

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского»

Таврическая академия (структурное подразделение)

Факультет математики и информатики

Кафедра дифференциальных уравнений и геометрии

Ю. А. Хазова

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ
ЧАСТЬ 2. ТЕОРИЯ ХАОСА**

Учебно-методическое пособие

для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 Математика

Симферополь
2019

УДК 517.925

ББК 22.161.6

Хазова Ю. А.

«Элементы теории бифуркаций. Часть 2. Теория хаоса»: учебно-методическое пособие / Ю. А. Хазова – ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского». — Симферополь, 2019. — 54 с.

Рекомендовано к печати учебно-методическим советом Таврической академии (структурное подразделение) от «19» 09 2019 г., протокол № 3.

Рекомендовано к печати учебно-методическим советом Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского от «15» 10 2019 г., протокол № 9.

Рецензенты:

Рудницкий О.И., доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (Структурное подразделение) ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского»;

Москалева Ю.П., доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики факультета экономики, менеджмента и информационных технологий ГБОУВО РК «Крымский инженерно-педагогический университет».

Учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика. Пособие включает изучение методов и приемов решения задач по теории хаоса, помогает определять условия перехода к детерминированному хаосу, строить и классифицировать странные аттракторы, а также анализировать масштабно-инвариантные случайные процессы и фрактальные временные ряды.

© Хазова Ю.А.

© ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского», 2019

Оглавление

Введение.....	4
1. Динамические системы в пространстве.....	5
2. Исследование системы Лоренца.....	13
3. Качественные критерии хаоса	19
4. Количественные критерии хаоса	24
5. Масштабно-инвариантные случайные процессы	32
6. Анализ фрактальных временных рядов	38
Вопросы для самоконтроля.....	47
Заключение	52
Список литературы	53

Введение

Нелинейные свойства динамической системы по-разному проявляются при изменении ее управляющих параметров. Но, как правило, с ростом влияния нелинейности происходит усложнение динамического режима. Простые аттракторы в фазовом пространстве диссипативной системы сменяются более сложными. При определенных условиях нелинейность приводит к возникновению динамического хаоса. Движение в пространстве параметров вдоль соответствующего направления позволяет наблюдать последовательность бифуркаций, в результате которой формируется хаотичный аттрактор. Такие типичные бифуркационные последовательности объединяются понятием бифуркационных механизмов или сценариев развития хаоса. В 70-х годах впервые ввели понятие странного аттрактора как математического образа хаоса в детерминированной системе. При этом было показано, что странный аттрактор может возникать в системах даже с небольшой размерностью фазового пространства ($n \geq 3$).

К настоящему времени открыты и исследованы три типичных бифуркационных сценария развития хаоса в диссипативных системах, реализуемые уже в трехмерном фазовом пространстве. Причем каждый из них обладает свойством универсальности, то есть некоторыми общими закономерностями, не зависящими от конкретного вида оператора эволюции.

1. Динамические системы в пространстве

Выход с фазовой плоскости в пространство большей размерности приводит к принципиальным качественным изменениям. Значительно увеличивается число возможных бифуркаций состояний равновесия и предельных циклов. Возникают новые типы аттракторов – двумерные и многомерные торы, соответствующие квазипериодическим режимам, странные хаотические аттракторы, служащие образцом динамического хаоса.

Понятие детерминированного хаоса

В данном пункте будем рассматривать такое уникальное явление как детерминированный (низкоразмерный, динамический) хаос. Начнем с того, что рассмотрим основные понятия, связанные с динамическими системами в пространстве.

Будем изучать автономную динамическую систему первого порядка в трехмерном пространстве

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z), \\ \dot{y} = g(x, y, z), \\ \dot{z} = h(x, y, z). \end{cases} \quad (1)$$

где f, g, h – нелинейные функции.

Под фазовой траекторией динамической системы в пространстве понимается некоторая линия в системе координат $Oxyz$ с заданным начальным условием $\chi = (x_0, y_0, z_0)$. Семейство фазовых траекторий, которое формируется различными начальными условиями, образует фазовый портрет системы.

Некоторые нелинейные динамические системы характеризуются хаотическим поведением. Далее мы выясним, какими особенностями должны обладать системы, чтобы возник хаос. Под хаотическим поведением в детерминированных системах понимается следующее (см. рис. 1).

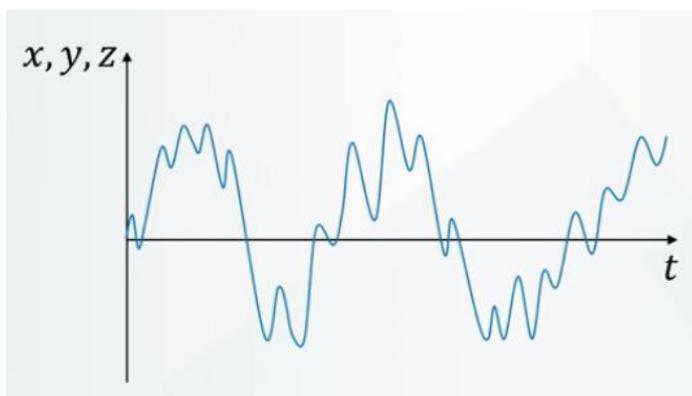


Рис. 1. Интегральные траектории системы (1).

Система является детерминированной, если в ее правой части отсутствуют шумы, случайные величины, то есть все определено и однозначно. Казалось бы, и решение должно быть также определено и понятно, в каком-то смысле предсказуемым. Но возникают вот такие неопределенные и непрогнозируемые решения (рис. 1).

