi(p)} = \frac{3,06 \cdot 10^{-3} p^2 + 345p + 8,621 \cdot 10^7}{p(3,468 \cdot 10^{-3} p^2 + 1339p + 5,747 \cdot 10^7)}$$

Вычислим корни уравнения $F(p) = p\Phi(p) = 0$:

$$p(3,468 \cdot 10^{-3} p^2 + 1339 p + 5,747 \cdot 10^7) = 0$$

$$p = 0$$

$$3,468 \cdot 10^{-3} p^2 + 1339 p + 5,747 \cdot 10^7 = 0$$

$$p^2 + 3,86 \cdot 10^5 p + 1,657 \cdot 10^{10} = 0$$

$$p_{1,2} = -\frac{3,86 \cdot 10^5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,86 \cdot 10^5}{2}\right)^2 - 1,657 \cdot 10^{10}} = -1,93 \cdot 10^3 \pm 1,44 \cdot 10^5$$

$$p_1 = -3,37 \cdot 10^5, \quad p_2 = -4,9 \cdot 10^4$$

Отметим, что уравнение $F(p)=p\Phi(p)=0$ имеет один корень, равный нулю $p=0$.

На основании теоремы о разложении, запишем выражения для контурных токов, учитывая что существует $p=0$:

$$i_I = \frac{F_I(0)}{\Phi(0)} + \frac{F_I(p_1)}{p_1 \Phi(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_I(p_2)}{p_2 \Phi(p_2)} e^{p_2 t} \quad (2.28)$$

$$i_{II} = \frac{F_{II}(\Phi)}{\Phi(0)} + \frac{F_{II}(p_1)}{p_1 \Phi(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_{II}(p_2)}{p_2 \Phi(p_2)} e^{p_2 t} \quad (2.29)$$

Вычислим производную $\Phi(p)$ по p :

$$\Phi'(p) = \frac{d}{dp} (3,468 \cdot 10^{-3} p^2 + 1339 p + 5,747 \cdot 10^7) = 6,936 \cdot 10^{-3} p + 1339$$

Вычислим $F_I(p)$, $F_{II}(p)$ при $p=0$, p_1, p_2 и $\Phi(p)$ при $p=0$

и $\Phi(p)$ при $p_k = p_1, p_2$

$$F_I(0) = 8,621 \cdot 10^7$$

$$F_I(p_1) = 225 \cdot (-3,37 \cdot 10^5) + 8,621 \cdot 10^7 = 1,038 \cdot 10^7$$

$$F_I(p_2) = 225 \cdot (-4,9 \cdot 10^4) + 8,621 \cdot 10^7 = 7,519 \cdot 10^7$$

$$F_{II}(0) = 8,621 \cdot 10^7$$

$$F_{II}(p_1) = 3,06 \cdot 10^3 \cdot (-3,37 \cdot 10^5)^2 - 345 \cdot 3,37 \cdot 10^5 + 8,621 \cdot 10^7 = 3,175 \cdot 10^8$$

$$F_{II}(p_2) = 3,06 \cdot 10^3 \cdot (-4,9 \cdot 10^4)^2 - 345 \cdot 4,9 \cdot 10^4 + 8,621 \cdot 10^7 = 7,665 \cdot 10^7$$

$$\Phi(0) = 5,747 \cdot 10^7$$

$$\Phi'(p_1) = 6,936 \cdot 10^{-3} \cdot 3,37 \cdot 10^5 + 1339 = -998$$

$$\Phi'(p_2) = -6,936 \cdot 10^{-3} \cdot 4,9 \cdot 10^4 + 1336 = 999$$

Подставляя полученные P_K и результаты, полученные ранее, в формулы (2.28) и (2.29), получим оригиналы контурных токов i_I , i_{II} :

$$\begin{aligned} i_I &= \frac{8,621 \cdot 10^7}{5,747 \cdot 10^7} + \frac{1,038 \cdot 10^7}{-3,37 \cdot 10^5 \cdot (-998)} e^{-3,37 \cdot 10^5 t} + \frac{7,519 \cdot 10^7}{-4,9 \cdot 10^4 \cdot 999} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} = \\ &= 1,5 + 0,03e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 1,53e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ A} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} i_{II} &= \frac{8,621 \cdot 10^7}{5,747 \cdot 10^7} + \frac{3,175 \cdot 10^8}{-3,37 \cdot 10^5 (-998)} e^{-3,37 \cdot 10^5 t} + \frac{7,665 \cdot 10^7}{-4,9 \cdot 10^4 \cdot 999} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} = \\ &= 1,5 + 0,94e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 1,56e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ A} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Используя оригиналы контурных токов (2.30), (2.31) запишем оригиналы токов в ветвях

$$\begin{aligned} i_1 &= i_I = 1,5 + 0,03e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 1,53e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ A} \\ i_2 &= i_I - i_{II} = 1,5 + 0,03e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 1,53e^{-4,9 \cdot 10^4 t} - 1,5 - 0,94e^{-3,37 \cdot 10^5 t} + \\ &+ 1,56e^{-4,9 \cdot 10^4 t} = -0,91e^{-3,37 \cdot 10^5 t} + 0,03e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ A} \\ i_3 &= i_{II} = 1,5 + 0,94e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 1,56e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ A} \end{aligned}$$

III. Расчет методом переменных состояния

1. Запишем значения тока i_1 и напряжения u_c до коммутации:

$$\begin{aligned} i_1(0) &= 0 \\ U_c(0) &= E = 15B \end{aligned}$$

2. По закону коммутации запишем независимые начальные условия:

$$\begin{aligned} i_1(0) &= i_1(0) = 0 \\ U_c(0) &= U_c(0) = 15B \end{aligned}$$

3. На основании законов Кирхгофа оставим систему уравнений для схемы после коммутации (рис. 2.5), учитывая что $i_1 = i_L$:

$$\begin{cases} i_L - C \frac{du_c}{dt} - i_3 = 0 \\ L \frac{di_1}{dt} + i_L R_1 + i_3 R_4 = E \\ u_c + C \frac{du_c}{dt} (R_2 + R_3) - i_3 R_4 = 0 \\ L_1 \frac{di_1}{dt} + u_c + i_L R_1 + C \frac{du}{dt} (R_2 + R_3) = E \end{cases} \quad (2.32)$$

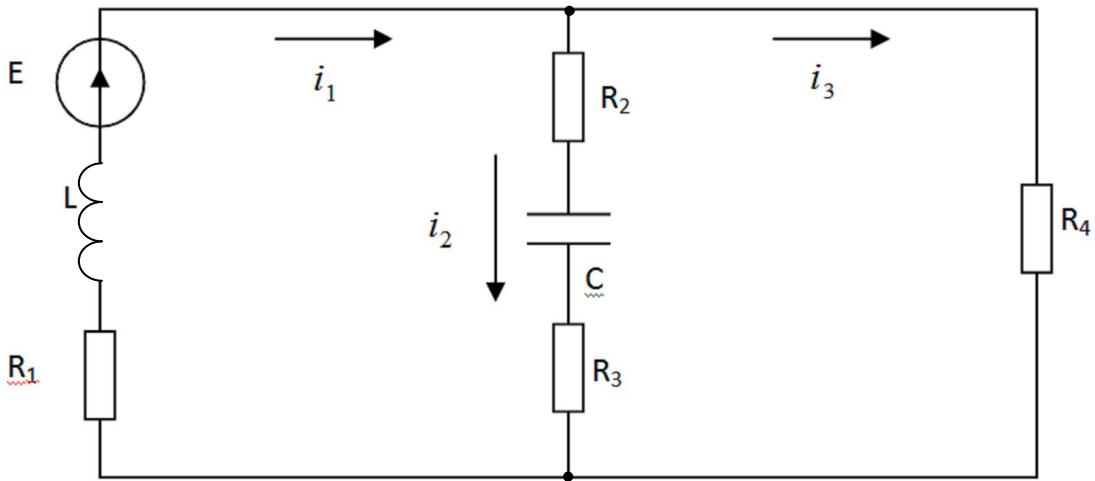


Рисунок 2.5

4. На основании уравнений системы (2.32) составим уравнения состояния цепи:

$$C \frac{du_c}{dt} = \frac{i_3 R_4}{R_2 + R_3} - \frac{u_c}{R_2 + R_3} \quad (2.33)$$

Из 2-го уравнения системы (2.32) имеем:

$$L \frac{di_L}{dt} = E - i_L R_1 - i_3 R_4 \quad (2.34)$$

Из 1-го уравнения системы (2.32) запишем

$$i_3 = i_L - C \frac{du_c}{dt} \quad (2.35)$$

Подставляя (2.35) в выражение (2.33) получим:

$$\begin{aligned}
C \frac{du_C}{dt} &= (i_L - C \frac{du_C}{dt}) \frac{R_4}{R_2 + R_3} - \frac{u_C}{R_2 + R_3} \\
C \left(1 + \frac{R_4}{R_2 + R_3} \right) \frac{du_C}{dt} &= -\frac{1}{R_2 + R_3} u_C + \frac{R_4}{R_2 + R_3} \cdot i_L \\
\frac{du_C}{dt} &= -\frac{1}{C(R_2 + R_3 + R_4)} u_C + \frac{R_4}{C(R_2 + R_3 + R_4)} \cdot i_L
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Из 4-го уравнения системы (2.32) имеем:

$$\begin{aligned}
(R_2 + R_3)C \frac{du_C}{dt} &= E - L \frac{di_L}{dt} - i_L R_1 - u_C \\
C \frac{du_C}{dt} &= \frac{E - L \frac{di_L}{dt} - i_L R_1 - u_C}{R_2 + R_3}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Подставляем выражения (2.35) для i_3 в выражение (2.34) для $L \frac{di_L}{dt}$ получим:

$$L \frac{di_L}{dt} = E - i_L (R_1 + R_4) + R_4 C \frac{du_C}{dt}$$

Заменяя $C \frac{du_C}{dt}$ согласно выражению (2.37):

$$\begin{aligned}
L \frac{di_L}{dt} &= E - i_L (R_1 + R_4) + \frac{R_4 \cdot E}{R_2 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_3} L \frac{di_L}{dt} - \frac{i_L R_1 R_4}{R_2 + R_3} - \frac{R_4 u_C}{R_2 + R_3} \\
\left(1 + \frac{R_4}{R_2 + R_3} \right) L \frac{di_L}{dt} &= -\frac{R_4}{R_2 + R_3} u_C - i_L \left(R_1 + R_4 + \frac{R_1 R_4}{R_2 + R_3} \right) + E \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_2 + R_3} \\
\frac{di_L}{dt} &= -\frac{R_4}{L(R_2 + R_3 + R_4)} u_C - \frac{1}{L} \left[R_1 + \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4} \right] i_L + \frac{E}{L}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Записывая (2.36) и (2.38) вместе получим уравнение состояния цепи:

$$\begin{aligned}
U_C^{(0)} &= \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C(R_2 + R_3 + R_4)} u_C + \frac{R_4}{C(R_2 + R_3 + R_4)} i_L \\
i_L^{(0)} &= \frac{di_L}{dt} = -\frac{R_4}{L(R_2 + R_3 + R_4)} u_C - \frac{1}{L} \left[R_1 + \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4} \right] i_L + \frac{E}{L}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

5. Запишем систему уравнений (2.39) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} U_C^{(0)} \\ i_L^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C(R_2 + R_3 + R_4)} & \frac{R_4}{C(R_2 + R_3 + R_4)} \\ -\frac{R_4}{L(R_2 + R_3 + R_4)} & -\frac{1}{L} \left[R_1 + \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4} \right] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E = \\ = \bar{A} \cdot \bar{x} + \bar{B} \cdot \bar{u}$$

6. Составим и найдем корни характеристического уравнения цепи, оно имеет вид:

$$\det[p\bar{J} - \bar{A}] = 0,$$

где \bar{A} — основная матрица цепи;

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ — единичная матрица.}$$

$$\det[p\bar{J} - \bar{A}] = \det \begin{bmatrix} A + \frac{1}{C(R_2 + R_3 + R_4)} - & \frac{R_4}{C(R_2 + R_3 + R_4)} \\ \frac{R_4}{L(R_2 + R_3 + R_4)} & p + \frac{1}{L} \left[R_1 + \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4} \right] \end{bmatrix} = \\ \left[p + \frac{1}{C(R_2 + R_3 + R_4)} \right] \cdot \left[p + \frac{1}{L} \left(R_1 + \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4} \right) \right] + \\ + \frac{R_4^2}{LC(R_2 + R_3 + R_4)^2} = 0$$

$$(p + 3,381 \cdot 10^5) \cdot (p + 4,787 \cdot 10^4) + 3,899 \cdot 10^8 = 0$$

$$p^2 + 3,86p + 1,657 \cdot 10^{10} = 0; \quad p_1 = -3,37 \cdot 10^5; \quad p_2 = -4,9 \cdot 10^4$$

Запишем основную матрицу цепи \bar{A} и матрицу связи \bar{B} . Они равны:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -3,38 \cdot 10^5 & 6,76 \cdot 10^5 \\ -577 & -4,79 \cdot 10^4 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4,9 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Вычислить переходные матрицы состояния $\vec{\varphi}(t)$.

$$\vec{\varphi}(t) = \bar{\Phi}_1 e^{p_1 t} + \bar{\Phi}_2 e^{p_2 t}.$$

Найдем матрицы $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$.

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}_1 &= \frac{\overline{A} - p_2 \overline{J}}{p_1 - p_2} = \frac{\begin{bmatrix} -3,38 \cdot 10^5 & 6,76 \cdot 10^5 \\ -577 & -4,79 \cdot 10^4 \end{bmatrix} + 4,9 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-3,37 \cdot 10^5 + 4,9 \cdot 10^4} = \\
&= \begin{bmatrix} 1,003 & -2,35 \\ 2 \cdot 10^{-3} & -3,92 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \\
\overline{\Phi}_2 &= \frac{\overline{A} - p_1 \overline{J}}{p_2 - p_1} = \frac{\begin{bmatrix} -3,38 \cdot 10^5 & 6,76 \cdot 10^5 \\ -577 & -4,79 \cdot 10^4 \end{bmatrix} + -3,37 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-4,9 \cdot 10^4 + -3,37 \cdot 10^5} = \\
&= \begin{bmatrix} -3,47 \cdot 10^{-3} & 2,35 \\ -2 \cdot 10^{-3} & 1 \end{bmatrix} \\
\vec{\varphi}(t) &= \begin{bmatrix} 1,003 & -2,35 \\ 2 \cdot 10^{-3} & -3,92 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} e^{-3,37 \cdot 10^5 t} + \begin{bmatrix} -3,47 \cdot 10^{-3} & 2,35 \\ -2 \cdot 10^{-3} & 1 \end{bmatrix} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} = \\
&= \begin{bmatrix} 1,003 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & -3,47 \cdot 10^{-3} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} & -2,35 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & 2,35 e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \\ 2 \cdot 10^{-3} e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & -2 \cdot 10^{-3} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} & -3,92 \cdot 10^{-3} e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Найдем матрицу переменных состояний

$$\vec{x}(t) = \vec{\varphi}(t) \cdot \vec{x}(0) + \int_0^t \vec{\varphi}(t-r) \vec{B} \vec{U}(r) dr$$

учитывая, что $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\vec{U}(r) = E$

Запишем матрицу переменных состояний в виде

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} U_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} &= \\
&= \begin{bmatrix} 1,003 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & -3,47 \cdot 10^{-3} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} & -2,35 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & 2,35 e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \\ 2 \cdot 10^{-3} e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & -2 \cdot 10^{-3} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} & -3,92 \cdot 10^{-3} e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \int_0^t \begin{bmatrix} 1,003 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & -3,47 \cdot 10^{-3} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} & -2,35 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & 2,35 e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \\ 2 \cdot 10^{-3} e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & -2 \cdot 10^{-3} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} & -3,92 \cdot 10^{-3} e^{-3,37 \cdot 10^5 t} & e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{15}{4,9 \cdot 10^3} \end{bmatrix} \cdot 15 dr \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Раскрывая матрицы (2.40) найдем $U_C(t)$ и $i_L(t)$:

$$\begin{aligned}
U_C(t) &= 15(e^{-3,37 \cdot 10^5 t} \cdot 1,003 - 3,47 \cdot 10^{-3} e^{-4,9 \cdot 10^4 t}) + \int_0^t 15 \cdot 4,9 \cdot 10^3 \times \\
&\times (-2,35 e^{-3,37 \cdot 10^5 (t-r)} + 2,35 e^{-4,9 \cdot 10^4 (t-r)}) dr = 15,045 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - \\
&- 5 \cdot 10^{-2} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} - \frac{1,73 \cdot 10^5}{3,57 \cdot 10^5} e^{-3,37 \cdot 10^5 (t-r)} \Big|_0^t + + \frac{1,73 \cdot 10^5}{3,57 \cdot 10^5} e^{-4,9 \cdot 10^4 (t-r)} = \\
&= e^{-3,37 \cdot 10^5 t} (15,045 + 0,51) - 0,51 - e^{-4,9 \cdot 10^4 t} (5 \cdot 10^2 + 3,51) + 3,51 = \\
&= 3 + 15,56 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 3,56 e^{-4,9 \cdot 10^4 t}, \text{B} \\
i_L(t) &= 15(2 \cdot 10^{-3} e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 2 \cdot 10^{-3} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} + 15 \cdot 4,9 \cdot 10^3 \times \\
&\times \int_0^t (-3,92 \cdot 10^{-3} e^{-3,37 \cdot 10^5 (t-r)} e^{-4,9 \cdot 10^4 (t-r)}) dr = 3 \cdot 10^{-2} e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - \\
&- 3 \cdot 10^{-2} e^{-4,9 \cdot 10^4 t} - \frac{7,35 \cdot 10^4 \cdot 3,92 \cdot 10^{-3}}{3,37 \cdot 10^5} e^{-3,37 \cdot 10^5 (t-r)} \Big|_0^t + \\
&+ \frac{7,35 \cdot 10^4}{4,9 \cdot 10^4} e^{-3,37 \cdot 10^5 (t-r)} \Big|_0^t = 1,5 + 0,03 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 1,53 e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ A}
\end{aligned}$$

На основании выражений для $U_C(t)$, $i_L(t)$, а также соотношений

$i_1 = i_L$, $i_2 = C \frac{du_C}{dt}$, $i_3 = i_1 - i_2$ запишем выражения для токов в ветвях.

$$\begin{aligned}
i_1 &= 1,5 + 0,03 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 1,53 e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ A}, \\
i_2 &= C \frac{du_C}{dt} = 1,74 \cdot 10^{-7} \left[15,56 \cdot (-3,37 \cdot 10^{-5}) e^{-3,37 \cdot 10^5 t} + 3,56 \cdot 4,9 \cdot 10^4 e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \right] = \\
i_3 &= 1,5 + (0,03 + 0,912) e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - (1,53 + 0,03) e^{-4,9 \cdot 10^4 t} = 1,5 + 0,94 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} - 1,56 \times \\
&\times e^{-4,9 \cdot 10^4 t} \text{ A}
\end{aligned}$$

7. Построение графика зависимости переходного тока в ветви с индуктивностью и переходного напряжения на емкости.

Запишем таблицу для $i(t)$ при различных значениях t

$t \cdot 10^{-5}, c$	$0,03^{-3,37 \cdot 10^5 t}, A$	$1,53e^{-4,9 \cdot 10^4 t}, A$	i, A
0,1	0,03	1,53	0
0,1	0,02	1,47	0,05
0,5	$5,6 \cdot 10^{-3}$	1,2	0,31
1	10^{-3}	0,94	0,56
2	0	0,57	0,93
3	-	0,35	1,15
4	-	0,21	1,29
5	-	0,13	1,37
6	-	0,08	1,42
7	-	0,05	1,45
8	-	0,03	1,47
9	-	0,02	1,48

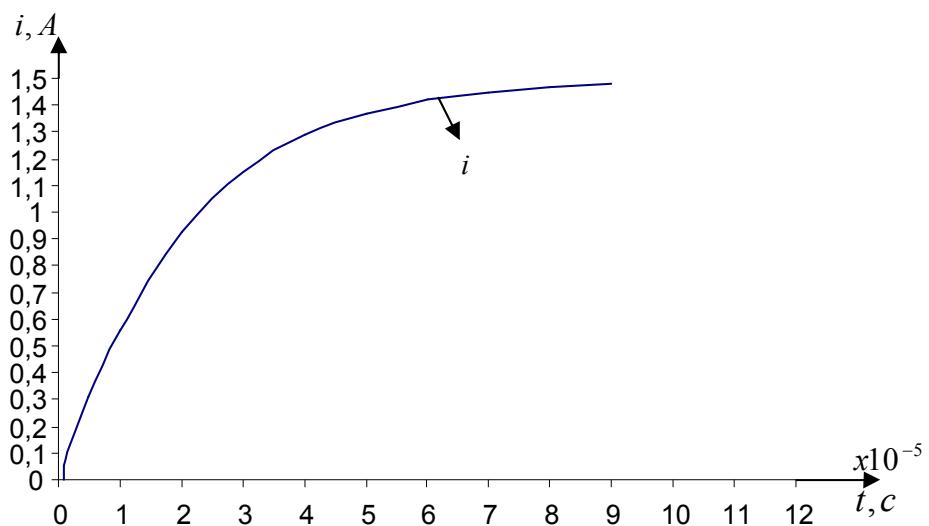
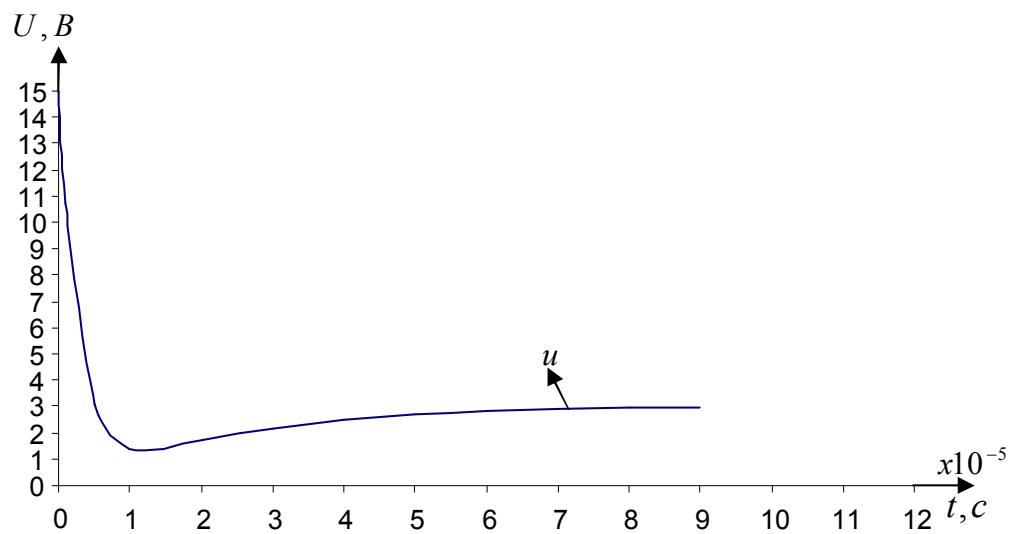


Рисунок 2.6

Найдем, t при котором $u_C(t)$ принимает минимальное значение

$$[u_C(t)]' = 0$$

$$[u_C(t)]' = 15,55(-3,37 \cdot 10^5)e^{-3,37 \cdot 10^5 t} + 3,55 \cdot 4,9 \cdot 10^4 e^{-4,9 \cdot 10^4 t} = 0$$

$$5,24 \cdot 10^6 e^{-3,37 \cdot 10^5 t} = 1,74 \cdot 10^5 e^{-4,9 \cdot 10^4 t}$$

$$e^{(3,37 \cdot 10^5 - 4,9 \cdot 10^4)t} = \frac{5,24 \cdot 10^6}{1,74 \cdot 10^5}$$

$$e^{2,86 \cdot 10^5 t} = 30,11$$

$$t = \frac{\ln 30,11}{2,86 \cdot 10^5}; \quad t = 1,18 \cdot 10^{-5} \text{ с}$$

Запишем таблицу значений $u_C(t)$ при различных значениях t

$t \cdot 10^{-5}, \text{ с}$	$15,55e^{-3,37 \cdot 10^5 t}, \text{ В}$	$3,55e^{-4,9 \cdot 10^4 t}, \text{ В}$	$u, \text{ В}$
0	15,55	3,55	15
0,1	11,10	3,38	10,72
0,5	2,88	2,78	3,1
1	0,53	2,17	1,36
2	0,02	1,33	1,69
3	0	0,82	2,18
4	-	0,5	2,5
5	-	0,31	2,69
6	-	0,19	2,81
7	-	0,11	2,89
8	-	0,07	2,93
9	-	0,04	2,96

$$U_{\min} = 1,3B \quad \text{при} \quad t = 1,18 \cdot 10^{-5} \text{ с}$$

IV. Расчет с помощью интеграла Дюамеля

Расчет переходного тока в ветви с источником тока э.д.с. для схемы, находящейся под воздействием источника импульсной э.д.с. в форме одиночного прямоугольного импульса методом интеграла Дюамеля. (см. схему на рис. 32)

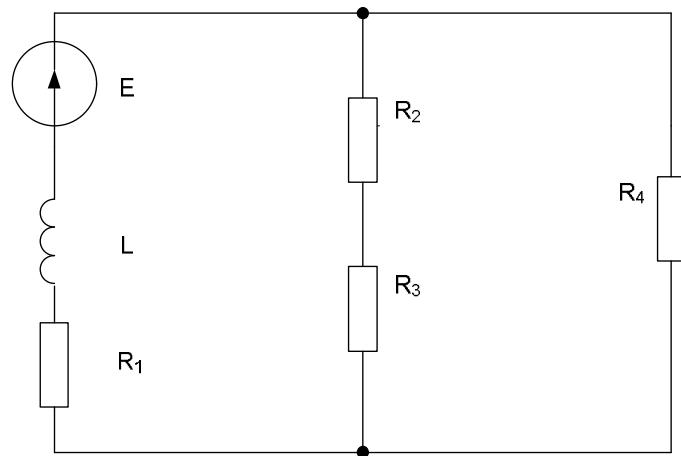


Рисунок 2.7

$$e = E[l(t) - l(t - t_1)]$$

$$E = 15B; \quad t_1 = 6,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$$

$$L = 204 \cdot 10^{-6} \quad \text{Гн}$$

$$R_1 = 8 \quad \text{Ом}; \quad R_2 = 10 \quad \text{Ом};$$

$$R_3 = 5 \quad \text{Ом}; \quad R_4 = 2 \quad \text{Ом}$$

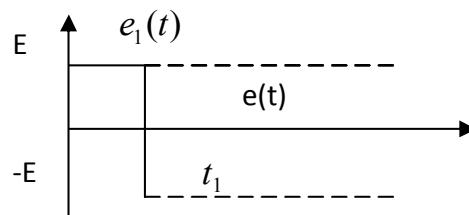


Рисунок 2.8

Упростим схему.

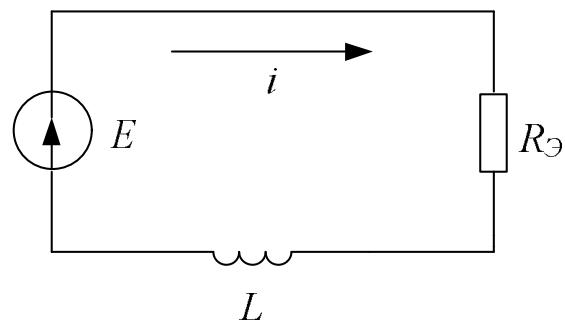


Рисунок 2.9

$$R_3 = \frac{(R_2 + R_3)R_4}{R_2 + R_3 + R_4} + R_1 = 9,76 \quad \text{Ом}$$

1. Определим переходную проводимость, предполагая что рубильник подключает к схеме источник постоянной э.д.с. $e = E$ при этом используем операторный метод

1.1. Записываем и вычисляем изображение э.д.с. источника:

$$E(p) = \frac{E}{p} = \frac{15}{p}$$

1.2 Записываем и вычисляем операторное сопротивление цепи относительно зажимов источника постоянного воздействия:

$$Z(p) = R_3 + pL = 204 \cdot 10^{-6} p + 9,76$$

1.3 Записываем и вычисляем операторный ток:

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)} = \frac{\frac{15}{p}}{204 \cdot 10^{-6} p + 9,76} = \frac{15}{p(204 \cdot 10^{-6} p + 9,76)}$$

1.4 Представляем операторный ток $I(p)$ в виде дроби:

$$I(p) = \frac{E_1(p)}{Z(p)} = \frac{F_1(p)}{p\Phi(p)} = \frac{15}{p(204 \cdot 10^{-6} p + 9,76)}$$

1.5 Найдем корни равнения $p\Phi(p) = 0$

$$p(204 \cdot 10^{-6} p + 9,76) = 0$$

$$p = 0; \quad p_1 = \frac{-9,76}{204 \cdot 10^{-6}} = -4,78 \cdot 10^4$$

1.6 На основании теоремы о разложении записываем выражение оригинала тока (учитывая что существует $p = 0$)

$$i = \frac{F_1(0)}{\Phi(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1\Phi'(p_1)} e^{p_1 t} \quad (2.41)$$

1.7 Найдем:

$$\Phi'(p) = \frac{d}{dp} (204 \cdot 10^{-6} p + 9,76) = 204 \cdot 10^{-6}$$

1.8 Вычислим $F_1(0); \Phi(p); \Phi'(p)$

$$F_1(0) = 15 \quad F_1(p_1) = 15$$

$$\Phi(0) = 9,76 \quad \Phi'(p_1) = 204 \cdot 10^{-6}$$

1.9 Представляя полученные значения $F_1(0)$, $F_1(p_1)$, $\Phi(0)$, $\Phi'(p_1)$ в формулу (2.41) найдем оригинал тока:

$$i = \frac{14}{9,76} + \frac{15}{-4,78 \cdot 10^4 \cdot 204 \cdot 10^{-6}} e^{-4,78 \cdot 10^4 t} = 1,54 - 1,54 e^{-4,78 \cdot 10^4 t}$$

1.10 Разделив выражения тока оригинала переходного тока на Э.Д.С. источника, получим переходную проводимость:

$$y(t) = \frac{i}{E} = \frac{1,54}{15} - \frac{1,54}{15} e^{-4,78 \cdot 10^4 t} = 0,103 - 0,103 e^{-4,78 \cdot 10^4 t}$$

2. Расчет переходного тока методом интеграла Дюамеля.

2.1 Для расчета выбираем первую форму записи интеграла Дюамеля.

Переходный ток в интервале времени

a) $0 \leq t \leq t_1$

$$i(t) = e_1(0) \cdot y(t) + \int_0^{t_1} e_1'(r) y(t-r) dr$$

b) $t_1 < t \leq \infty$

$$i(t) = e_1(0) \cdot y(t) + \int_0^{t_1} e_1'(r) y(t-r) dr + [e_2(t_1) - e_1(t_1)] y(t-t_1) + \int_{t_1}^t e_2'(r) y(t-r) dr$$

2.2 Вычисляем постоянные величины и записываем выражения функций, входящих в выражения $i(t)$ в интервалах времени $0 \leq t < t_1$ и $t_1 < t \leq \infty$

- т.к. $e_1(t) = E$; то:

$$e_1(0) = E, \quad e_1(t_1) = E, \quad e_1'(r) = e_1'(t) = 0$$

- т.к. $e_2(t) = 0$, то:

$$e_2(t_1) = 0, \quad e_2'(r) = e_2'(t) = 0$$

Используя формулу для $y(t)$ запишем:

$$y(t) = 0,103 - 0,103 e^{-4,78 \cdot 10^4 t}$$

$$y(t-t_1) = 0,103 - 0,103 e^{-4,78 \cdot 10^4 (t-t_1)}$$

$y(t_1 - r)$ не записываем т.к. содержащие его интегралы обращаются в ноль.

2.3 Подставляя значения констант и выраженный для переходного тока в интервале времени:

a) $0 \leq t < t_1$

$$i(t) = E(0,103 - 0,103e^{-4,78 \cdot 10^4 t}) + \int_0^t 0y(t-r)dr = E(0,103 - 0,103e^{-4,78 \cdot 10^4 t});$$

б) $t_1 < t \leq \infty$

$$i(t) = E(0,103 - 0,103e^{-4,78 \cdot 10^4 t}) + \int_0^{t_1} 0y(t-r)dr + [0 - E](0,103 - 0,103e^{-4,76 \cdot 10^4 (t-t_1)}) + \int_{t_1}^t 0y(t-r)dr = 0,103E(e^{-4,78 \cdot 10^4 t_1} - 1) \times e^{-4,78 \cdot 10^4 t}$$

2.4 Подставляя t_1 и E окончательные выражения переходного тока в интеграле времени:

a) $0 \leq t < t_1$;

$$i(t) = 15(0,103 - 0,103e^{-4,78 \cdot 10^4 t}) = 1,54 - 1,54e^{-4,78 \cdot 10^4 t} \text{ A}$$

b) $t_1 < t \leq \infty$;

$$i(t) = 15 \cdot 0,103 \cdot (e^{4,78 \cdot 10^4 \cdot 6,5 \cdot 10^{-6}} - 1)e^{-4,76 \cdot 10^4 t} = 0,561e^{-4,76 \cdot 10^4 t} \text{ A}$$

Построение графика зависимости переходного тока в ветви с источником э.д.с. (для расчета переходного тока в ветви с источником э.д.с., для схемы находящейся под воздействием импульсной э.д.с. методом интеграла Дюамеля).

Найдем постоянную времени:

$$r = -\frac{1}{p} = \frac{1}{4,78 \cdot 10^4} = 2,1 \cdot 10^{-5}, \quad c$$

Запишем таблицу значений $i(t)$ для различных t

t	$t \cdot 10^{-5}$ c	$1,54e^{-4,78 \cdot 10^4 t}$	$i(t)$ A
0	0	0	0
1	0,16	1,427	0,113
$\frac{t_1}{2}$	0,33	1,318	0,222
$\frac{3t_1}{4}$	0,49	1,218	0,322
t_1	0,65	1,129	0,411
$t_1 + \frac{r}{8}$	0,91		0,363
$t_1 + \frac{r}{4}$	1,2		0,32
$t_1 + \frac{r}{2}$	1,7		0,249
$t_1 + r$	2,75		0,151
$t_1 + \frac{3r}{2}$	3,8		0,091
$t_1 + 2r$	4,85		0,055

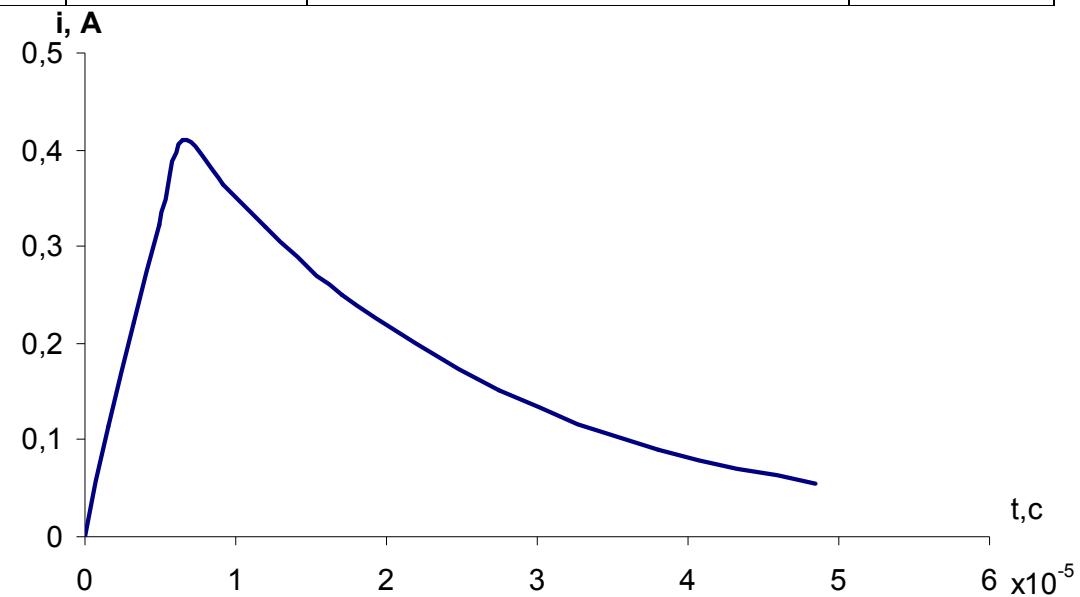


Рисунок 2.10

Задание 2.1 Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях

Дана электрическая цепь, в которой происходит коммутации (рис. 2.11 — 2.30). В цепи действует постоянная э.д.с.

Параметры цепи приведены в таблице 2.1

1. Рассчитать переходные токи в ветвях и переходные напряжения на реактивных элементах для схемы классическим, операторными методами и методом переменного состояния. Построить графики зависимости переходного тока в ветви с индуктивностью и переходного напряжения в ветви с конденсатором.

2. Рассчитать переходной ток в ветви с источником э.д.с. для схемы, находящейся под воздействием импульсной э.д.с. (в форме одиночного прямоугольного импульса), методом интеграла Дюамеля (перед расчетом цепи методом интеграла Дюамеля упросить заданную схему, закоротив в ней емкость C). Построить график зависимости переходного тока э.д.с. от времени.