Хаотическое поведение не является следствием:

- внешних источников шума;
- бесконечного количества степеней свободы (то есть достаточно даже трехмерной системы, чтобы получить хаотическое поведение).

Построим теперь несколько интегральных траекторий системы (1) при различных, достаточно близких, начальных условиях (см. рис. 2). Как видно из рисунка, существует одна особенность: если начальные условия интегральных траекторий близки друг к другу, то до определенного момента времени t_0 они практически совпадают. И начиная с момента времени t_0 эти траектории разбегаются. Малые изменения начального условия приводят к абсолютно непредсказуемым «катастрофическим» последствиям.

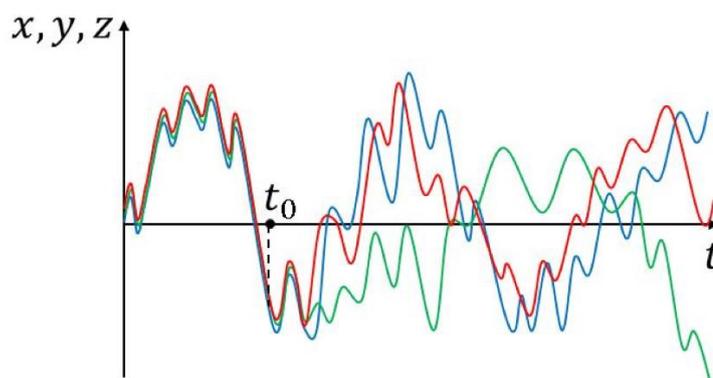


Рис. 2. Интегральные траектории динамической системы, соответствующие незначительно измененным начальным условиям.

Впервые на подобное поведение систем обратил внимание метеоролог Эдвард Н. Лоренц. Одна из известнейших его лекций «Может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии вызвать торнадо в Техасе?» в свое время вызвала колоссальный резонанс в научном обществе. И ответом на этот вопрос является: «Да, действительно может».

Хаотическое поведение означает:

- неустойчивость фазовых траекторий;
- рост малого начального возмущения;
- непредсказуемость поведения системы на больших временах.

Осталось только ответить на вопрос: для каких динамических систем характерно хаотическое поведение? Первый случай — нелинейные автономные динамические системы первого порядка с числом степеней свободы $n \geq 3$. Второй случай — нелинейные неавтономные динамические системы первого порядка с числом

степеней свободы $n \geq 2$. Третий случай – дискретные отображения и четвертый случай – динамические системы с запаздыванием.

Хаос в простейших моделях динамических систем

В этом пункте мы рассмотрим пример конкретной физической системы, в которой проявляется хаос. Наиболее простая, даже хрестоматийная система, которую можно встретить в большинстве учебников и монографий по теории хаоса, это модель водяного колеса. Наша задача состоит не в том, чтобы математически описать модель, а в том, чтобы понять, хотя бы интуитивно, каким образом и за счет чего возникает хаотический режим.

На рисунке 3 изображена модель водяного колеса. Точкой обозначен центр колеса, сплошной линией обозначаем обод колеса, на котором закреплены ведерки-дуршлага с отверстиями. Облачком показан источник воды, который подает воду с разной интенсивностью и скоростью.

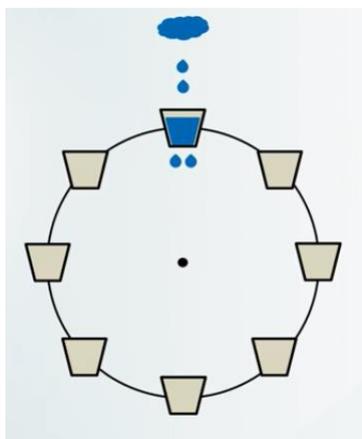


Рис. 3. Модель водяного колеса.

В первом случае рассмотрим ситуацию, когда вода подается с минимальным напором. Она наполняет верхнее ведерко, из которого также вытекает вода. Причем здесь полный баланс: сколько воды поступает – столько же и вытекает. Такая система находится в состоянии покоя и колесо не вращается. Даже если мы специально покрутим обод колеса, ведерко с водой снова окажется в верхнем положении.

А теперь усилим интенсивность подачи воды и сместим обод в какую-либо сторону. Тогда наблюдается равномерное вращение колеса. Равномерно в смысле постоянной скорости. Обозначим угол отклонения ведерка от состояния равновесия через φ . То этот угол будет изменяться гармонически с течением времени. Если бы отсутствовали какие-либо диссипации (потеря воды, трение оси и т.д.), то эти гармонические колебания (вращение колеса) происходили бы бесконечно.

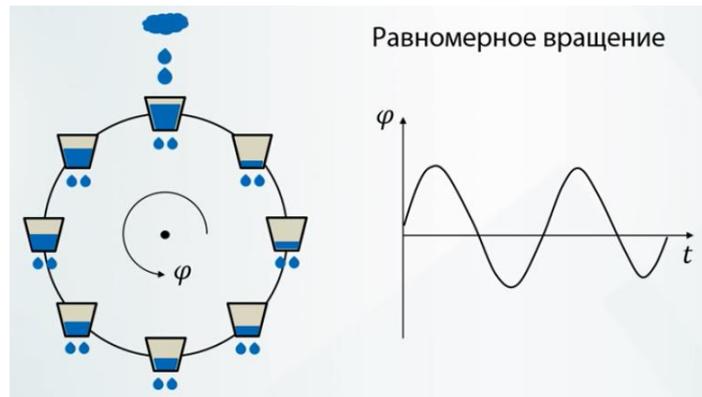


Рис. 4. Равномерное вращение колеса.

Но самый интересный случай происходит, когда еще больше увеличен поток воды. Это может привести к хаотическому вращению, то есть при быстром вращении колеса ведрам не хватает времени, чтобы наполниться. Они могут начать двигаться в обратную сторону, не наполнившись водой.

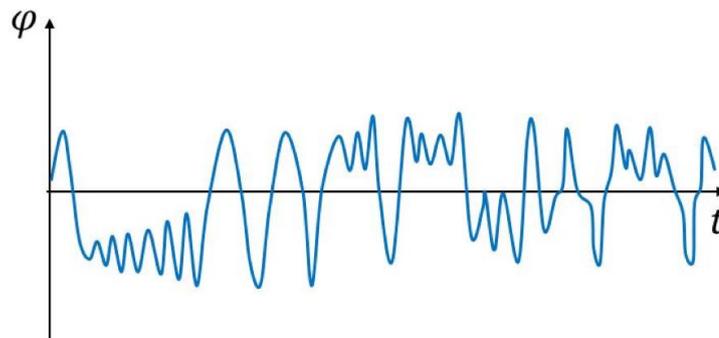


Рис. 5. Хаотическое вращение.

Участки процесса, отвечающие осцилляциям (колебаниям) в области $\varphi > 0$, отвечают вращению колеса в одну сторону, участки $\varphi < 0$ – в другую. Число вращений меняется хаотически. Посмотреть на реально действующую систему можно, например, на этом видео: <https://www.youtube.com/watch?v=Gu5OaIrmzNA>

Системы и процессы, описываемые уравнениями Лоренца

Рассмотрим математическую модель уравнений Лоренца, которая описывает многообразие хаотических изменений. Система Лоренца в определенном смысле универсальна

$$\begin{cases} x = \sigma(y - x), \\ y = rx - y - xz, \\ z = -bz + xy, \end{cases} \quad (2)$$

где σ, b, r – действительные положительные числа (параметры).

Для начала посмотрим, что вообще дает система Лоренца с точки зрения интегральных и фазовых траекторий. На рис. 6 показан вычислительный эксперимент и отображены траектории при фиксированных параметрах. Черными точками отмечены стационарные

точки системы, которые могут быть как аттракторами, так и репеллерами. Фазовый портрет системы, изображенный на рис. 6, называют «странным» аттрактором.

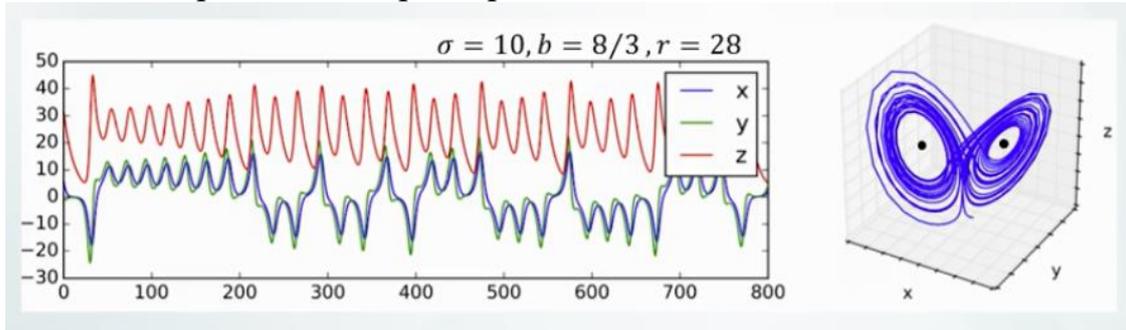


Рис. 6. Интегральные и фазовая траектории системы Лоренца.

Особенность системы Лоренца заключается в том, что аналитический анализ предсказывает одно, а вот вычислительный эксперимент показывает совершенно другое.

Перечислим теперь системы и процессы, для которых уравнения

$$\text{Лоренца} \begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \text{ являются простейшей моделью.}$$

1. *Конвекция в плоском слое жидкости.* Задан срез слоя жидкости, в котором создается разность температур между нижним и верхним слоями. При определенных значениях температур возникает так называемая конвекция, то есть перемещение жидкости (нагретая жидкость поднимается вверх, а холодная – опускается вниз).

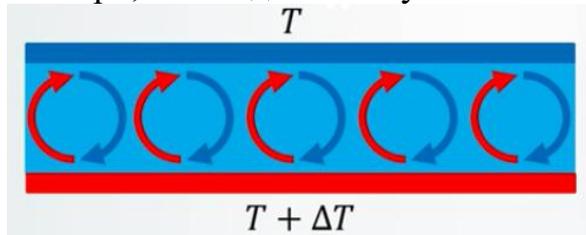


Рис. 7. Схема конвекции в плоском слое жидкости.

Тогда в системе Лоренца $x = x(t)$ – скорость вращения конвекционных валов, $y = y(t)$ – распределение температуры по горизонтали, $z = z(t)$ – распределение температуры по вертикали.

2. *Конвекция в кольцевой трубке.* Возьмем полый обруч, заполним его водой. Далее нагреваем жидкость, в результате чего происходит конвекция.