Таблица 2.1

Исходные данные

Вариант	Рисунок	E(B)	Параметры элементов схемы						
			L	C	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	t
			мкГн	нФ	Ом	Ом	Ом	Ом	мкс
1.	2.15	12	755	85	15,5	3	11	4	7,7
2.	2.12	6	954	65	20	15	5	2	7,9
3.	2.29	5	204	174	8	10	5	2	8,2
4.	2.20	24	807	92	2	13	1	4	8,5
5.	2.13	6	685	88	4	4	2	4	7,9
6.	2.21	12	869	64	20	4	16	2	7,7
7.	2.28	12	791	82	6	10	5	4	10,2
8.	2.14	5	264	161	20	8	12	2	9,1
9.	2.27	24	945	92	6	10	5	10	8,1
10.	2.30	36	902	90	15	5	4	2	7,8
11.	2.25	35	885	91	1	2	3	3	7,9
12.	2.16	6	752	79	10	25	50	15	8,5
13.	2.17	5	349	135	4	6	10	10	7,8
14.	2.22	36	908	93	20	10	10	10	10,2
15.	2.26	6	930	65	7	10	5	5	8,5
16.	2.18	24	934	90	1,5	1,5	1	1	9,2
17.	2.23	24	847	92	2	13	4	1	9,5
18.	2.19	5	436	122	3	6	2	4	9,6
19.	2.24	6	809	75	6	20	14	20	7,7
20.	2.15	24	760	90	5	20	14	20	7,9
21.	2.12	36	908	95	20	11	9	2	3,2
22.	2.29	36	920	96	3	10	5	7	8,4
23.	2.20	5	522	110	1	2	4	2	8,8
24.	2.13	12	775	85	6	12	8	4	9,2
25.	2.11	12	826	80	5	5	10	10	9,6
26.	2.23	6	850	69	20	16	4	2	9,8
27.	2.28	36	901	95	4	20	16	20	10,2
28.	2.14	5	606	99	2	10	5	8	8,8
29.	2.27	12	892	75	1	2	5	1	8,6
30.	2.30	24	862	86	8	8	8	4	8,4
31.	2.25	6	954	65	15	10	5	5	8,2
32.	2.16	5	204	174	4	8	6	6	7,7
33.	2.17	12	869	64	6	12	4	5	7,9
34.	2.22	12	791	82	7,5	1,5	9	3	9,2
35.	2.26	3	264	161	10,5	12	6	4	10,2
36.	2.18	24	945	92	12	10	8	6	8,8

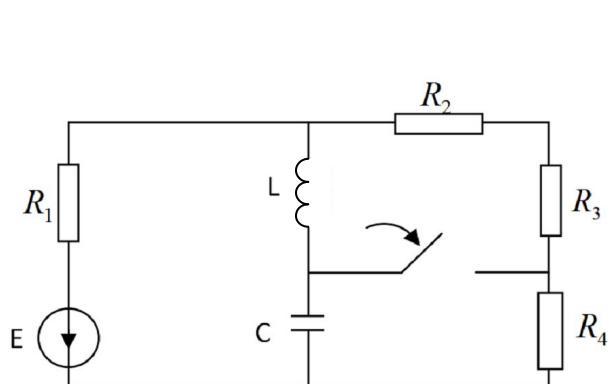


Рисунок 2.11

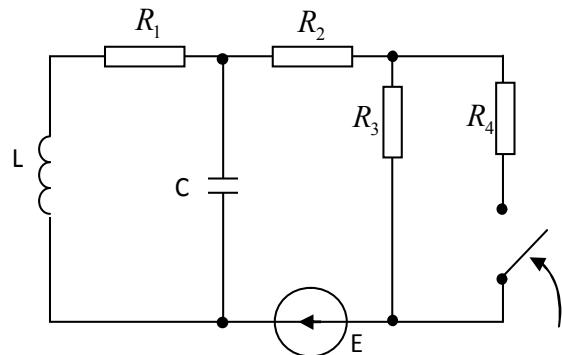


Рисунок 2.12

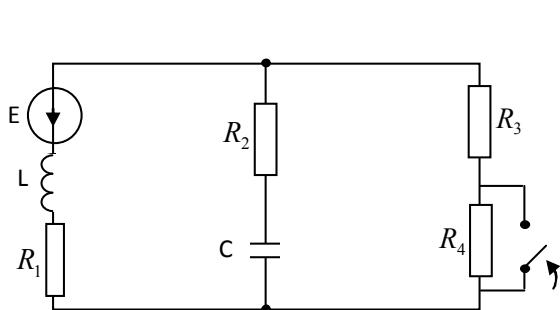


Рисунок 2.13

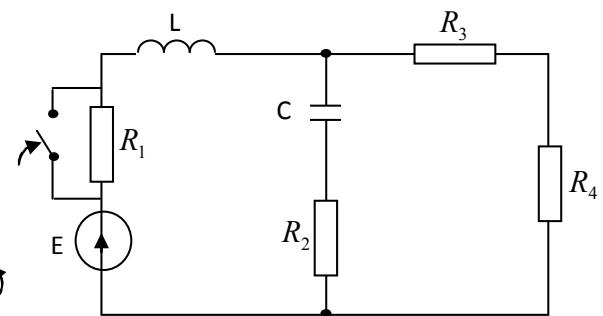


Рисунок 2.14

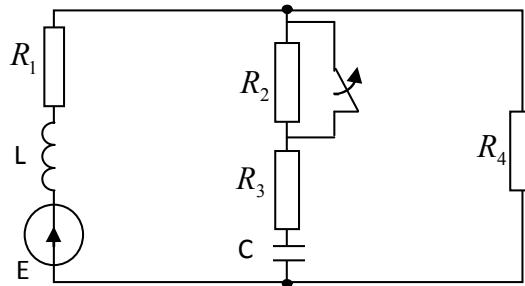


Рисунок 2.15

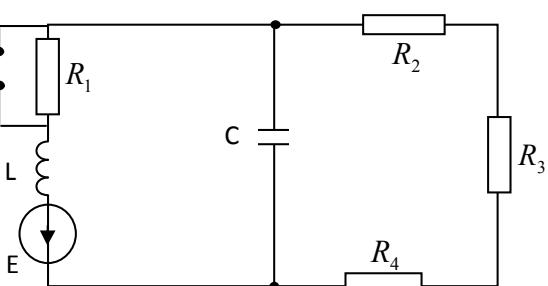


Рисунок 2.16

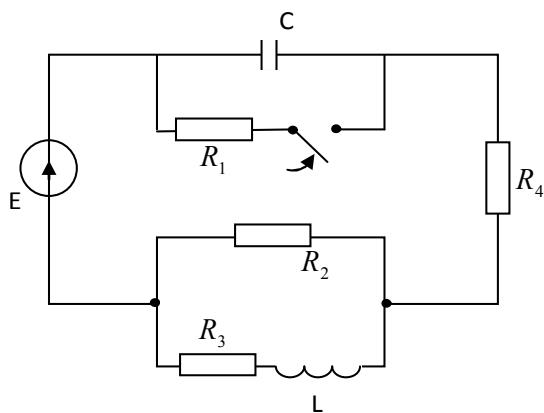


Рисунок 2.17

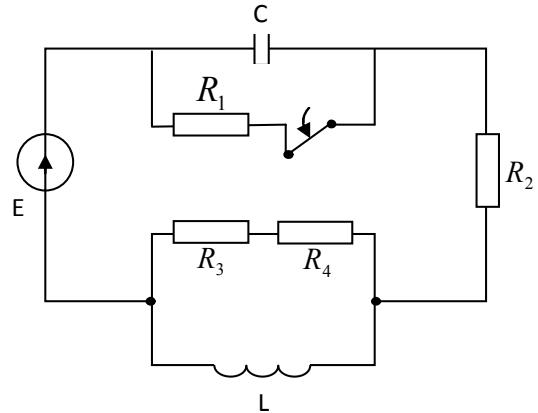


Рисунок 2.18

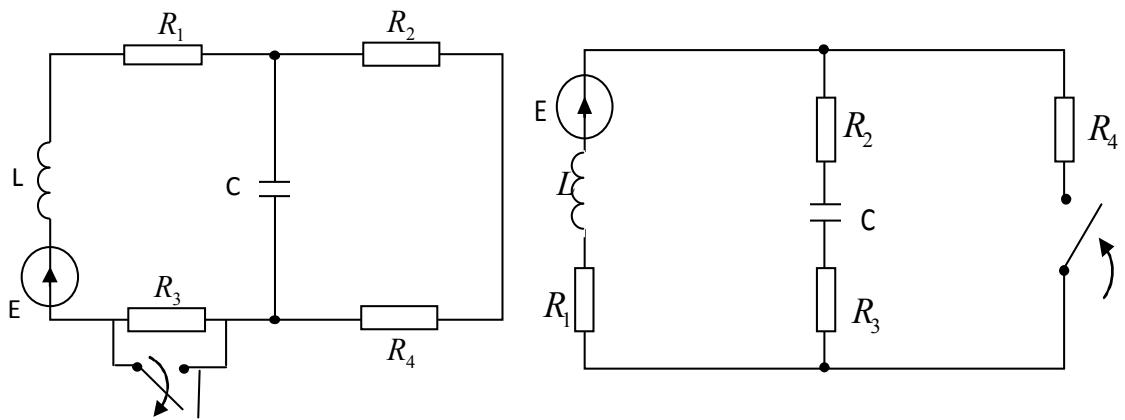


Рисунок 2.19

Рисунок 2.20

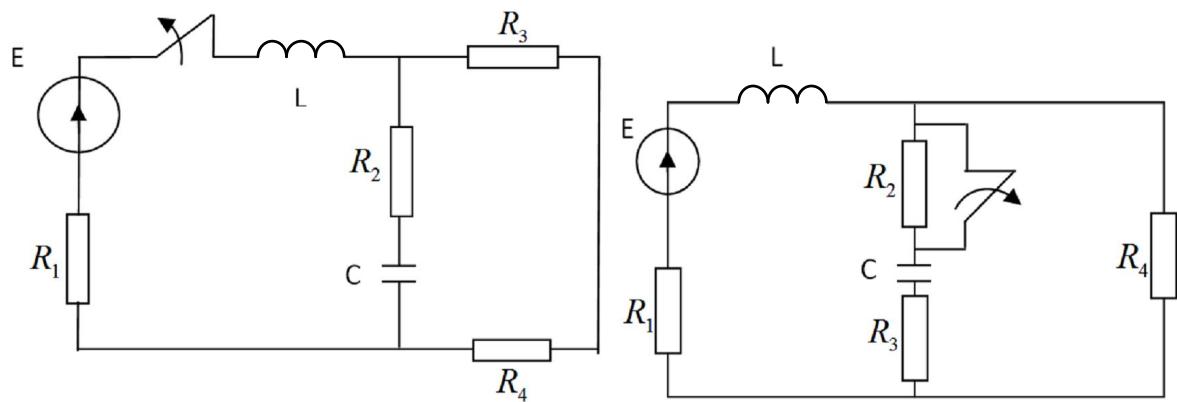


Рисунок 2.21

Рисунок 2.22

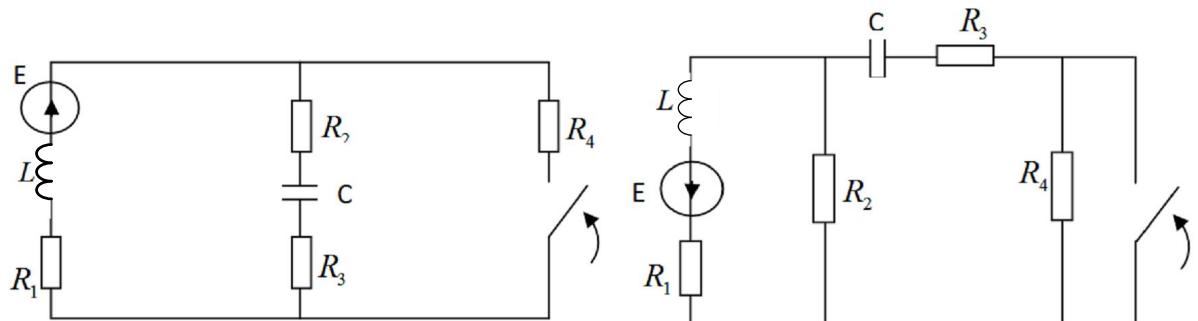


Рисунок 2.23

Рисунок 2.24

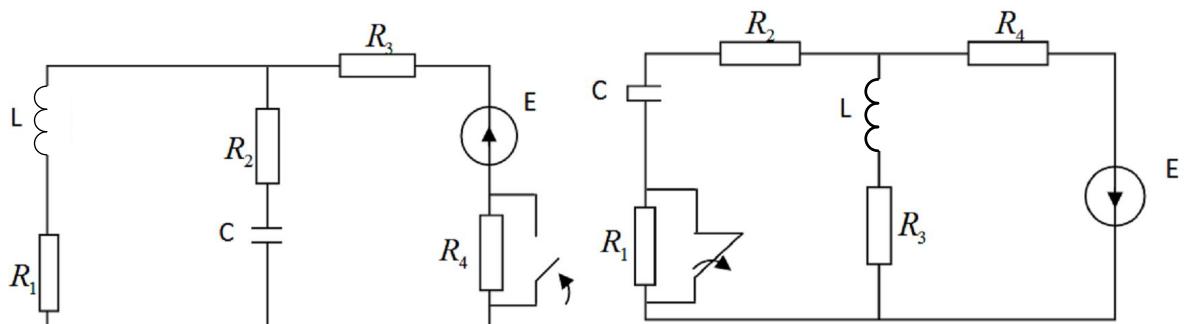


Рисунок 2.25

Рисунок 2.26

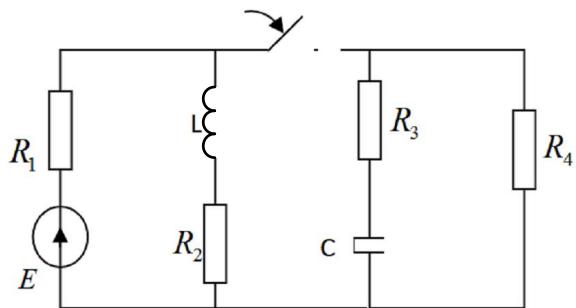


Рисунок 2.27

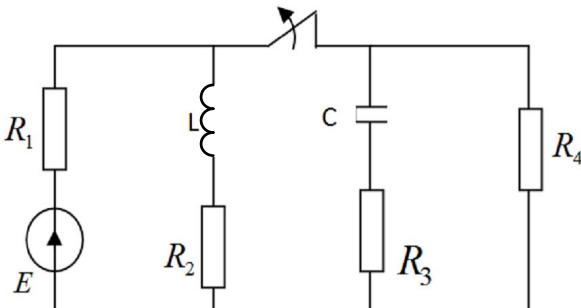


Рисунок 2.28

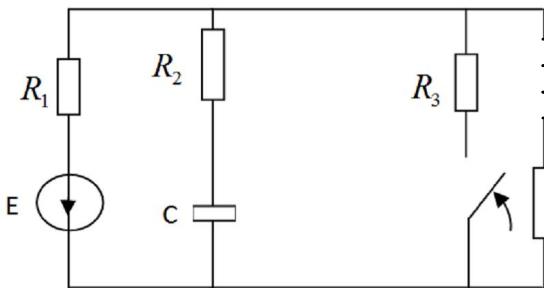


Рисунок 2.29

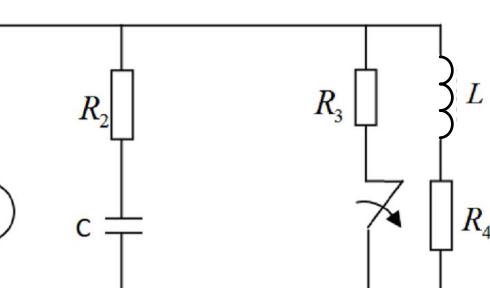


Рисунок 2.30

2.2 ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

При изучении настоящего раздела необходимо усвоить, что источников с абсолютно постоянной или синусоидальной э.д.с. не существует. Различные источники энергии в силу ряда причин создают пульсирующие, медленно меняющиеся или незначительно отличающиеся от синусоидальной формы напряжения.

При расчете цепей, находящихся под воздействием периодических несинусоидальных значений, необходимо знать способы их представления: 1) графики зависимости мгновенных несинусоидальных токов и напряжений от времени; 2) аналитический способ разложения периодических функций в ряд Фурье, из которого для практических целей берут ограниченное число первых членов ряда.

В разложении в ряд Фурье в общем случае представлены постоянная составляющая, основная (первая) гармоническая составляющая, имеющая период, равный периоду данного несинусоидального воздействия, высшие гармонические составляющие и их начальные фазы. Основную и высшие

гармонические составляющие обычно называют просто гармониками. Амплитуды и начальные фазы гармоник определяют спектральный состав несинусоидальной кривой, который может быть представлен в виде диаграмм амплитудно-частотного спектров.

2.2.1 Графоаналитический метод определения коэффициентов ряда Фурье

На протяжении отрезка соответствующего периоду на равных расстояниях $\Delta\omega t$ друг от друга проводятся ординаты кривой.

$$y = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega + \varphi_2) + \dots + A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad (2.42)$$

где A_0 — постоянная составляющая;

$A_1 \dots A_k$ — амплитуды гармонических составляющих;

$\varphi_1 \dots \varphi_k$ — начальные фазы гармоник.

Коэффициент A_0 — постоянная составляющая, определяется приближенным выражением:

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m}, \quad (2.43)$$

где $\sum_{i=1}^m y_i$ — алгебраическая сумма всех ординат, взятая за период;

m — число ординат.

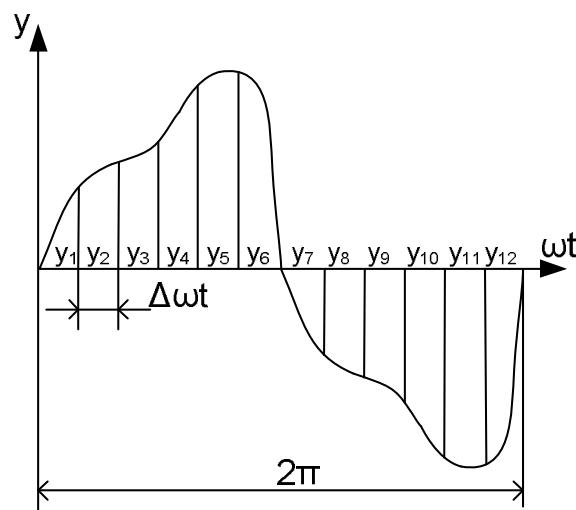


Рисунок 2.31

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y d\omega t \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m y_i \Delta\omega t = \frac{\Delta\omega t \sum_{i=1}^m y_i}{2\pi} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m},$$

т.к. $\Delta\omega t = 2\pi/m$

Результат определения A_0 тем точнее, чем меньше будет взят интервал $\Delta\omega t$ между ординатами.