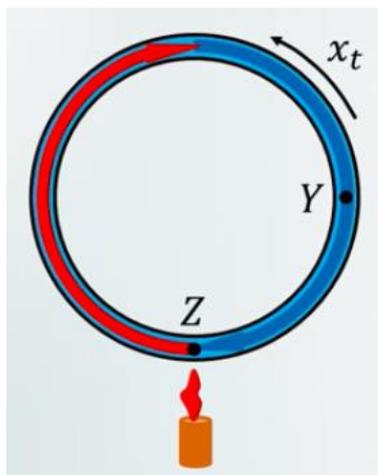


Рис. 8. Схема конвекции в кольцевой трубке.

Здесь динамическими переменными будут $x = x(t)$ – скорость течения жидкости, $y = y(t)$ – отклонение температуры от среднего значения в точке Y , $z = z(t)$ – отклонение температуры от среднего значения в точке Z .

3. *Одномодовый лазер.* Конструкция лазера, в простейшем варианте следующая: дана активная среда лазера (на рисунке это голубой цилиндр), далее накачиваем лазер энергией, чтобы перевести большую часть атомов активной среды в возбужденное состояние, дальше происходит спонтанный переход одного из атомов, в результате чего излучается фотон и формируется лазерный луч E .

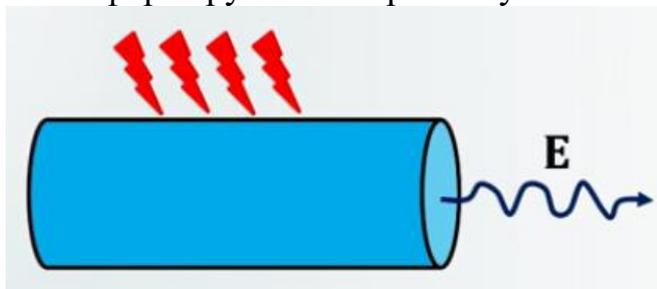


Рис. 9. Схема одномодового лазера.

Динамические переменные характеризуют $x = x(t)$ – амплитуда колебаний электрического поля, $y = y(t)$ – поляризация активной среды, $z = z(t)$ – мгновенная разность населённостей уровней.

4. *Фондовый рынок.* Оказывается, что некоторые феномены фондового рынка действительно можно описать системой Лоренца: $x = x(t)$ – цена спроса на актив, $y = y(t)$ – цена предложения на актив, $z = z(t)$ – внешний поток информации.

5. *Социальная сеть:* $x = x(t)$ – коррелятор информации, $y = y(t)$ – количество информации в сети, $z = z(t)$ – количество стратегически ориентированных пользователей сети.

Таким образом, видно, что система Лоренца универсальна в описании различных процессов (экономических, экологических, метеорологических, биологических, химических и многих других), в которых возможно появление хаотических изменений.

Свойства системы уравнений Лоренца

Свойства системы Лоренца можно получить аналитически, не проводя вычислительный эксперимент. Эти свойства нам понадобятся в дальнейшем для решения прикладных задач, описываемых системой Лоренца.

Первое свойство – *однородность*. Это свойство вам известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений. Оно заключается в следующем: правые части уравнений системы не содержат свободных членов. Это приводит к тому, что в независимости от значений параметров σ, b, r всегда существует нулевая стационарная точка.

Второе свойство – *симметрия*. Это свойство заключается в инвариантности уравнений Лоренца относительно преобразования переменных $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$:

$$\begin{cases} x = \sigma(y - x) \\ y = rx - y - xz \\ z = -bz + xy \end{cases} \xrightarrow{x \rightarrow -x, y \rightarrow -y} \begin{cases} x = \sigma(y - x) \\ y = rx - y - xz \\ z = -bz + xy \end{cases}$$

В этом не сложно убедиться, подставив в систему вместо x выражение $-x$, а вместо y выражение $-y$. Такое поведение системы в дальнейшем отразится на структуре аттрактора.

Третье свойство – *ограниченность области локализации аттрактора*. Сейчас речь идет о любом аттракторе системы Лоренца, а не только о его странном аттракторе. Данное свойство значит, что в фазовом пространстве системы Лоренца можно указать такую ограниченную замкнутую область, в которую фазовые траектории могут только входить и никогда ее не покидать. Давайте посмотрим, как это описывается математически. Первое, что мы сделаем – преобразуем систему (2) при помощи замены вида $w = r - z$

$$\begin{cases} x = \sigma(y - x), \\ y = -y - xw, \\ z = -bw + br - xy. \end{cases}$$

Далее первое уравнение преобразованной системы умножим на x/σ , второе на y , в третье – на w с сложим полученные дифференциальные уравнения. В результате получим следующее выражение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x^2 / \sigma + y^2 + w^2}{2} \right) = - \left(x - \frac{1}{2} y \right)^2 - \frac{3}{4} y^2 - b \left(w - \frac{r}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} br^2.$$

Здесь пропущены некоторые промежуточные выкладки, которые вы можете совершить самостоятельно в качестве упражнения.

Теперь выделим некоторую область

$$E: - \left(x - \frac{1}{2} y \right)^2 - \frac{3}{4} y^2 - b \left(w - \frac{r}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} br^2 \geq 0, \quad \text{ограниченную}$$

поверхностью некоторого эллипсоида. Формируем эллипсоид

$S: x^2 / \sigma + y^2 + w^2 = const$, целиком заключающий в себе область E при

больших σ . На поверхности эллипсоида S производная

$\frac{d}{dt} (x^2 / \sigma + y^2 + w^2) < 0$ (вне области E правая часть отрицательна). И

таким образом, величина $x^2 / \sigma + y^2 + w^2$ убывает со временем. А это в свою очередь показывает, что все траектории пересекающие поверхность S , ведут только внутрь ограниченной ею области. Значит, любой аттрактор обязан располагаться внутри S .

Четвертое свойство связано с *диссипативностью*. Но прежде чем определим, в чем выражается диссипативность системы, разберем само понятие.

Диссипативные и консервативные системы

Все примеры и модельные системы, которые мы с вами разбирали ранее – это диссипативные системы, то есть системы с потерей. Вообще говоря все системы, в том числе и динамические, можно разбить на два класса: консервативные и диссипативные. В частном случае, например в физике, для консервативной системы характерно в сохранение энергии (идеальный математический маятник), а диссипативной – в уменьшении энергии со временем (маятник, помещенный в жидкость).

Дадим более общее определение для теории динамических систем. Рассмотрим фазовый портрет некоторой динамической системы. Изображающие точки изменяются со временем согласно с некоторым законом эволюции. И в какой-то момент времени сформировалась область, заполненная этими точками. Обозначим объем облака изображающих точек через $V = V(t)$. Введя понятие облака изображающих точек и его объема мы можем прийти к разделению систем на консервативные и диссипативные. А именно, для консервативных систем объем облака остается постоянным. То есть в один момент времени мы сформировали облако из изображающих точек, затем в другой момент времени – геометрия облака поменялась, а вот количество точек в облаке осталось таким же. Для диссипативной системы со временем облако концентрируется на одном или нескольких

аттракторах. В начальный момент времени сформировалось облако некоторого объема, а затем через какое-то время появилась фазовая траектория, объем которой равен нулю.

Рассмотрев отличия между понятиями, формализуем диссипативность для системы Лоренца. Введем математический критерий, позволяющий определить класс системы (диссипативна она или консервативна). Для начала опишем векторное поле системы: $L(x, y, z) = \{\sigma(y-x), rx-y-xz, -bz+xy\}$ – поле скоростей. Далее надо рассчитать дивергенцию поля скоростей

$divL = \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} = -\sigma - 1 - b$. Все параметры системы Лоренца – положительные числа, следовательно, это выражение является отрицательной величиной.

Если параметры σ и b положительны, то дивергенция постоянна и отрицательна, значит, система диссипативна. Это, по сути, и есть нужный критерий для определения диссипативности системы. Посмотрим с точки зрения сути явления диссипативности. Пусть V_0 – объем облака в начальный момент времени. Тогда объем изображающих точек в любой другой момент времени это есть $V = V_0 \exp[-(\sigma+1+b)t]$. Видно, что функция V асимптотически стремится к V_0 со временем $t \rightarrow \infty$. Следовательно, с течением времени все изображающие точки должны сконцентрироваться на некотором множестве нулевого объема – аттракторе.

2. Исследование системы Лоренца

Стационарные точки уравнений Лоренца

Найдем стационарные точки системы (2) по определению. Для этого приравняем производные, то есть правые части уравнений системы к нулю

$$\{\sigma(y-x) = 0, rx-y-xz = 0, -bz+xy = 0\}.$$

Решим полученную систему из трех алгебраических уравнений. Сразу, что видно, первое уравнение дает $y = x$. Далее второе уравнение преобразуется в выражение $x(r-1-z) = 0$. Здесь возможны два случая: $x = 0$ и $z = r-1$. Таким образом, первая стационарная точка имеет координаты $\{x=0, y=0, z=0\}$. А второй случай нам дает две стационарные точки вида $\{x = \pm\sqrt{b(r-1)}, y = \pm\sqrt{b(r-1)}, z = r-1\}$. Делаем вывод, что система (2) имеет три особые точки:

$$E_1\left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1\right), \quad E_2\left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1\right) \quad \text{и}$$

$$O(0,0,0).$$

Дадим теперь интерпретацию полученным результатам на примере водяного колеса. Возьмем ось параметра r , в качестве граничной точки, выберем значение $r=1$ (в каком-то смысле критическое значение). Если $r < 1$, то система Лоренца имеет единственную стационарную точку $O(0,0,0)$. В рамках модели водяного колеса это говорит нам о том, что колесо неподвижно. Физически r можно рассматривать как интенсивность напора падающей воды. Увеличиваем теперь значение параметра r и проходим через единицу ($r > 1$). Появляются еще две точки E_1 и E_2 . То есть, как только увеличивается интенсивность напора, водяное колесо начинает вращаться то в одну, то в другую сторону.

Критерий Рауса-Гурвица

Найдя значения стационарных точек, хочется теперь определиться с их устойчивостью. Для этого воспользуемся критерием Рауса-Гурвица. Но сначала разберем сам критерий. Возьмем линеаризованную автономную динамическую систему первого порядка, записанную в матричной форме

$$\dot{X} = JX,$$

где J – якобиан системы.

Формируем теперь характеристическое уравнение системы

$$\text{Det}(J - \lambda I) = 0.$$

В общем случае для n -мерной системы это характеристическое уравнение примет вид

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Когда размерность фазового пространства увеличивается $n \geq 3$, возникают математические трудности с алгебраическим нахождением корней уравнения. Еще Абелем была доказана теорема, суть которой заключается в том, что при размерности алгебраического уравнения порядка ≥ 5 , невозможно получить алгебраическое выражение для корней этого полинома.

Поэтому воспользуемся алгоритмом критерия Рауса-Гурвица.