Коэффициенты B_k и C_k находятся из выражения (2.42) после преобразования, применив формулу синусов суммы двух углов:

$$A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = A_k \sin k\omega t \cos \varphi_k + A_k \cos k\omega t \sin \varphi_k$$

Обозначив постоянные величины:

$$A_k \cos \varphi \varphi_k = B_k; A_k \sin \varphi_k = C_k.$$

Получим:

$$A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t;$$

Тогда несинусоидальную функцию (2.42) можно выразить
 $y = A_0 + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots + B_m \sin m\omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots + C_m \cos m\omega t;$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin k\omega t d\omega t; C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos k\omega t d\omega t.$$

На основании этих выражений определяем коэффициенты B_k и C_k .

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin k\omega t d\omega t \approx \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m y_k \sin k\omega t, \quad (2.44)$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos k\omega t d\omega t \approx \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m y_k \cos k\omega t. \quad (2.45)$$

Пример 2.5. Для кривой напряжения однополупериодного выпрямления $u(\omega t) = U_m \sin \omega t$ (рис. 2.32). Найти действующее напряжение путем непосредственного интегрирования. Сравнить найденный результат с расчетом по гармоникам ряда Фурье, учитывая только: а) первый член ряда, б) первые три члена ряда. Оценить погрешность δ в процентах. Определить коэффициенты K_a, K_ϕ, K_i .

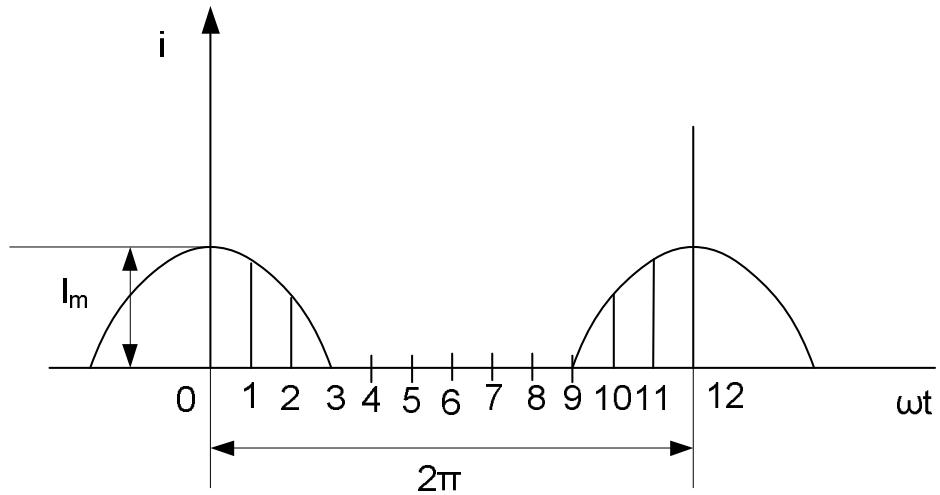


Рисунок 2.32

Разложение в ряде Фурье данной кривой (рис. 2.32):

$$u(\omega t) = \frac{2U_{max}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t + \dots \right).$$

Решение. Находим действующие и среднее напряжения непосредственным интегрированием :

$$U = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi U_m^2 \sin^2 \omega t d\omega t} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^\pi} = \sqrt{\frac{U_m^2 \pi}{2\pi} \frac{1}{2}} = \frac{U_m}{2};$$

$$U_{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi U_m \sin \omega t d\omega t = -\frac{U_m}{2\pi} \cos \omega t \Big|_0^\pi = \frac{U_m}{\pi}$$

Учитывая только первый член разложения в ряд Фурье, оценим погрешность:

$$U' = U_m / \pi; \delta' = (U - U') / U \cdot 100\% = \frac{U_m/2 - U_m/\pi}{U_m/2} 100\% = 36,3\%.$$

С учетом первых трех членов разложения

$$U^h = U_m \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{3\pi\sqrt{2}}\right)^2} = 0,499 U_m$$

Получаем погрешность вполне допустимую при инженерных расчетах. Таким образом, остальными членами разложения в ряд Фурье можно пренебречь.

Определяем коэффициенты, характеризующие форму кривой напряжения:

$$K_a = U_m / U = U_m / (U_m/2)^2 = 2;$$

$$K_\phi = U / U_{cp} = U_m \pi / (2U_m)^2 = \pi/2 = 1,57;$$

$$K_i = U_1/U = 2U_m/\sqrt{2(2U_m)^2} = 0,707.$$

Пример 2.6. Разложить в тригонометрический ряд графоаналитическим методом периодический ток, который получается в цепи (рис. 2.32) в результате однополупериодного выпрямления. Амплитуда тока $I_m = 10$ А. Нагрузка — активная.

Решение. Построим график выпрямленного тока, разделим его на 10 частей с интервалом по оси абсцисс в 30° и проведем ординаты. Для определения постоянной составляющей I_0 и коэффициентов B_1 и C_1 составим таблицу.

Номер ординаты	i , А	ωt , град.	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$i \sin \omega t$	$i \cos \omega t$
1	8,6	30	0,5	0,86	4,3	7,4
2	5	60	0,86	0,5	4,3	2,5
3	0	90	1	0	0	0
4-9	0	120-270	-	-	0	0
10	5	300	-0,86	0,5	-4,3	2,5
11	8,6	330	-0,5	0,86	-4,3	7,4
12	10	360	0	1	0	10
Сумма	37,2	-	-	-	0	29,8

Согласно формуле (2.43) постоянная составляющая выпрямленного тока имеет величину

$$I_0 = \frac{\sum_{k=1}^m i_k}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{12} i_k}{12} = \frac{37,2}{12} = 3,1 \text{ А.}$$

По формуле (2.44) и (2.45) найдем

$$B_1 = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m i_k \sin k\omega t = 0; C_1 = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m i_k \cos k\omega t \frac{2}{12} 29,8 = 4,96$$

Для определения коэффициентов C_k (2, 3 и т. д. гармоника) составляют аналогичные таблицы:

Для определения коэффициента C_2 составим следующую таблицу.

Номер ординаты	i, A	$2\omega t$ град.	$\sin 2\omega t$	$\cos 2\omega t$	$i\sin 2\omega t$	$i\cos 2\omega t$
1	8,6	60	0,86	0,5	7,4	4,3
2	5	120	0,86	-0,5	4,3	-2,5
3	0	180	0	-1	0	0
4-9	0	-	-	-	0	0
10	5	600	-0,86	-0,5	-4,3	-2,5
11	8,6	660	-0,86	0,5	-7,4	4,3
12	10	720	0	1	0	10
Сумма	37,2	-	-	-		13,6

$$C_2 = \frac{2}{12} \cdot 13,6 = 2,26$$

Для определения C_3 составим следующую таблицу.

Номер ординаты	i, A	$3\omega t$ град.	$\sin 3\omega t$	$\cos 3\omega t$	$i\sin 3\omega t$	$i\cos 3\omega t$
1	8,6	90	1	0	8,6	0
2	5	180	0	-1	0	-5
3	0	-	-	-	0	0
4-9	0	-	-	-	0	0
10	5	900	0	-1	0	-5
11	8,6	990	-0,1	0	-8,6	0
12	10	1080	0	1	0	10
Сумма	37,2	-	-	-	0	0

$$C_3 = 0; B_3 = 0.$$

Т.е., третья гармоника в составе ряда отсутствует. В таком же порядке определены следующие коэффициенты: $C_4 = 0,6; C_5 = 0; C_6 = 0,46$.

При определении коэффициентов можно заметить, что в составе ряда отсутствуют не только синусы, но и нечетные гармоники, кроме первой, а знаки высших гармоник чередуются.

Следовательно, ряд заданной функции имеет вид:

$$i=3,1+4,96\cos\omega t+2,26\cos 2\omega t-0,6\cos 4\omega t+0,46\cos 6\omega t+\dots$$

Задание 2.2 Расчет несинусоидальных токов и напряжений с помощью графоаналитического метода определения коэффициентов ряда Фурье

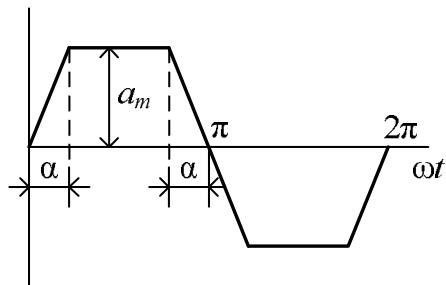


Рисунок 2.33

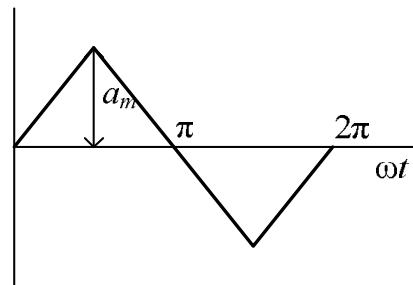


Рисунок 2.34

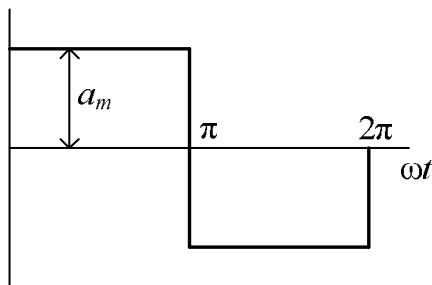


Рисунок 2.35

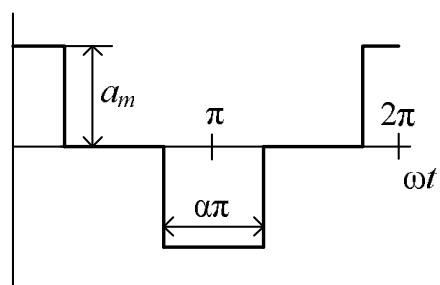


Рисунок 2.36

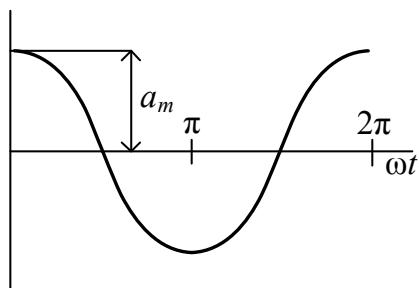


Рисунок 2.37

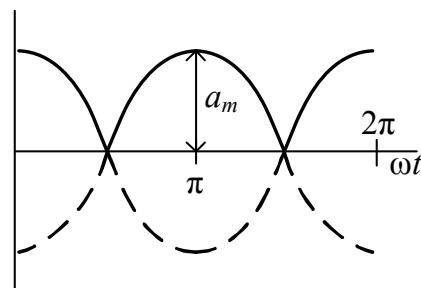


Рисунок 2.38

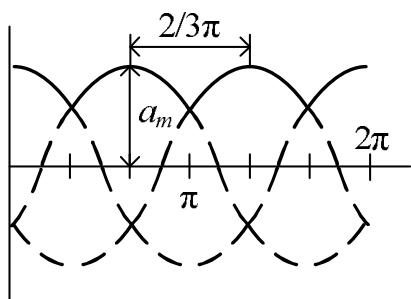


Рисунок 2.39

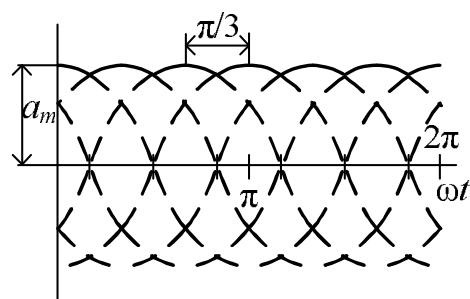


Рисунок 2.40

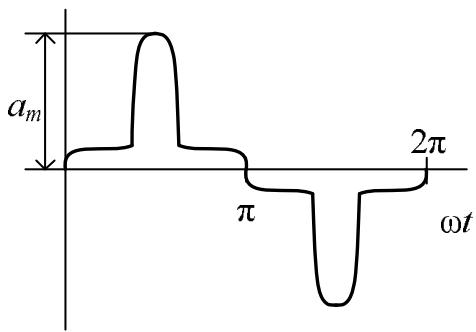


Рисунок 2.41

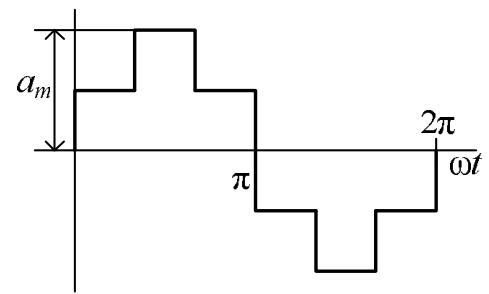


Рисунок 2.42

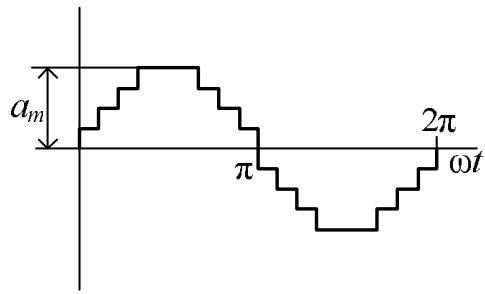


Рисунок 2.43

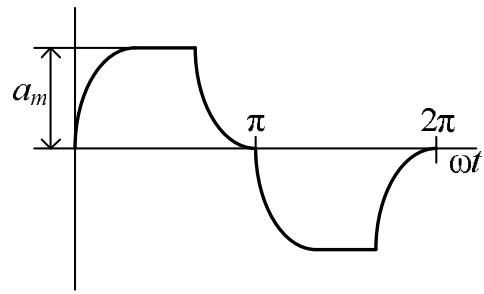


Рисунок 2.44

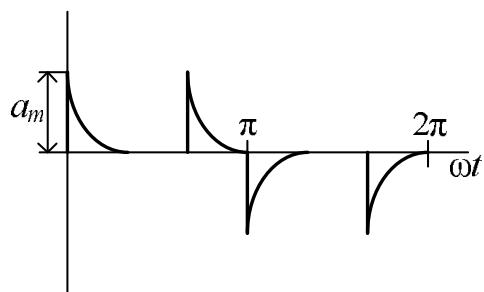


Рисунок 2.45

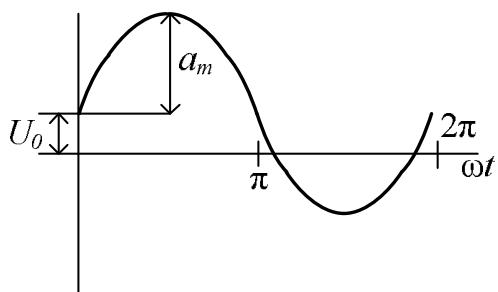


Рисунок 2.46

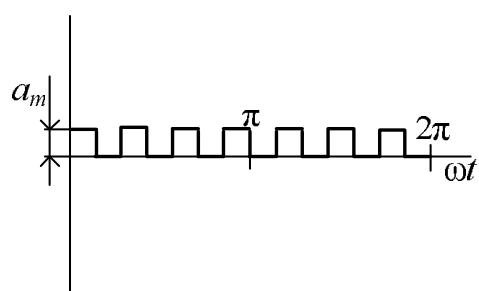


Рисунок 2.47

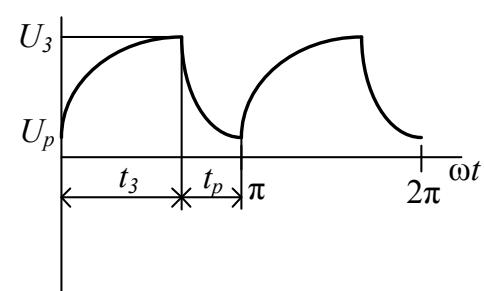


Рисунок 2.48

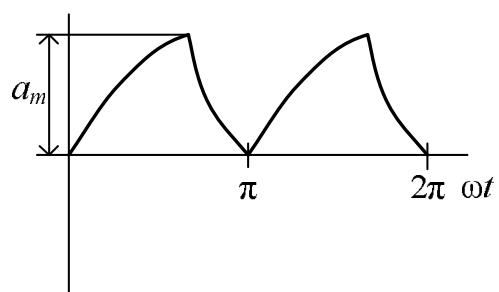


Рисунок 2.49

$$a_m = I_m = 10 \text{ A}; a_m = U_m = 100 \text{ B}; U_0 = 10 \text{ B}; U_3 = 100 \text{ B}; U_p = 10 \text{ B}.$$

2.3 НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

Различие свойств неферромагнитного и ферромагнитного материалов наглядно иллюстрируют зависимости $B(H)$ — основные характеристики ферромагнитного материала. Для неферромагнитного материала эта зависимость линейная, а для ферромагнитного — нелинейная. В последнем случае она изображается кривой намагничивания или дается в табличной форме.

Различные ферромагнитные материалы обладают неодинаковыми свойствами. Так, например, при одном и том же значении напряженности магнитного поля H значение магнитной индукции B для электротехнической стали будет во много больше, чем, для чугуна.

Основной закон для использования магнитных цепей — закон полного тока (второй закон Кирхгофа для магнитной цепи):

$$\sum_{k=1}^n H_k l_k = \sum_{i=1}^m I_i w_i,$$

где H_k — напряженность магнитного поля на участке магнитной цепи l_k ($H_k = \text{const}$);

$I_i w_i$ — МДС.

Суммирование $H_k l_k$ и $I_i w_i$ проводят вдоль контура, совпадающего со средней магнитной линией.

Задача определения Iw по заданному магнитному потоку Φ или индукции B называется прямой задачей расчета магнитной цепи.

По эскизу магнитопровода находят площадь поперечного сечения S_k (в м^2) участка магнитопровода.

По найденному значению S_k и заданному магнитному потоку Φ определяют магнитную индукцию $B_k = \frac{\Phi}{S_k}$ на участках магнитопровода.

По кривой намагничивания $B(H)$ для заданной марки стали находят напряженность магнитного поля в стали $H_{\text{ст.к}}$ на участках магнитопровода.

По эскизу магнитопровода определяют длину средней магнитной линии участков магнитопровода $l_{\text{ст.к.}}$.

Находят магнитное напряжение $H_{\text{ст.к.}}l_{\text{ст.к.}}$ на участках магнитопровода.

По формуле $H_B = 0,8 B \cdot 10^6$ находят напряженность магнитного поля в воздушном зазоре.

По эскизу магнитопровода определяют длину воздушного зазора l_B .

Находят магнитное напряжение в воздушном зазоре $H_B l_B$.

Суммируют магнитные напряжения отдельных участков магнитопровода и воздушного зазора, которые, согласно полного тока, равны искомой МДС.

$$\sum_{k=1}^n H_{\text{ст.к.}} + H_B l_B = Iw$$

Задача определения Φ (или B) по заданному значению Iw называется обратной задачей расчета магнитной цепи. Для решения этой задачи применяется метод последовательных приближений, сущность которого заключается в том, что по произвольно выбранному значению магнитного потока Φ_0 вычисляют соответствующую ему магнитодвижущую силу Iw_0 (нулевое приближение).

Сравнивая полученное значения Iw_0 с заданным значением Iw , вносят поправку в Φ , т.е. задаются новым значением Φ_1 и вычисляют новое значение Iw_1 (первое приближение). Далее снова вносят поправку в Φ_1 задаваясь значением Φ_2 и находят соответствующие значения Iw_2 (второе приближение). Аналогично вычисляют приближения Iw_3, \dots, Iw_n , если для n -го приближения будет найдено такое значение Iw_n для которого справедливо неравенство $|Iw - Iw_n| \leq F$ (F – допускаемая погрешность), то Iw_n будет искомой значением магнитодвижущей силы. В применении к расчету магнитной цепи этот метод считают с графическим методом. После того как вычислено несколько (не менее пяти пар значений Φ и Iw),

строят кривую $\Phi(Iw)$ и по ней для заданной МДС Iw находят искомое значение магнитного потока $\Phi_{иск}$.

При расчете разветвленной симметричной магнитной цепи магнитную систему мысленно разрезают по оси симметрии, после чего задача сводится к расчету последовательной магнитной цепи.

Если разветвляемая магнитная цепь несимметрична, то при ее расчете удобно использовать метод аналоги. По этому методу магнитную цепь заменяют аналогичной электрической цепью; при этом принимают, что МДС аналогична э.д.с., магнитное сопротивление R_M электрическому нелинейному, сопротивление воздушного зазора R_B – электрическому линейному сопротивлению, магнитный поток Φ – электрическому току I . В результате получается нелинейная электрическая цепь, которую рассчитывают графическим или каким-либо другим методом.

Катушка без ферромагнитного сердечника обладает постоянной индуктивностью L , т.е. значение индуктивности не зависит от тока I катушки. В этом случае характеристика $\Phi(I)$ линейная. Если такая катушка питается синусоидальным напряжением, то кривые тока и магнитного потока также синусоидальны.

Если катушка имеет ферромагнитный сердечник, то характеристика $\Phi(I)$ нелинейная и индуктивность L зависит от тока.

Если напряжение на зажимах катушки синусоидально, то при $f=const$ напряжение и магнитный поток пропорциональны ($U \approx 4.44 f w \Phi_m$)

В цепи с линейными индуктивностью и емкостью можно добиться наступления резонанса, варьируя параметры L , C и f . Введение в цепь нелинейной индуктивности, какой является катушка со стальным сердечником, также дает возможность осуществить резонанс, называемый в этом случае феррорезонансом.

Широкое практическое применение получили четырехполюсники, в которых существенные изменения напряжения на входе почти не вызывают изменения напряжения на выходе. Такие четырехполюсники называются стабилизаторами напряжения. В цепи феррорезонанса напряжений, состоящей из соединенных

последовательно линейной емкости и нелинейной индуктивности, в области токов, превышающих резонансное значение, напряжение на индуктивности U_L , остается почти неизменным при значительных колебаниях напряжения на входе.

Принцип работы магнитного усилителя также основан на использовании нелинейной индуктивности. Большое усиление можно получить лишь при условии магнитного насыщения сердечника. При отсутствии тока в управляющей обмотке ток в рабочей обмотке невелик и можно считать, что приложенное синусоидальное напряжение и уравновешивается э.д.с. самоиндукции $u \approx -e_L$. Поэтому практически мощность в сопротивлении нагрузки Z_H близка к нулю. При большом токе в управляющей обмотке магнитная цепь приходит в состояние насыщения и тогда значение $u_L = w \frac{d\Phi}{dt}$ мало. В результате все приложенное к рабочей обмотке напряжение оказывается равным напряжению на нагрузке R_H ; при этом мощность, выделяемая в R_H , велика.

Задание 2.3 Расчет нелинейных магнитных цепей

Задача 2.3.1. В магнитной цепи рис. 2.50 МДС катушки равна Iw . Материал магнитопровода — электротехническая сталь. В левом стержне магнитопровода имеется воздушный зазор длиной L_0 . Определить магнитную индукцию в воздушном зазоре при двух значениях длины воздушного зазора: 1 и 2 мм.

Указание. Воспользоваться кривой намагничивания на рис. 2.51

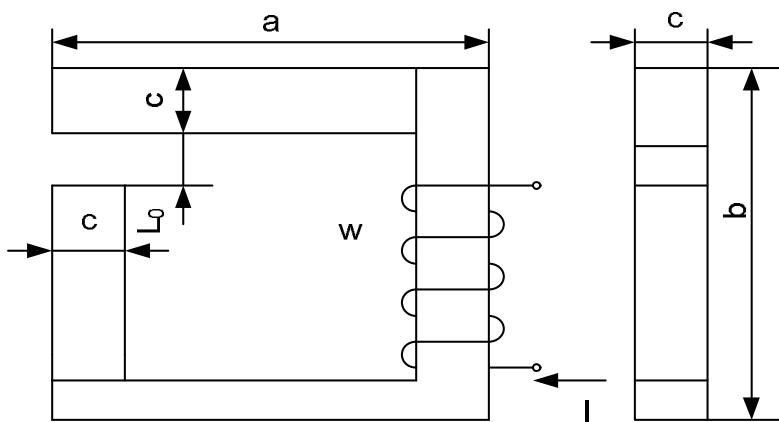


Рисунок 2.50

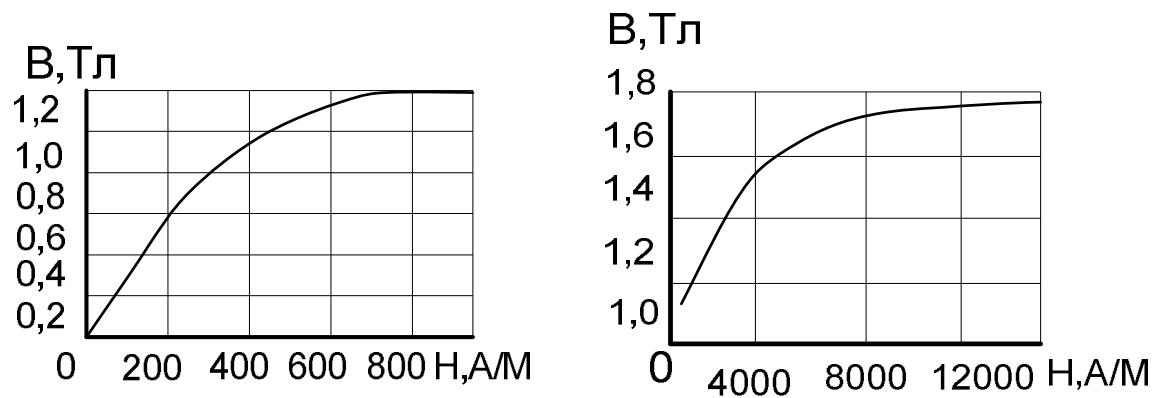


Рисунок 2.51

Таблица 2.2

Исходные данные к задаче 2.3.1

Номер варианта	a , мм	b , мм	c , мм	Iw , А	Номер варианта	a , мм	b , мм	c , мм	Iw , А
1	90	120	30	750	6	180	240	60	1000
2	120	160	40	800	7	190	260	65	2050
3	150	180	45	850	8	210	280	70	1100
4	150	200	50	900	9	220	300	75	1100
5	160	220	55	950	10	240	320	80	1100

Задача 2.3.2. В магнитной цепи рис. 2.52 катушки имеют одинаковое число витков. Материал магнитопровода — электротехническая сталь. Длины воздушных зазоров $L_0 = 1$ мм. При соединении между собой зажимов b и f и питание цепи катушек постоянным напряжением магнитная индукция в воздушных зазорах равна B_0 . Определить значение магнитной индукции в воздушных зазорах, если при сохранении прежней МДС соединить с зажимом b вместо зажима f зажим d .

Указание. Воспользоваться кривой намагничивания на рис. 2.51.

Таблица 2.3

Исходные данные к задаче 2.3.2

Номер варианта	c , см	B_0 , Тл	Номер варианта	c , см	B_0 , Тл
1	30	0,5	6	60	1,0
2	40	0,6	7	65	1,1
3	45	0,7	8	70	1,2
4	50	0,8	9	75	1,25
5	55	0,9	10	80	1,3

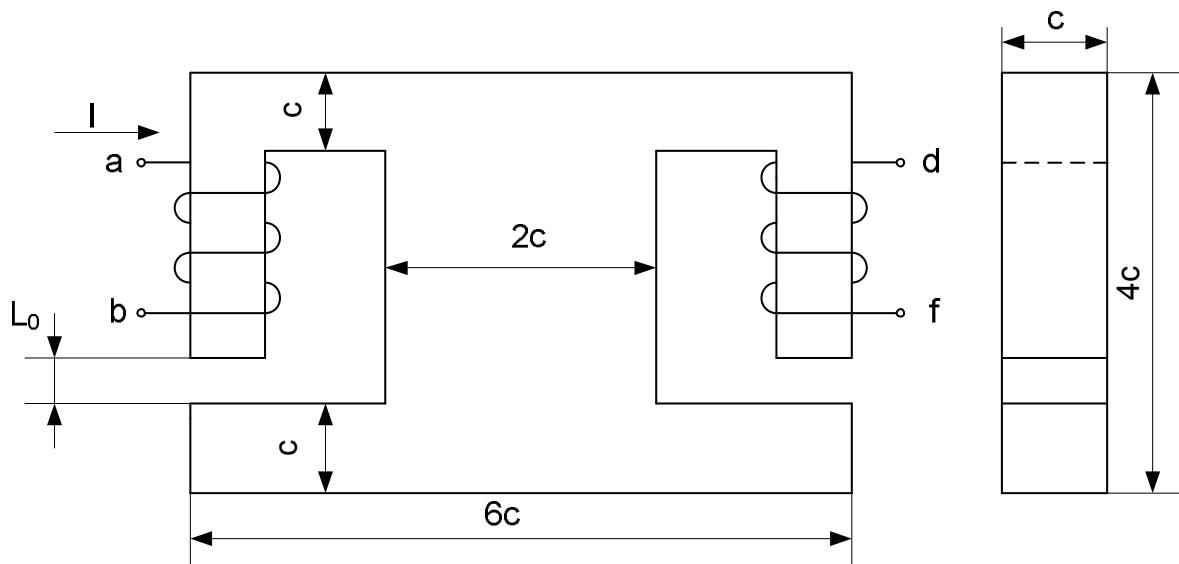


Рисунок 2.52

Задача 2.3.3. Подъемный электромагнит имеет подковообразный магнитопровод прямоугольного сечения (рис. 2.53). Материал магнитопровода и якоря — электротехническая сталь. На среднем стержне расположена катушка, состоящая из w витков. Между краями стержней магнитопровода и якорем предусматриваются воздушные зазоры длиной $L_0 = 0,5$ мм. Электромагнит должен развивать подъемную силу Q . Определить требуемое значение тока в катушке.

Указание. 1. Подъемная сила электромагнита (на один полюс сечения сердечника) выражается формулой $Q_1 = \frac{B^2 s}{2\mu_0}$, где s — площадь поперечного сечения воздушного зазора под полюсом

2. Воспользоваться кривой намагничивания на рис. 2.51.

Таблица 2.4

Исходные данные к задаче 2.3.3

Номер варианта	$c, \text{см}$	w	$Q, \text{Н}$	Номер варианта	$c, \text{см}$	w	$Q, \text{Н}$
1	3	200	1500	6	5,5	600	5000
2	3,5	200	2000	7	6	700	6000
3	4	300	2500	8	6,5	800	7000
4	4,5	400	3000	9	7	900	8000
5	5	500	4000	10	7,5	1000	9000

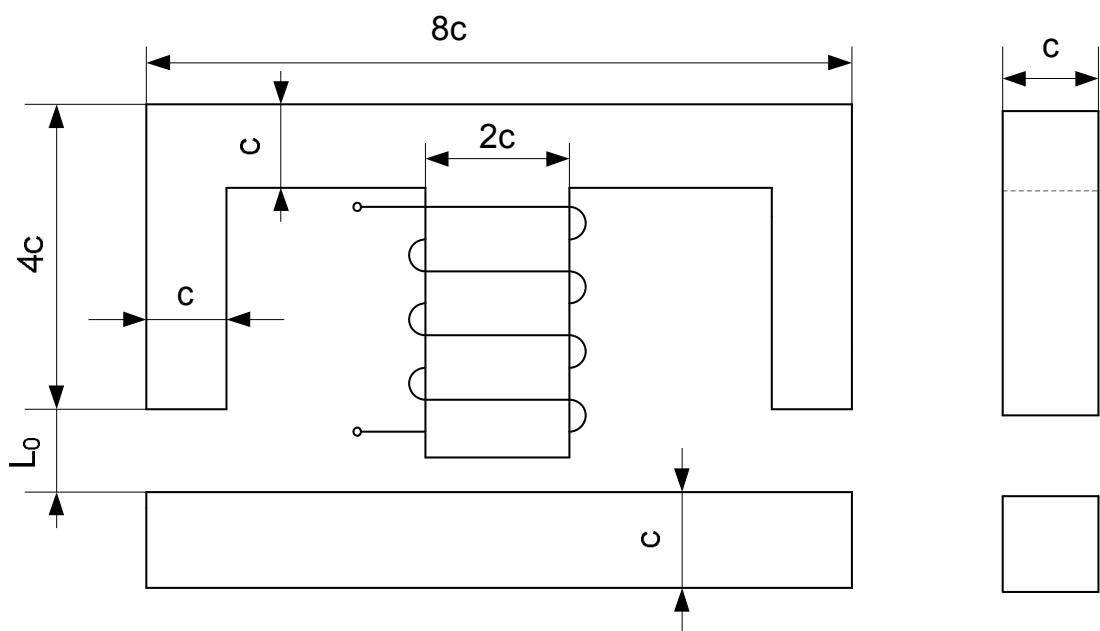


Рисунок 2.53

ЧАСТЬ 3

3.1 СОСТАВ ЗАДАЧ

Третья часть учебного пособия включает задачи по разделам электростатики, по расчету электрического поля в проводящей среде и по расчету магнитных полей.

Решение задач предполагает изучение литературы [3,4] по следующим разделам ТОЭ, ч.3:

1. Электростатическое поле. Закон Кулона.
2. Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде.
3. Теорема Гаусса для определения напряженности и потенциала в поле точечного заряда.
4. Теорема Гаусса в дифференциальной форме.
5. Теорема Гаусса в интегральной форме.
6. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа.
7. Поле заряженной оси.
8. Метод зеркальных изображений.
9. Поле параллельных заряженных осей.
10. Поле двухпроводной линии.
11. Вектор электрической индукции.
12. Потенциальные коэффициенты. Первая группа формул Максвелла
13. Емкостные коэффициенты. Вторая группа формул Максвелла.
14. Частичные емкости. Третья группа формул Максвелла.
15. Шар (проводящий и диэлектрический) в равномерном поле.
16. Плотность тока и ток.
17. Уравнение Лапласа для электрического поля в проводящей среде.
18. Основной закон магнитного поля — закон полного тока.
19. Магнитные цепи при постоянных токах.

3.2 ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

Задача 3.2.1.

Заданы два провода диаметром D расположенные в воздухе параллельно друг другу. Расстояние между осями проводов d . Схема расположения проводов приведена на рис.3.1. Точки O_1 и O_2 означают геометрические оси проводов.

Заряженные оси расположены в некоторых точках m и n — рис.3.1.

Заданы заряды каждого провода на один метр длины. Проводу слева (рис.3.1.) сообщен заряд $+q$, проводу справа — заряд $-q$.

Значения параметров для задачи приведены в табл. 3.1 по вариантам.

Таблица 3.1

Значение параметров

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D, \text{мм}$	8	10	12	14	10	12	14	10	8	12
$d, \text{мм}$	18	20	24	28	20	24	28	22	20	28
$q * 10^{-8} \text{Кл}$	0,8	0,9	0,85	0,95	1	1,1	0,8	0,9	0,85	0,95

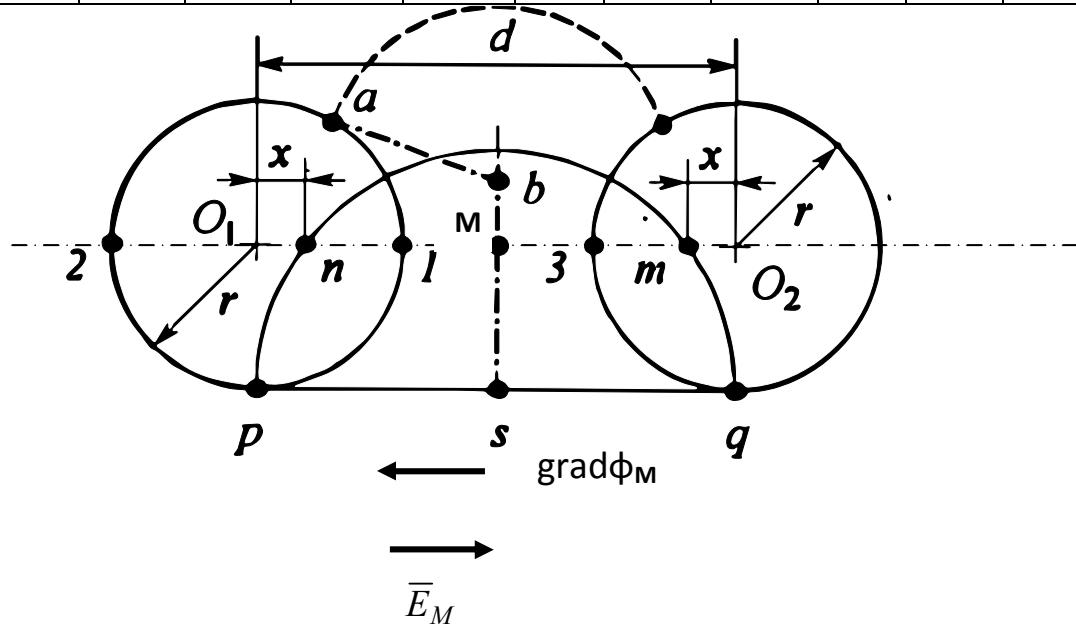


Рисунок 3.1. Схема поля двухпроводной линии (поле двух заряженных осей)

Требуется определить:

- положение электрических осей между осями проводов;

- наибольшее и наименьшее значение напряженности поля E и плотности заряда σ на поверхности проводов;
- отношение наибольшей и наименьшей плотности зарядов;
- градиент потенциала в точке M (рис.3.1), расположенной посередине между проводами, на линии, соединяющей центры O_1 и O_2 .

Указания.