Шаг 1. Составляется так называемая матрица Гурвица. Главная диагональ: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ – коэффициенты характеристического многочлена. Первый столбец: коэффициенты с нечетными индексами a_1, a_3, a_5, \dots . Особенность матрицы – в каждой строке индекс каждого следующего коэффициента (считая слева направо) меньше на единицу

индекса предыдущего коэффициента. Все остальные коэффициенты a_i , $i > n$ или $i < 0$ заменяются нулями. Получаем такую матрицу

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Рассчитываются главные диагональные миноры матрицы

Гурвица: $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$ и так далее до Δ_n .

Критерий устойчивости Рауса-Гурвица. Для того чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были положительны при условии $a_0 > 0$: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$.

Устойчивость стационарных точек в первом приближении

Вернемся теперь к устойчивости стационарных точек системы Лоренца. Начнем с нулевой точки $O(0,0,0)$. Напомним, что нулевая точка существует при любом значении параметра r . Заметим, что остальные параметры σ и b не играют существенной роли в возникновении двух других стационарных точек E_1 и E_2 . Поэтому в качестве бифуркационного выберем именно параметр r .

Для определения устойчивости нулевой точки не обязательной использовать критерий Рауса-Гурвица, можно применять и первое приближение. Составляем якобиан

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение соответственно примет такой вид

$$(\lambda + \sigma)[(\lambda + 1)(\lambda + b) + x^2] + \sigma[(\lambda + b)(z - r) + xy] = 0.$$

И, подставив нулевую особую точку, имеем уравнение

$$(\lambda + \sigma)[(\lambda + 1)(\lambda + \sigma) - \sigma r] = 0.$$

Очевидно, что это уравнение имеет три решения

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma + 1)^2 + \sigma(r - 1)}.$$

Исследуем дальше нашу нулевую точку при изменении управляющего параметра r :

при $r < 1$: $\lambda_{1,2,3} < 0$, значит точка $O(0,0,0)$ – асимптотически устойчивый узел;

при $r > 1$: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, значит точка $O(0,0,0)$ – седло.

Таким образом, при переходе через значение параметра $r = 1$ в системе (2) происходит бифуркация (стационарная точка теряет устойчивость), а само значение $r = 1$ является бифуркационным.

Перейдем теперь к определению устойчивости стационарных точек $E_1(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ и $E_2(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, которые появляются при значениях параметра $r > 1$. И именно в этом случае будем использовать критерий Рауса-Гурвица.

Итак, для ненулевых стационарных точек системы Лоренца характеристический многочлен выглядит так

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0.$$

Причем как для первой, так и для второй точки характеристический многочлен будет одинаковым. Начинаем использование критерия с построения матрицы Гурвица

$$G = \begin{pmatrix} \sigma + b + 1 & 1 & 0 \\ 2\sigma b(r-1) & b(\sigma + r) & \sigma + b + 1 \\ 0 & 0 & 2\sigma b(r-1) \end{pmatrix}.$$

Согласно с критерием проверяем, чтобы $a_0 = 1 > 0$. И считаем главные диагональные миноры: $\Delta_1 = \sigma + b + 1 > 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sigma + b + 1 & 1 \\ 2\sigma b(r-1) & b(\sigma + r) \end{vmatrix} = \sigma(\sigma + b + 3) + r(b + 1 - \sigma),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \sigma + b + 1 & 1 & 0 \\ 2\sigma b(r-1) & b(\sigma + r) & \sigma + b + 1 \\ 0 & 0 & 2\sigma b(r-1) \end{vmatrix} = 2\sigma b(r-1)\Delta_2.$$

Видно, что в зависимости от значений параметров, Δ_2 , Δ_3 могут иметь различные знаки. Оказывается, если выполняется условие $\sigma(\sigma + b + 3) + r(b + 1 - \sigma) > 0$, то все миноры будут положительными, что удовлетворяет критерию Рауса-Гурвича. А значит, все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, то есть стационарные точки асимптотически устойчивы.

Неравенство $\sigma(\sigma + b + 3) + r(b + 1 - \sigma) > 0$ определяет границу устойчивости системы. Тогда выражение для параметра

$r_c = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$, $\sigma-b-1 > 0$ является критической точкой

(бифуркационным значением). Получаем, что стационарные точки $E_{1,2}$ асимптотически устойчивы при $r \in (1, r_c)$ и неустойчивы при $r \in (r_c, +\infty)$. То есть в системе реализуется еще одна бифуркация.

Поскольку теперь у нас есть полный анализ устойчивости всех трех стационарных точек, можем нарисовать бифуркационную диаграмму системы (2) (см. рис. 10).

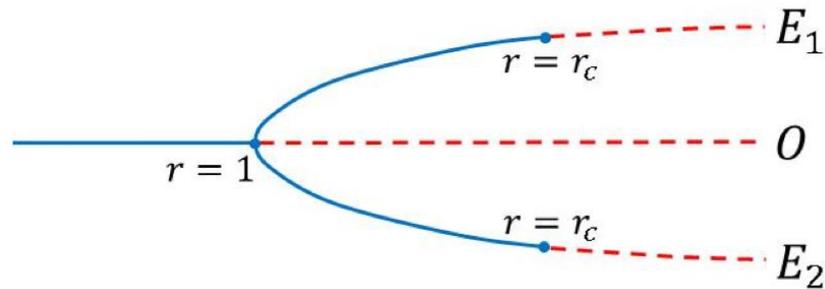


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма системы Лоренца.