Если проводу слева на рис. 3.1 сообщен заряд $+q$, а проводу справа — заряд $-q$, то в пространстве между проводами возникает электрическое поле. Расположим заряженные оси в некоторых точках m и n — рис.3.1, так, чтобы поверхности каждого провода являлись эквипотенциальными. Этому условию соответствует формула [4]:

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2} \quad (3.1)$$

Знак минус соответствует положению точки n , знак плюс — точке m . Пользуясь формулой (3.1), следует определить величину x , т.е. положение электрических осей.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения напряженности поля E и плотности заряда σ на поверхности проводов учтем, что напряженность поля, создаваемого зарядом $+q$, направлена от этого заряда, а напряженность поля, создаваемого зарядом $-q$, направлена к заряду. Следовательно, наибольшее значение величины E будет в точке 1 (рис.3.1), а наименьшее — в точке 2.

Напряженность поля в точке 1 будет равна сумме напряженностей от обоих зарядов, а напряженность поля в точке 2 — разности напряженностей [4].

Для расчета E_1 следует использовать формулу:

$$E_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l(r-x)} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l(d-r-x)} \quad (3.2)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая постоянная, равная $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$;

l — длина 1 м,

$(r-x)$ — расстояние точки 1 от заряда $+q$;

$(d-r-x)$ — расстояние точки 1 от заряда $-q$.

Расчет E_2 в точке 2 выполняется аналогично по формуле:

$$E_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l(r+x)} - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l(d+r-x)} \quad (3.3)$$

Плотности зарядов на поверхности провода определяем по формуле:

$$D = \sigma = \epsilon\epsilon_0 * E$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость, равная для воздуха 1.

Отношение наибольшей и наименьшей плотности зарядов равняется

$$D_1 / D_2.$$

Градиент потенциала в точке М (рис.3.1), расположенной посередине между проводами, на линии, соединяющей центры O_1 и O_2 (рис.3.1), найдем из условия [4]:

$$\bar{E}_M = -\text{grad}\varphi \quad (3.4)$$

Модуль $\text{grad}\varphi$ в точке М равен модулю E_M . Величина E_M вычисляется по формуле аналогично (3.2) с учетом расстояния зарядов до точки М:

$$E_M = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l(\frac{d}{2} - x)} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l(\frac{d}{2} - x)} \quad (3.5)$$

Пример расчета задачи 3.2.1.

Дано: $d = 20 \text{ мм} = 20 * 10^{-3} \text{ м}$, $D = 10 \text{ мм}$, $r = D/2 = 5 \text{ мм} = 5 * 10^{-3} \text{ м}$, $q = 10^{-8} \text{ Кл}$.

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2} = \frac{20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 5^2} = 1,35 \text{ мм};$$

$$E_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l(r-x)} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l(d-r-x)} = \frac{10^{-8} * 10^3}{2 * 3,14 * 8,85 * 10^{-12} * 1} \left[\frac{1}{(5-1,35)} + \frac{1}{(20-5-1,35)} \right] = \frac{10^{-8} * 0,347 * 10^3}{6,28 * 8,85 * 10^{-12} * 1} = 62400 \text{ В/м};$$

$$E_2 = 21500 \text{ В/м};$$

$$D_1 = \sigma_1 = \epsilon\epsilon_0 * E_1 = 1 * 8,85 * 10^{-12} * 62400 = 550 * 10^{-9} = 0,55 * 10^{-6} \text{ Кл/м} = 0,55 \text{ мККл/м};$$

$$D_2 = \sigma_2 = \epsilon\epsilon_0 * E_2 = 0,19 \text{ мККл/м}$$

$$D_1 / D_2 = 0,55 / 0,19 = 2,9$$

$$E_M = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l(\frac{d}{2}-x)} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l(\frac{d}{2}-x)} = \frac{2*10^{-8}*10^3}{6,28*8,85*10^{-12}*1*(10-1,35)} \\ = 41600 \text{ В/м}$$

Задача 3.2.2

Заданы два провода 1 и 2, расположенные над поверхностью земли на высоте соответственно h_1 и h_2 — рис.3.2. Известны расстояния между проводами 1 и 2, землей и точками М и N — а,с — рис.3.2.

Известны заряды на единицу длины провода 1 — $(+\tau_1)$, провода 2 — $(-\tau_2)$.

Значения параметров для задачи приведены в табл.3.2 по вариантам.

Таблица 3.2

Значения параметров

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$+\tau_1 * 10^{-9}$, Кл/м	2	3	4	5	2	3	4	5	3	4
$-\tau_2 * 10^{-9}$, Кл/м	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
$a, \text{ м}$	2	3	2	4	3	4	2	3	4	5
$h_1, \text{ м}$	3	4	4	4	3	4	3	3	4	3
$c, \text{ м}$	1	1,5	1	2	1,5	2	2,5	1	2	1,5
$h_2, \text{ м}$	4	5	6	6	5	7	5	4	6	5

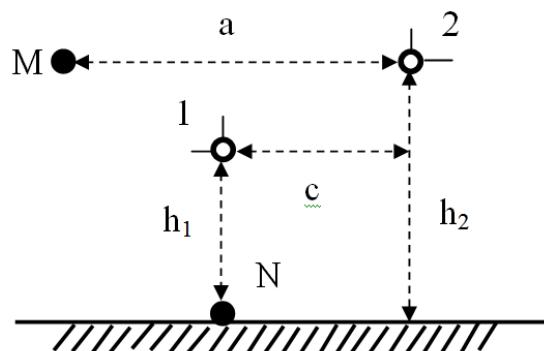


Рисунок 3.2 Схема расположения проводов 1,2 и точек M, N

Требуется определить:

- потенциал ϕ_M точки M (рис.3.2), считая потенциал земли равным нулю;
- поверхностную плотность заряда σ_N в точке N (рис.2) на поверхности земли от действия зарядов на проводах τ_1 и τ_2 .

Указание.

При решении задачи использовать метод зеркальных отображений и определить расстояния между проводами по высоте ($h_2 - h_1$).

Метод зеркальных изображений — это искусственный прием расчета, при котором территориально заряды на проводах 1 и 2 помещают там, где находится их зеркальное отражение. Метод применяется для расчета электростатических полей, полей в проводящей среде и магнитных полей.

Применив в данной задаче метод зеркальных изображений, можно найти потенциал точки M — ϕ_M и поверхностную плотность заряда σ_N в точке N , используя первую группу формул Максвелла.

Для применения метода зеркальных изображений используем рис.3.2 и построим эти изображения — рис.3.3.

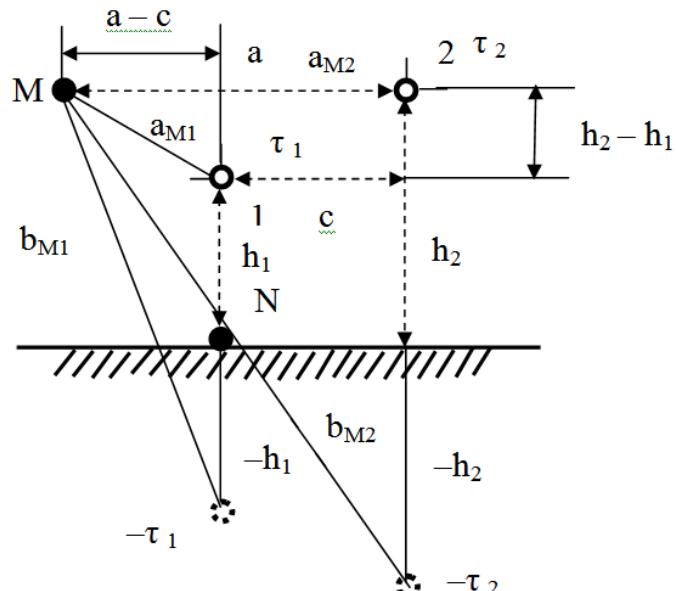


Рисунок 3.3 Построение схемы расположения проводов 1 и 2 по методу зеркального изображения

Пользуясь построенным рис.3.3, следует найти значения a_{M1} , a_{M2} , b_{M1} , b_{M2} для применения формул Максвелла:

$$a_{M1} = \sqrt{(a-c)^2 + (h_2 - h_1)^2}; b_{M1} = \sqrt{[2h_1 + (h_2 - h_1)]^2 + (a-c)^2}$$

$$a_{M2} = a; b_{M2} = \sqrt{(2h_2)^2 + (a)^2}$$

Потенциал точки M — Φ_M определяется с использованием формулы

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad (3.6)$$

В данном случае потенциал точки M складывается из суммы двух потенциалов — Φ_{M1} от заряда τ_1 и потенциала Φ_{M2} от заряда τ_2

$$\Phi_M = \Phi_{M1} + \Phi_{M2} = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{M1}}{a_{M1}} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{M2}}{a_{M2}} \quad (3.7)$$

Для определения поверхностной плотности заряда σ_N в точке N (рис.3.2) на поверхности земли от действия зарядов на проводах τ_1 и τ_2 используем тот факт, что вектор электрического смещения \bar{D} в любой точке диэлектрика, непосредственно примыкающей к поверхности проводящего тела, численно равен плотности заряда в этой точке на поверхности проводящего тела.

Плотность заряда можно найти по формуле

$$D = \sigma = \epsilon\epsilon_0 E \quad (3.8)$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 * h} \quad (3.9)$$

Напряженность электрического поля в точке N равна геометрической сумме напряженностей от четырех зарядов (рис.3.3):

$$\tau_1(\bar{E}_1), \tau_2(\bar{E}_2); -\tau_1(\bar{E}_1^1), -\tau_2(\bar{E}_2^1); \bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_1^1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_2^1$$

Чтобы найти суммарную напряженность поля в точке N построим рис.3.4.

Пользуясь рис. 3.4, определим расстояния до точки N от каждого заряда:

- от τ_1 — h_1 ; от τ_2 — $\sqrt{h_2^2 + c^2}$

Найдем проекции векторов E_2 на линию соединяющую точки 1 и (-1):

$$E_2 = (\bar{E}_2 \cos \alpha) = E_2 \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + c^2}}$$

Определяем сумму $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_1^1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_2^1$ с учетом направления векторов и находим величину $D = \sigma = \epsilon \epsilon_0 * E$

$$\sigma = 2 \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 * h_1} \epsilon \epsilon_0 - 2 \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0 * \sqrt{h_2^2 + c^2}} \cos \alpha \epsilon \epsilon_0 \quad (3.10)$$

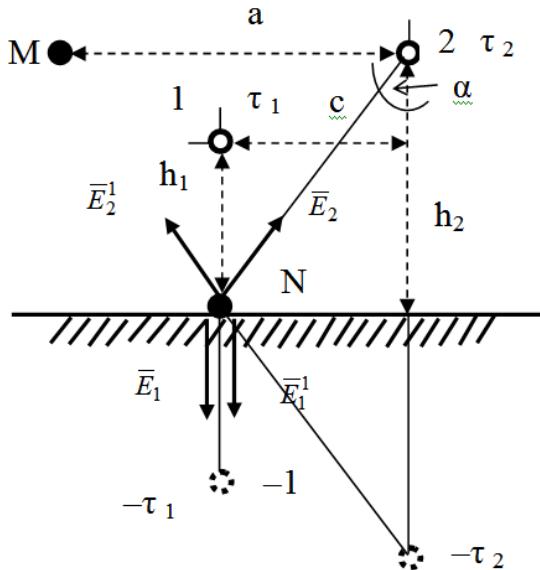


Рисунок 3.4 Схема геометрической суммы напряженности

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_1^1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_2^1$$

Значения $\epsilon = 1$; $\epsilon_0 = 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

Пример расчета задачи 3.2.2

Исходные параметры:

$$h_1 = 3 \text{ м}; h_2 = 4 \text{ м}; a = 2 \text{ м}; c = 1 \text{ м}; \tau_1 = +2 * 10^{-9} \text{ Кл/м}; \tau_2 = -10^{-9} \text{ Кл/м};$$

$$a_{M1} = 1,41 \text{ м}; b_{M1} = 7,07 \text{ м}; a_{M2} = 2 \text{ м}; b_{M2} = 8,24 \text{ м}, \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + c^2}} = \frac{4}{4,12}.$$

$$\begin{aligned} \Phi_M &= \Phi_{M1} + \Phi_{M2} = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{M1}}{a_{M1}} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{M2}}{a_{M2}} = \\ &= \frac{2 * 10^{-9}}{2 * 3,14 * 8,85 * 10^{-12}} \ln \frac{7,07}{1,41} - \frac{10^{-9}}{2 * 3,14 * 8,85 * 10^{-12}} \ln \frac{8,24}{2} \cong 31 \text{ В} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= 2 \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 h_1} \epsilon \epsilon_0 - 2 \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{h_2^2 + c^2}} \cos \alpha = 2 \frac{2 * 10^{-9}}{2 * 3,14 * 3} - 2 \frac{10^{-9}}{2 * 3,14 * 4,12} * \frac{4}{4,12} = \\ &= 0,1375 * 10^{-9} \text{ Кл/м}^2 \end{aligned}$$

Задача 3.2.3

Заданы два провода 1 и 2, расположенные над поверхностью земли на высоте соответственно h_1 и h_2 — рис.3.5. Известно расстояние с между проводами 1 и 2 . Радиус проводов равен r .

Провод 1 соединен с землей через источник ЭДС E . Провод 2 соединен с землей проводником, так что его потенциал равен нулю ($\phi_2 = 0$).

Значения параметров для задачи приведены в табл.3.3 по вариантам.

Таблица 3.3

Значения параметров

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E , В	120	110	100	150	220	200	250	140	175	180
h_1 , м	3	4	4	4	3	4	3	3	4	3
c , м	1	1,5	1	2	1,5	2	2,5	1	2	1,5
h_2 , м	4	5	6	6	5	7	5	4	6	5
r , мм (!)	6	5	8	10	6	5	6	8	4	10

Требуется определить заряды на один погонный метр на проводе 1 — τ_1 и на проводе 2 — τ_2 .

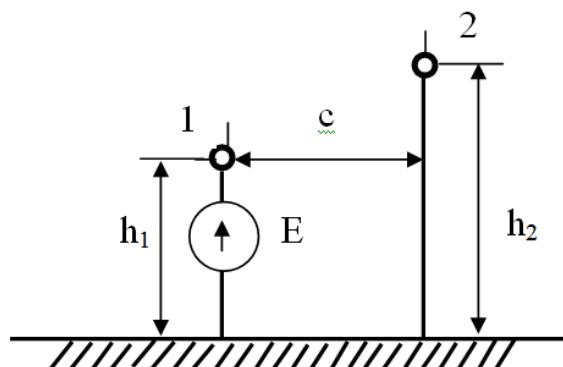


Рисунок 3.5 Схема расположения проводов 1,2

Указание.

При решении задачи использовать метод зеркальных изображений. Применив в данной задаче метод зеркальных изображений, можно найти заряды на проводах 1 и 2, используя вторую группу формул Максвелла.

Для применения метода зеркальных изображений используем рис.3.5 и построим эти изображения — рис.3.6.

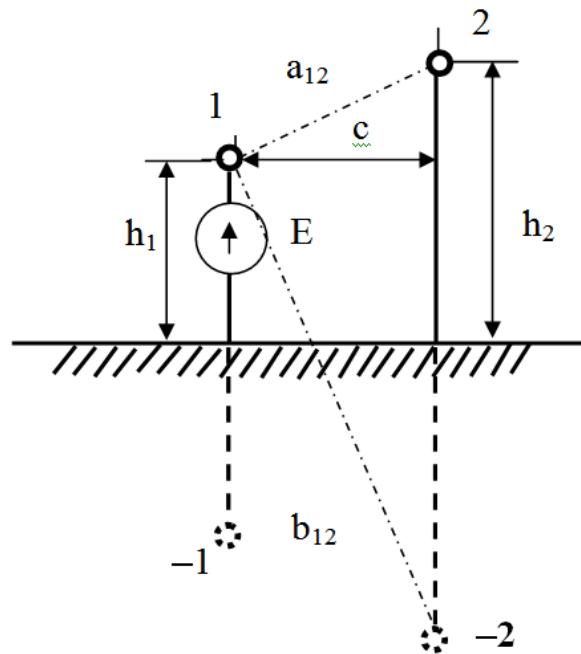


Рисунок 3.6 Построение схемы расположения проводов 1 и 2 по методу зеркального изображения

При решении задачи используется метод зеркальных изображений и вторая группа формул Максвелла [4]:

$$\tau_1 = \beta_{11}\phi_1 + \beta_{12}\phi_2 + \dots$$

$$\tau_2 = \beta_{21}\phi_1 + \beta_{22}\phi_2 + \dots$$

Из этой записи следует, что при $\phi_2 = 0$ (провод 2 соединен с землей):

$$\tau_1 = \beta_{11}\phi_1 = \beta_{11}E \quad (3.11)$$

$$\tau_2 = \beta_{12}\phi_1 = \beta_{12}E \quad (3.12)$$

Коэффициенты β_{11} и β_{12} равны:

$$\beta_{11} = \alpha_{22}/\Delta \quad (3.13)$$

$$\beta_{12} = -\alpha_{12}/\Delta \quad (3.14)$$

Коэффициент Δ вычисляется по соотношению:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}; \Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \quad (3.15)$$

где

$$\alpha_{11} = 1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon \ln(2h_1/r), \text{ м/Ф}; \quad (3.16)$$

$$\alpha_{22} = 1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon \ln(2h_2/r), \text{ м/Ф}; \quad (3.17)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon \ln(b_{12}/a_{12}), \text{ м/Ф;} \quad (3.18)$$

$$\text{Согласно рис.3.6 } b_{12} = \sqrt{[2h_2 - (h_2 - h_1)]^2 + c_2}; a_{12} = \sqrt{(h_2 - h_1)^2 + c^2}$$

Для воздушной линии $\epsilon = 1$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

Пример расчета задачи 3.2.3

Исходные параметры:

$$h_1 = 3 \text{ м}; h_2 = 4 \text{ м}; c = 1 \text{ м}; r = 6 \text{ мм} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}, E = 127 \text{ В}$$

$$\alpha_{11} = 1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon \ln(2h_1/r) = 1 / 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \ln 2 \cdot 3 / 6 \cdot 10^{-3} = 1264 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{22} = 1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon \ln(2h_2/r) = 1 / 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \ln 2 \cdot 4 / 6 \cdot 10^{-3} = 12,9 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$b_{12} = \sqrt{[2h_2 - (h_2 - h_1)]^2 + c_2} = 7,07 \text{ м}; a_{12} = \sqrt{(h_2 - h_1)^2 + c^2} = 1,41 \text{ м}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon \ln(b_{12}/a_{12}) = 1/2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \ln 7,07 / 1,41 = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}$$

$$\Delta = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{12} = 12,4 \cdot 10^{10} \cdot 12,9 \cdot 10^{10} - (2,9 \cdot 10^{10})^2 = 151,5 \cdot 10^{20};$$

$$\beta_{11} = \alpha_{22} / \Delta = 12,9 \cdot 10^{10} / 151,5 \cdot 10^{20} = 0,085 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м};$$

$$\beta_{12} = -\alpha_{12} / \Delta = -2,9 \cdot 10^{10} / 151,5 \cdot 10^{20} = -0,019 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м};$$

Заряды на один погонный метр на проводе 1 — τ_1 и на проводе 2 — τ_2 равны:

$$\tau_1 = \beta_{11} \varphi_1 = \beta_{11} \cdot E = 0,085 \cdot 10^{-10} \cdot 127 = 1,08 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м};$$

$$\tau_2 = \beta_{12} \varphi_1 = \beta_{12} \cdot E = -0,019 \cdot 10^{-10} \cdot 127 = 0,243 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}$$

Задача 3.2.4.

Заданы два провода 1 и 2, расположенные над поверхностью земли на высоте соответственно h_1 и h_2 — рис.3.7а. Известно расстояние d между проводами 1 и 2. Радиус проводов равен r .

Значения параметров к задаче приведены в табл. 3.4 по вариантам

Требуется определить:

- частичные емкости между проводами 1 и 2;
- C_{11} , C_{12} , C_{22} на один метр длины [Ф/м] и рабочую емкость C_P на единицу длины для двухпроводной линии.

Таблица 3.4

Значения параметров

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r, мм	8	6	6	8	10	10	8	6	6	8
h ₁ , м	3	4	4	4	3	4	3	3	4	3
d, м	1	1,5	2	2,5	1,5	2	2,5	1	2	1,5
h ₂ , м	4	5	6	6	5	7	5	4	6	5

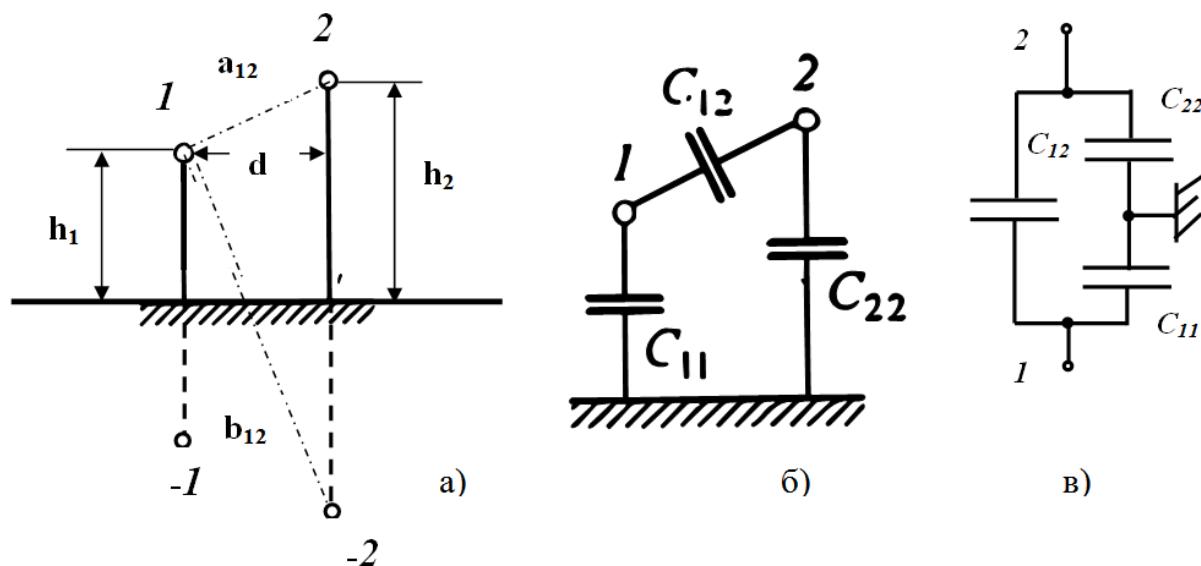


Рисунок 3.7: а) Схема расположения проводов 1 и 2, б) обозначения частичных емкостей между проводами 1 и 2, в) электрическая схема соединений емкостей

Указание.

При решении задачи используется метод зеркальных отображений и первая и вторая группы формул Максвелла.

Выразим потенциалы ϕ_1 и ϕ_2 согласно первой группе формул Максвелла:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12}, \quad \phi_2 = \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22} \\ \tau_1 &= \beta_{11} \phi_1 + \beta_{12} \phi_2, \quad \beta_{11} = \alpha_{22} / \Delta, \quad \beta_{12} = -\alpha_{12} / \Delta \\ \Delta &= \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{12}\end{aligned}$$

Емкость на единицу длины линии можно выразить:

$C = \tau / U_{12} = \pi \epsilon_0 \epsilon / \ln(d/r)$, для воздушной линии $\epsilon = 1$,
где d — расстояние между проводами,
 r — радиус провода.

Для определения емкостей выразим плотность заряда τ через потенциалы φ_1 и φ_2 и напряжение U_1 и U_{12} :

$$\tau_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}[\varphi_2 + (-\varphi_1 + \varphi_1)] = U_1(\beta_{11} + \beta_{12}) - \beta_{12}U_{12} = U_1C_{11} + U_{12}C_{12}$$

Частичные емкости (рис.3.7б):

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} = (\alpha_{22} - \alpha_{12})/\Delta, \text{Ф/м} \quad (3.19)$$

$$C_{22} = \beta_{22} + \beta_{12} = (\alpha_{11} - \alpha_{12})/\Delta, \text{Ф/м} \quad (3.20)$$

$$C_{12} = -\beta_{12} = \alpha_{12}/\Delta, \text{Ф/м},$$

Коэффициенты α_{11} , α_{22} , α_{12} определяются по формулам:

$$\alpha_{11} = (1/2\pi\epsilon_0\epsilon)*\ln(2h_1/r), \text{м/Ф}; \quad (3.21)$$

$$\alpha_{22} = (1/2\pi\epsilon_0\epsilon)*\ln(2h_2/r), \text{м/Ф}; \quad (3.22)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = (1/2\pi\epsilon_0\epsilon)*\ln(b_{12}/a_{12}), \text{м/Ф}; \quad (3.23)$$

Рабочая емкость между проводами (рис.3.7в):

$$C_P = C_{12} + (C_{11} * C_{22})/C_{11} + C_{22}, \text{Ф/м} \quad (3.24)$$

При решении задачи 3.2.4 используются значения, полученные при расчетах в задаче 3.2.3, так как рис. 3.7а полностью соответствует рис.3.6.

Пример расчета задачи 3.2.4

Исходные параметры:

$$h_1 = 3 \text{ м}; h_2 = 4 \text{ м}; d = 1 \text{ м}; r = 6 \text{ мм} = 6*10^{-3} \text{ м}$$

По данным, полученным в задаче 3.2.3 с теми же параметрами h_1 , h_2 , $d = c$, r принимаем значения коэффициентов:

$$\alpha_{11} = 12,4*10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{22} = 12,9*10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{12} = 2,9*10^{10} \text{ м/Ф}$$

$$\Delta = 151,5*10^{20};$$

$$\beta_{11} = \alpha_{22}/\Delta = 12,9*10^{10} / 151,5*10^{20} = 0,085*10^{-10} \text{ Ф/м};$$

$$\beta_{12} = -\alpha_{12}/\Delta = -2,9*10^{10} / 151,5*10^{20} = -0,019*10^{-10} \text{ Ф/м};$$

Частичные емкости равняются:

$$C_{11} = (\alpha_{22} - \alpha_{12})/\Delta = (12,9*10^{10} - 2,9*10^{10}) / 151,5*10^{20} = 0,659*10^{-11}, \text{Ф/м},$$

$$C_{22} = (\alpha_{11} - \alpha_{12})/\Delta = (12,4*10^{10} - 2,9*10^{10}) / 151,5*10^{20} = 0,626*10^{-11}, \text{Ф/м}$$

$$C_{12} = -\beta_{12} = \alpha_{12}/\Delta = 2,9*10^{10} / 151,5*10^{20} = 0,191*10^{-11}, \text{Ф/м}$$

Рабочая емкость между проводами равна

$$\begin{aligned} C_P &= C_{12} + (C_{11} * C_{22}) / (C_{11} + C_{22}) = \\ &= 0,191 * 10^{-11} + (0,659 * 10^{-11} * 0,626 * 10^{-11}) / (0,659 * 10^{-11} + 0,626 * 10^{-11}) = \\ &= (0,191 + 0,321) * 10^{-11} = 0,512 * 10^{-11}, \text{Ф/м} \end{aligned}$$

Задача 3.2.5.

Над поверхностью земли стоит грозовое облако (рис. 3.8). Напряженность электрического поля облака \bar{E} направлена к земле. Под облаком находятся провод А и защитный заземленный трос Т, расположенные над землей на высоте соответственно h_1 и h_2 . Диаметр троса d .

Значения параметров к задаче приведены в табл. 3.5 по вариантам

Таблица 3.5

Значения параметров

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	12	12	10	8	10	10	8	12	10	12
h ₁ , м	8	10	8	10	12	14	12	10	12	9
h ₂ , м	12	14	14	16	18	20	16	16	18	16

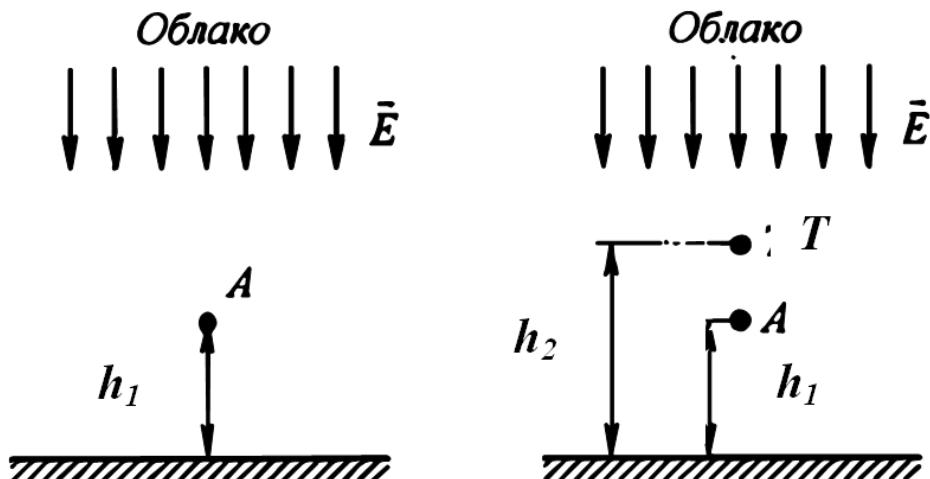


Рисунок 3.8 Схема расположения провода и троса

Требуется найти:

Изменение потенциала ϕ_A на проводе, расположенном на высоте h_1 (сечение провода - точка А, рис. 3.8) для двух случаев:

- без защитного троса — ϕ_{A1} ;
- при протяжке защитного заземленного троса диаметром d над проводом, на высоте h_2 (сечение троса — точка Т, рис.3.8) — ϕ_{A2} .

Указание.

При отсутствии троса потенциал провода ϕ_{A1} определяется равномерным полем плоского конденсатора «облако — земля» с напряженностью E :

$$\phi_{A1} = E * h_1 \quad (3.25)$$

При наличии троса на величину ϕ_A оказывается дополнительное влияние зарядом троса q_{TP} в точке Т:

$$\phi_{A2} = E * h_1 + q_{TP} * \alpha_{12},$$

Потенциал троса $\phi_{TP} = 0$.

При решении следует воспользоваться потенциальными коэффициентами Максвелла.

$$\phi_{TP} = E * h_{TP} + q_{TP} * \alpha_{11} = 0$$

Следовательно $q_{TP} = -(E * h_{TP}) / \alpha_{11}$;

Потенциал провода при наличии заземленного троса равен:

$$\phi_{A2} = E * h_1 + q_{TP} * \alpha_{12} = E * h_1 - (E * h_{TP}) / \alpha_{11} = E * [h_1 - h_{TP} * (\alpha_{12} / \alpha_{11})] \quad (3.26)$$

Изменение потенциала провода по отношению к потенциалу без троса равно:

$$\Delta\phi = (\phi_{A1} - \phi_{A2}) / \phi_{A1} = 1 - (\phi_{A1} - \phi_{TP}) / \phi_{A1} \quad (3.27)$$

Потенциальные коэффициенты:

$$\alpha_{12} = (1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon) * \ln [(h_1 + h_{TP}) / (h_{TP} - h_1)], \text{ м/Ф}; \quad (3.28)$$

$$\alpha_{11} = (1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon) * \ln [2 * h_{TP}] / r, \text{ м/Ф}; \quad (3.29)$$

Пример расчета задачи 3.2.5

Исходные параметры:

$$h_1 = 8 \text{ м}; h_2 = 10 \text{ м}; d = 10 \text{ мм}; r = d/2 * 10^{-3} \text{ м}.$$

Потенциал провода без заземленного троса равен:

$$\phi_{A1} = E * h_1 = 8E, \text{ В.}$$

Коэффициенты:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon) * \ln [2 * h_{TP}] / r = \alpha_{11} = (1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon) * \ln [2 * 10] / 5 * 10^{-3} = \\ &= (1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon) * 8,3, \text{ м/Ф}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= (1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon) * \ln [(h_1 + h_{TP}) / (h_{TP} - h_1)] = (1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon) * \ln [(8 + 10) / (10 - 8)] = \\ &= (1 / 2\pi \epsilon_0 \epsilon) * 2,08 \text{ м/Ф}; \end{aligned}$$

Отношение коэффициентов:

$$\alpha_{12} / \alpha_{11} = 2,08/8,3 = 0,251;$$

Потенциал провода при наличии заземленного троса равен:

$$\varphi_{A2} = E * [h_1 - h_{TP} * (\alpha_{12} / \alpha_{11})] = E * (8 - 10 * 0,251) = 5,49E, \text{ В}$$

Изменение потенциала провода:

$$\Delta\varphi = (\varphi_{A1} - \varphi_{A2}) / \varphi_{A1} = (\varphi_{A1} - \varphi_{TP}) / \varphi_{A1} = (8 - 5,49)E / 8E = 0,314$$

Задача 3.2.6.

Задано равномерное электростатическое поле в воздухе с напряженностью \bar{E}_0 . В поле помещен диэлектрический цилиндр с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , расположенный так, что ось цилиндра перпендикулярна вектору напряженности поля — рис.3.9.

Значения параметров \bar{E}_0 , ϵ_1 приведены в табл.3.6

Таблица 3.6

Значения параметров

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
κ (в виде $\epsilon_1 = \kappa \cdot \epsilon_B$),	4	5	6	7	8	9	3	4	5	6
\bar{E}_0 , кВ/м	12	14	11	15	16	10	13	17	18	17

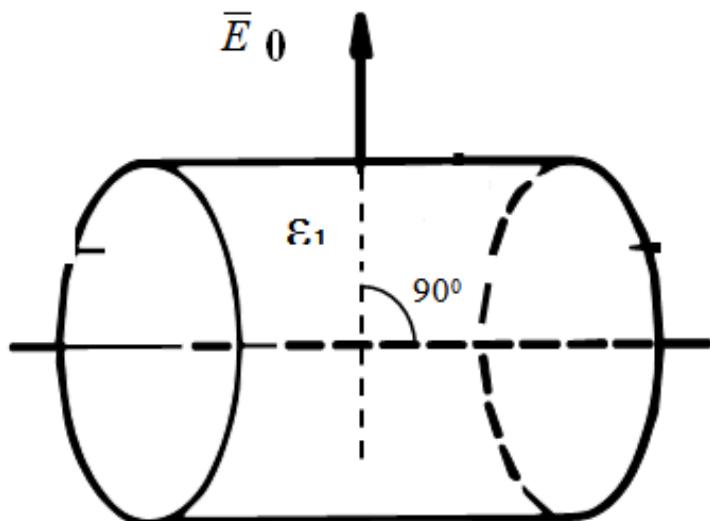


Рисунок 3.9 Электростатическое поле с внесенным диэлектрическим цилиндром

Требуется найти напряженность поля E_1 внутри цилиндра

Указание

Напряженность электростатического поля внутри цилиндра E_1 зависит от соотношения относительных диэлектрических проницаемостей воздуха ϵ_B и цилиндра ϵ_1 .

$$E_1 = \frac{2\epsilon_B}{\epsilon_B + \epsilon_1} E_0, \quad (3.30)$$

где $\epsilon_B = 1$

Пример расчета задачи 3.2.6

Исходные параметры: $E_0 = 10^3$ кВ/м, $\epsilon_1 = 4\epsilon_B$

$$E_1 = \frac{2\epsilon_B}{\epsilon_B + \epsilon_1} * E_0 = \frac{2 * 1}{4 + 1} * 10^3 = 400 \text{ кВ/м}$$

Задача 3.2.7.

Задано равномерное электростатическое поле в воздухе с напряженностью \bar{E}_0 . В поле внесен незаряженный металлический шар заданного радиуса — a (рис.3.10б).

За пределами шара задана точка А с координатами (в сферической системе координат) R, Θ — рис.3.10а.

Значения параметров \bar{E}_0 , a , R , Θ приведены в табл.3.7.

Таблица 3.7

Значения параметров

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a, \text{ см}$	1	2	3	4	2	3	4	2	5	6
$R, \text{ см}$	2	3	4	5	4	5	6	5	7	8
$\Theta, \text{ град.}$	30	40	45	60	50	35	55	65	30	35
$\bar{E}_0 * 10^3, \text{ кВ/м}$	10	12	14	10	12	14	15	13	10	12

Требуется найти:

Изменение составляющих напряженности поля E_R , E_Θ и результирующую напряженность поля E в точке А, вызванное влиянием незаряженного металлического шара.

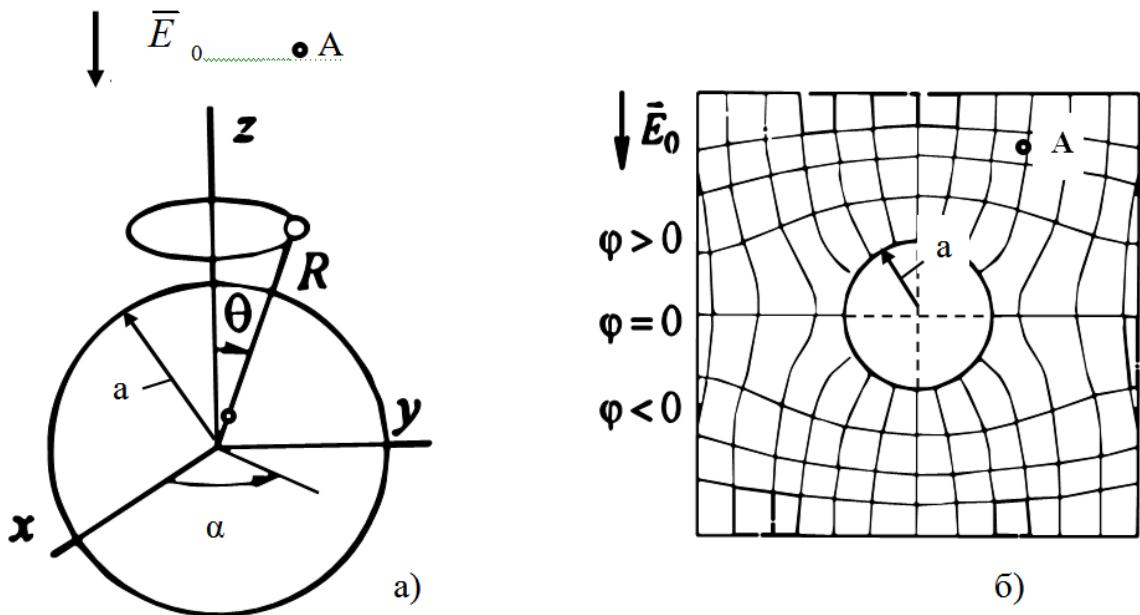


Рисунок 3.10 Электростатическое поле с внесенным металлическим незаряженным шаром: а) схема к данным в задаче; б) общий вид искажения картины поля из-за влияния шара

Указание.