Проанализируем полученную диаграмму. При значениях параметра $r < 1$ существует только одна нулевая устойчивая стационарная точка. При прохождении бифуркационного параметра r через значение $r = 1$ нулевая стационарная точка теряет устойчивость и становится неустойчивой, в результате чего появляются еще две ненулевые стационарные точки, которые рождаются устойчивыми. Перед нами реализуется случай бифуркации типа «вилка» (вилкообразная бифуркация). При дальнейшем изменении параметра r , значение проходит через критическое положение r_c , и устойчивые ненулевые стационарные точки теряют устойчивость. В этом случае реализуется бифуркация типа Пуанкаре-Андерсона-Хопфа.

Вычислительный эксперимент

Ранее уже отмечалось, что не все особенности системы Лоренца можно изучит аналитически. Некоторые аспекты проявляются только в вычислительном эксперименте. Проводя эксперимент, мы будем следовать работе Эдварда Н. Лоренца, в которой были зафиксированы параметры $\sigma = 10$ и $b = \frac{8}{3}$, а вот r будем менять $r \in (0, +\infty)$. Покажем ряд графиков при различных значениях r (см. рис. 11,12,13).

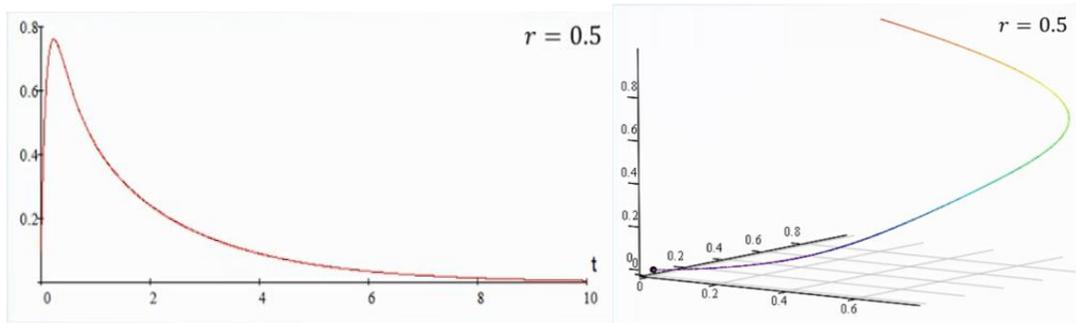


Рис. 11. Интегральная и фазовая траектории системы (2) при $r = 0.5$.

Видно, что с течением времени траектории системы стремятся к нулевой стационарной точке. Перейдем теперь через первое критическое значение $r = 1$. Как показывает вычислительный эксперимент, если $r \in (1; 1.345)$, то $E_{1,2}$ – устойчивые узлы. А вот если $r \in (1.345; 24,737)$, то $E_{1,2}$ – устойчивые фокусы.

Рассмотрим теперь, что происходит с системой Лоренца с точки зрения интегральных траекторий и фазового портрета, когда $r \in (13.927; 24,06)$. Происходит, пожалуй, одно из самых интересных событий – смена аттрактора при одном и том же начальном условии (рис. 12).

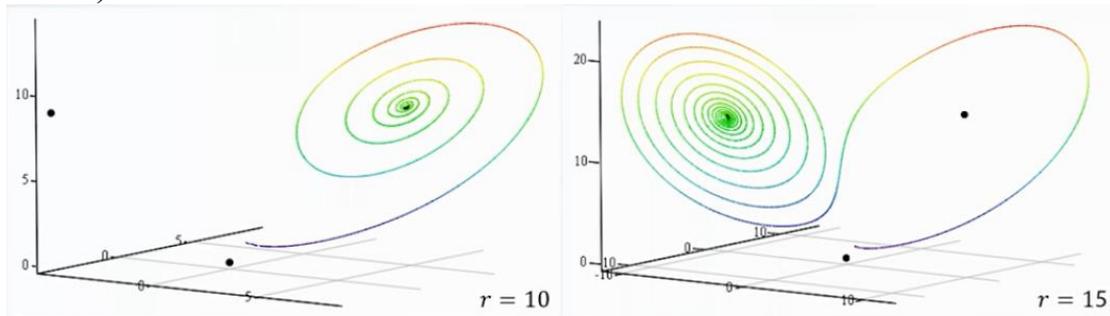


Рис. 12. Фазовая траектория системы (2) при $r = 10$ и $r = 15$.

Изменяем значения управляющего параметра $r \in (24,06; 24.74)$. Здесь кроме точек $E_{1,2}$, возникает притягивающее множество сложной структуры, отвечающее хаотическому режиму колебаний – аттрактор Лоренца.

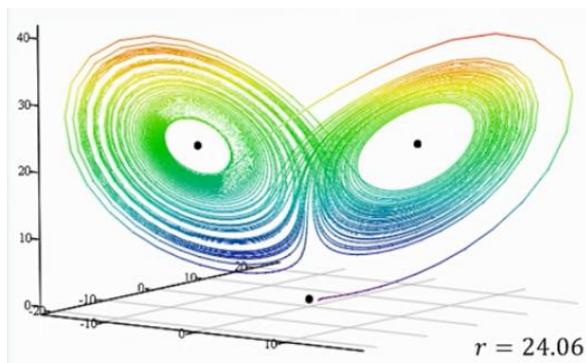


Рис. 13. Аттрактор Лоренца при $r = 24.06$.

А вот при $r > 24.74$ движение становится совершенно непредсказуемым.