При использовании сферических координат составляющие напряженности поля E_R , E_Θ равняются [4]:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = -E_0 * \cos\Theta * (1 + 2\frac{a^3}{R^3}) \quad (3.31)$$

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{R * \partial \Theta} = E_0 * \sin\Theta * (1 - \frac{a^3}{R^3}) \quad (3.32)$$

Результирующая напряженность поля в точке А по модулю равняется:

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\Theta^2} \quad (3.33)$$

Пример расчета задачи 3.2.7

Исходные параметры: $E_0 = 10^3$ кВ/м = 10^6 В/м, $a = 2$ см, $\Theta = 30^\circ$.

Величина E_R равняется:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = -E_0 * \cos\Theta * (1 + 2\frac{a^3}{R^3}) = -10^6 * \cos 30^\circ * (1 + 2\frac{1^3}{2^3}) = -1,08 * 10^6 \text{ В/м};$$

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{R * \partial \Theta} = E_0 * \sin\Theta * (1 - \frac{a^3}{R^3}) = 10^6 * \sin 30^\circ * (1 - \frac{1^3}{8^3}) = 0,44 * 10^6 \text{ В/м};$$

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\Theta^2} = E = \sqrt{(1,08 * 10^6)^2 + (0,44 * 10^6)^2} = 1,17 * 10^6 \text{ В/м}$$

Задача 3.2.8.

Заданы два провода расположенные параллельно на длине dL , на расстоянии a друг от друга.

По первому проводу течет ток I_1 , по второму — ток I_2 .

Расположение проводов показано на рис.3.11.

Значения параметров dL , a , I_1 , I_2 приведены в табл.3.8 по вариантам

Таблица 3.8

Значения параметров

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$dL, \text{ м}$	1	2	0,8	2,2	3	2,4	1,5	1,2	1,6	2,5
$a, \text{ м}$	0,05	0,1	0,06	0,12	0,25	0,2	0,1	0,04	0,05	0,25
$I_1, \text{ А}$	1000	2000	2400	3000	3000	2600	1800	1400	900	2500
$I_2, \text{ А}$	500	800	400	1500	1200	1100	900	750	400	2250

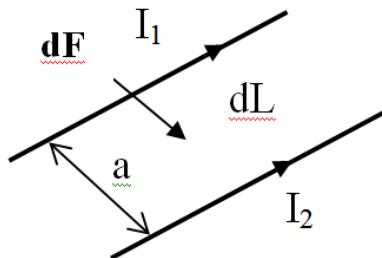


Рисунок 3.11 Схема расположения проводов

Требуется определить: силу dF_{1-2} , действующую на участок dL первого провода со стороны второго провода.

Указание

Сила dF определяется формулой [4]:

$$dF_{1-2} = I_2 * dL * B_1, \quad (3.34)$$

Величина магнитной индукции B_1 :

$$B_1 = \mu_0 * H_1 \quad (3.35)$$

Напряженность магнитного поля H_1 :

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi a} \quad (3.36)$$

Пример расчета задачи 3.2.8

Исходные параметры: $I_1 = 1000 \text{ A}$, $I_2 = 500 \text{ A}$, $a = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$, $dL = 1 \text{ м}$

$$dF_{1-2} = I_2 * dL * \mu_0 * \frac{I_1}{2\pi a} = \frac{500 * 1 * 1,256 * 10^{-6} * 1000}{2 * 3,14 * 0,1} \cong 1 \text{ H}$$

Задача 3.2.9.

Задан изолированный кабель. Изоляция между жилой и поверхностью оболочки кабеля (рис.3.12) имеет удельную проводимость γ (См /м). Известны радиус жилы кабеля r_1 , радиус поверхности оболочки r_2 , длина кабеля L . Напряжение кабеля U .

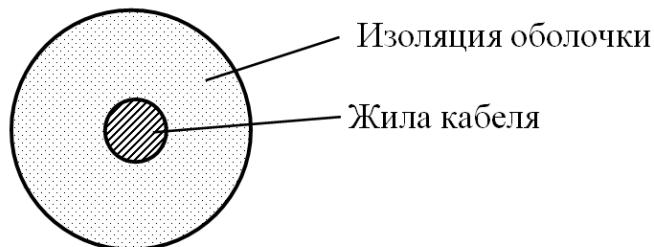


Рисунок 3.12 Разрез кабеля с указанием жилы и оболочки

Значения параметров γ , r_1 , r_2 , L приведены в табл.3.9. по вариантам.

Таблица 3.9

Значения параметров

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Радиус жилы r_1 , мм	20	25	30	35	25	35	40	25	20	30
Радиус оболочки r_2 / r_1	2,3	4,6	6,9	9,2	2,3	4,6	6,9	9,2	6,9	2,3
Длина кабеля L , км	5	6	7	8	10	12	14	10	5	8
Проводимость $\gamma * 10^{-n}$, См /м	-5	-6	-8	-9	-6	-5	-7	-8	-7	-6
Напряжение, кВ	10	12	14	15	20	15	10	14	15	25

Требуется определить: ток утечки I в коаксиальном кабеле между жилой и поверхностью на длине L

Указание. Полная проводимость изоляции кабеля G на длине L равняется [4]

$$G = \frac{2\pi\gamma * L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (3.37)$$

Ток утечки по изоляции кабеля на длине L

$$I = G * U \quad (3.38)$$

Пример расчета задачи 3.2.9

Исходные параметры: $\gamma = 10^{-8}$ См/м, $r_2 = 2,3r_1$, $U = 10$ кВ = 10^4 В, $L = 1$ км = 10^3 м

$$I = G * U \quad G = \frac{2\pi\gamma * L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} * U = \frac{2 * 3,14 * 10^{-8} * 10^3}{\ln \frac{2,3r_1}{r_1}} * 10^4 = 0,628 \text{ А/м}$$

Задача 3.2.10.

Задано, что в воду (- в морскую воду; - в речную воду), погружены две трубы, известны - диаметр труб d, расстояние между трубами L, глубина погружения труб h и удельная проводимость для каждой воды γ , См /м

Схема задачи приведена на рис.3.13.

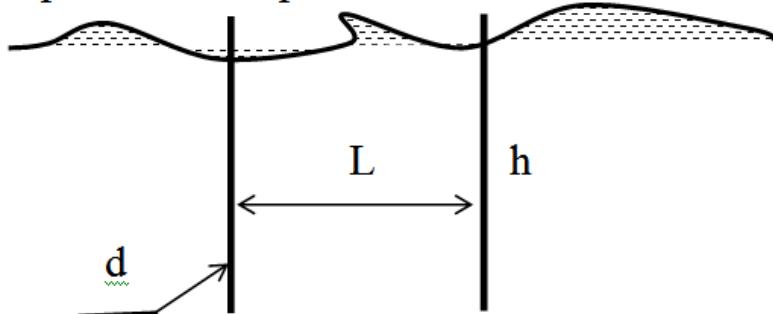


Рисунок 3.13. Схема расположения двух труб в воде

Значения параметров d , L , h , γ_M , γ_P приведены в табл.3.10 по вариантам

Требуется определить: проводимость G между двумя трубами, опущенными в каждую воду на заданную глубину .

Указание. Пространство между трубами заполнено проводящей средой (водой), которая обладает удельной проводимостью γ . Полная проводимость среды между трубами G на заданной глубине зависит

от глубины погружения труб, их диаметра и удельной проводимости и может быть найдена по формуле

$$G = \frac{2\pi * \gamma * h}{\ln\left(\frac{L}{r}\right)} \quad (3.39)$$

Таблица 3.10

Значения параметров

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Диаметр труб d, мм	50	60	50	60	50	40	50	70	40	60
Расстояние L, м	25	20	30	20	25	30	20	25	25	30
Глубина h, м	3	4	5	3	4	5	3	4	3	2
Проводимость морской воды γ_M , См / м 10^{-n}	-1	-1,5	-1	-1,5	-1	-1,6	-	-1	-1,8	-1,5
Проводимость речной воды γ_P , См / м $.10^{-n}$	-2	-2,5	-2,8	-2,7	-2	-2,5	-2,7	-2,3	-2,4	-2,7

При расчете надо определить радиус трубы r и выразить его в метрах,

$$r = d/2 * 10^{-3} \text{ м.}$$

Пример расчета задачи 3.2.10.

Исходные параметры: $d = 50$ мм, $L = 25$ м, $h = 3$ м, $\gamma_M = 0,1$ См/м

$$r = d/2 * 10^{-3} = 50 / 2 * 10^{-3} = 0,025 \text{ м.}$$

$$G = \frac{2\pi * \gamma * h}{\ln\left(\frac{L}{r}\right)} = G = \frac{2 * 3,14 * 0,1 * 3}{\ln\left(\frac{25}{0,025}\right)} = 0,13 \text{ См}$$

Задача 3.2.11.

Задана металлическая труба с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 . По трубе протекает постоянный ток I .

Разрез трубы приведен на рис.3.14

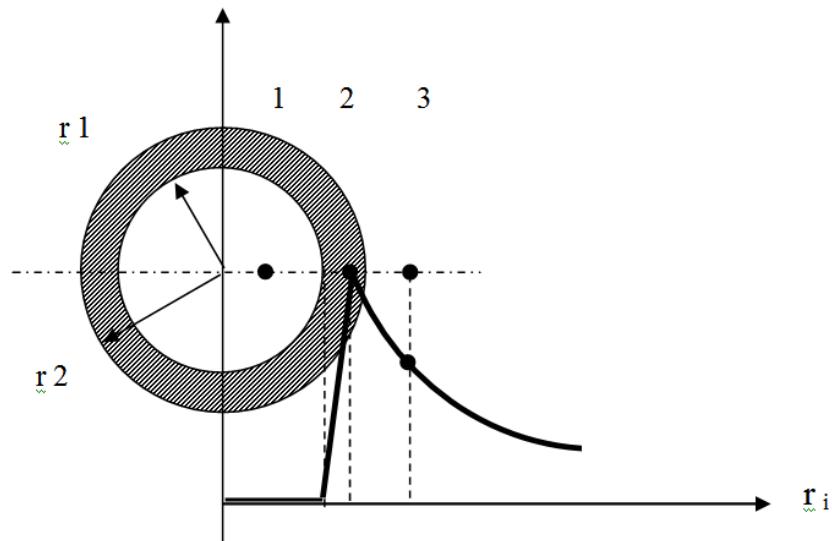


Рисунок 3.14 Разрез металлической трубы

Значения параметров r_1 , r_2 , r_{1i} , r_{2i} , r_{3i} , I , приведены в табл.3.11.

Таблица 3.11

Значения параметров

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Радиус r_1 , см	20	25	30	35	25	35	40	25	20	30
Радиус r_2 , см	25	30	35	40	30	40	45	30	25	35
Расстояние точки 1- r_{1i} см	18	21	28	33	22	32	38	23	17	27
Расстояние точки 2 - r_{2i} см	23	28	33	38	27	37	43	29	24	32
Расстояние точки 3 - r_{3i} см	28	35	40	45	34	44	48	39	30	39
Сила тока I , А	200	250	300	350	400	450	600	650	500	550

Требуется определить:

- напряженность магнитного поля H внутри трубы ($r_{1i} < r_1$) точка 1 ; - в теле трубы ($r_1 < r_{2i} < r_2$), точка 2;
- снаружи трубы ($r_{3i} > r_2$) точка 3 на заданных расстояниях положения точек r_{1i} , r_{2i} , r_{3i} .

Построить график изменения напряженности H в функции радиуса точки

Указание. Напряженность магнитного поля в любой из точек для областей внутри трубы, в теле трубы и снаружи трубы определяется по закону полного тока [4].

Если провести окружность радиусом ($r_{1i} < r_1$), то эта окружность не охватывает ток. Следовательно, напряженность поля внутри трубы в точке 1 - $H_1 = 0$, магнитное поле отсутствует.

Плотность тока внутри трубы δ равняется

$$\delta = \frac{I}{[\pi(r_2^2 - r_1^2)]} \quad (3.40)$$

Окружность радиусом ($r_1 < r_{2i} < r_2$) охватывает ток, равный

$$I = \delta * \pi(r_{2i} - r_1) \quad (3.41)$$

В этом интервале изменения r_{2i} напряженность магнитного поля H_2 в точке 2 равняется

$$H_2 = \frac{I * (r_{2i}^2 - r_1^2)}{2 * \pi * r_{2i} (r_2^2 - r_1^2)} \quad (3.42)$$

Снаружи трубы при ($r_{3i} > r_2$) напряженность магнитного поля H_3 в точке 3 равняется

$$H_3 = \frac{I}{2 * \pi * r_{3i}} \quad (3.43)$$

На рис.3.14 качественно построен график зависимости $H = f(r)$.

Пример расчета задачи 3.2.9

Исходные параметры:

$r_1 = 20$ см, $r_2 = 25$ см, $r_{1i} = 18$ см, $r_{2i} = 23$ см, $r_{3i} = 28$ см, $I = 200$ А; $H_1 = 0$;

$$H_2 = \frac{I * (r_{2i}^2 - r_1^2)}{2 * \pi * r_{2i} (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{200 * (23^2 - 18^2)}{2 * 3,14 * 23 * (25^2 - 20^2)} = 1,26 \text{ А/см};$$

$$H_3 = \frac{I}{2 * \pi * r_{3i}} = \frac{200}{2 * 3,14 * 28} = 1,14 \text{ А/см}$$

Задача 3.2.12.

Задано, что к земле с помощью заземлителя подведен ток I , который стекает в землю - рис.3.15.; удельная проводимость земли $\gamma = 10^{-2}$ См/м.

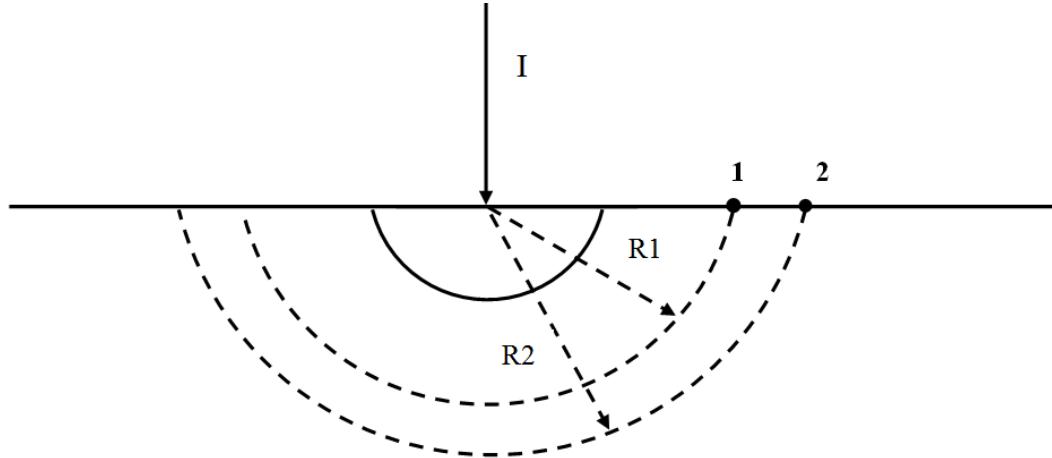


Рисунок 3.15 Разрез сферы растекания тока от заземлителя

Значения параметров R_1 , R_2 , I приведены в табл.3.12 по вариантам.

Таблица 3.12

Значения параметров

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Радиус R_1 , м	20	21	22	23	25	26	27	24	29	28
Радиус R_2 , м	21	22	23	24	26	27	28	25	30	29
Сила тока $I \cdot 10^3$, А	1	1,2	1,4	1,5	2,0	1,6	1,7	1,3	1,8	1,05

Требуется найти: напряжение между двумя точками 1 и 2 на поверхности земли, для которых радиусы полусферы растекания тока равны R_1 и R_2 .

Указание. Рассмотрим поверхность полусферы в земле, по которой растекается ток. Поверхность полусферы равна $2\pi R^2$. Плотность тока в пределах поверхности полусферы равна:

$$\delta = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \quad (3.44)$$

Напряженность электрического поля E составит:

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{(2 * \pi * \gamma * R^2)} \quad (3.45)$$

Напряжение между двумя точками на поверхности земли — 1 и 2 будет равно

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} EdR = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = -\frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.46)$$

Пример расчета задачи 3.2.11

Исходные параметры: $R_1 = 25 \text{ м}$, $R_2 = 26 \text{ м}$, $I = 2000 \text{ А}$, $\gamma = 10^{-2} \text{ См/м}$

$$U_{12} = \frac{I}{2 * \pi * \gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2000}{2 * 3,14 * 0,01} \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{26} \right) = 47,7 \text{ В}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. 5-е изд. Т.1 — СПб.: Питер, 2009. — 512 с.
 2. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. 5-е изд. Т.2 — СПб.: Питер, 2009. — 432 с.
 3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. — М.: Юрайт, 2012. — 701 с.
 4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник. — 10-е изд., стереотипное. — М.: Гардарики, 2003. — 317 с.: ил.
-

**Учебное пособие
по расчётной и контрольной работе
«Расчёт параметров электрических цепей»
по дисциплине «Теоретические основы электротехники, часть 1, 2, 3»
для студентов дневного и заочного отделения по направлению
подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»**

Авторы-составители:
Бекиров Э. А., Асанов М. М., Муртазаев Э. Р., Сокут Л. Д.

Рецензенты:
Зайцев О. Н., Николенко И. В.

Подписано в печать 16.06.2015.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 6,98. Тираж 50 экз.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТИПОГРАФИЯ «АРИАЛ».
295034, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Севастопольская, 31-а/2,
тел.: +7 978 71 72 901, e-mail: it.arial@yandex.ru, www.arial.3652.ru

Отпечатано с оригинал-макета в типографии ООО «ИТ «АРИАЛ»
295053, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Оленчука, 63,
тел. +7 978 71 72 902, e-mail: braznikov@mail.ru