3. Качественные критерии хаоса

Хаотическое поведение динамических систем довольно редкое явление. Не все непериодические и негармонические состояния систем являются детерминированным хаосом, поэтому хотелось бы иметь критерии определения наличия хаоса в рассматриваемой системе. Оказывается, существуют качественные признаки, которые позволяют по изображениям фазовых портретов строить некоторые математические отображения. И на основании этих отображений делать вывод о том, к чему относится данная фазовая траектория – к странному аттрактору или нет. Так же мы рассмотрим количественные меры хаоса, что поможет ответить на вопрос о хаотичности фазовой траектории, либо какая из заданных траекторий более хаотична.

Отображение Лоренца

Первый подход, который мы рассмотрим, был предложен Эдвардом Лоренцом, чтобы обосновать наличие хаотических режимов в своей динамической системе. Будем следовать рассуждениям Лоренца.

Будем рассматривать одну из траекторий системы $z = z(t)$ при фиксированных значениях параметров $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$. Далее, чтобы получить отображение Лоренца, нам надо зафиксировать максимумы соответствующей траектории $z = z(t)$ (см. рис. 14).

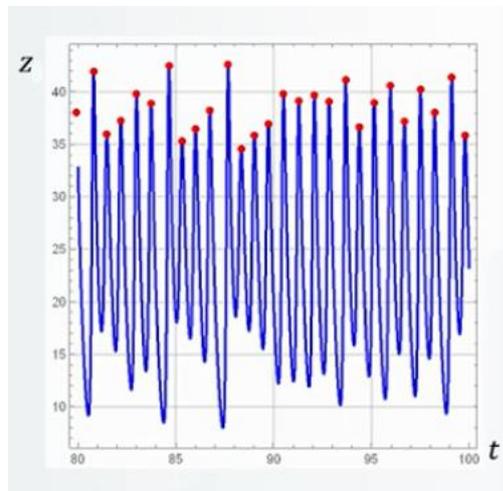


Рис. 14. Максимумы траектории $z = z(t)$.

Обозначим через z_n n -й максимум траектории. И теперь можем построить само отображение Лоренца. Это есть зависимость величины очередного максимума от предыдущего

$$z_{n+1} = f(z_n).$$

Изобразим графически отображение Лоренца для выбранных параметров (см. рис. 15).

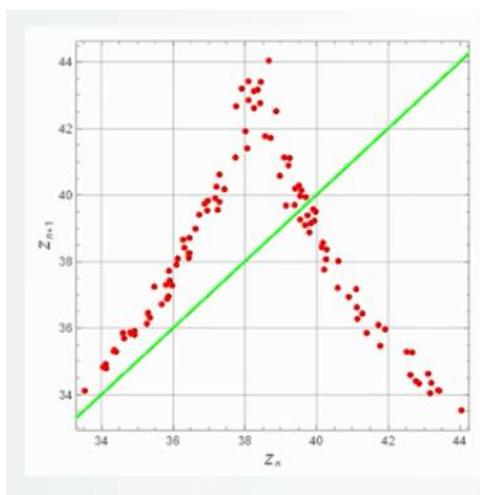


Рис. 15. Отображение Лоренца.

Как видно из получившегося графика, точки распределяются в виде «тента». Есть такое дискретное отображение, которое так и называется отображение типа «тент». Это отображение всегда дает хаотический режим. И на основании этой аналогии делаем вывод, что аттрактор, который получается при $r = 28$, является странным или хаотическим.

Как итог, можем заключить, что отображение Лоренца является качественным критерием существования детерминированного хаоса в динамической системе.

Отображение Пуанкаре

Данное отображение более универсально, чем отображение Лоренца. Рассмотрим, например, нелинейную динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = h(x, y, z) \end{cases}$$

с начальным условием (x_0, y_0, z_0) . Составим отображение Пуанкаре (еще его называют сечением Пуанкаре) следующим образом. В трехмерном фазовом пространстве произвольным образом выбирается двумерная площадка S – плоскость Пуанкаре (см. рис. 16). Заметим, что от выбора площадки S будет зависеть вид отображения. Рисуем фазовую траекторию, отвечающую начальному условию (x_0, y_0, z_0) . Тогда через x_n обозначим точку, в которой фазовая траектория впервые пересечет плоскость S . Далее фазовая траектория эволюционирует с течением времени и пресекает S в следующей точке x_{n+1} . И так далее, получаем набор точек, расположенных по плоскости Пуанкаре. Собственно, это и есть отображение Пуанкаре: переход точки x_n в x_{n+1} .

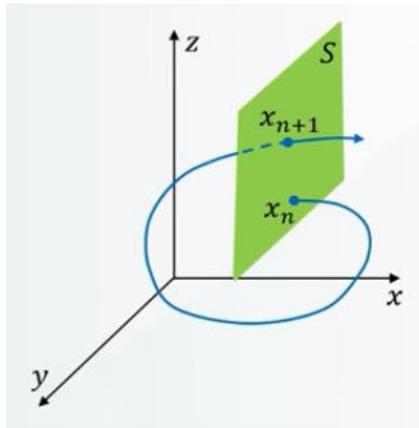


Рис. 16. Отображение Пуанкаре.

Особенность этого отображения заключается в том, что по нему можно судит о наступлении хаотического режима. А именно, в динамической системе будет реализован динамический хаос, если в сечении Пуанкаре фазового потока возникает компактное облако точек.

Спектр мощности

Это еще один признак возникновения хаоса. Давайте посмотрим, каким образом с помощью спектра мощности сигнала можно сделать вывод о выходе системы на хаотический режим. Но для начала определим, что же такое спектра мощности сигнала.

Допустим, у нас есть сигнал $x = x(t)$ – другое название траектории (решения) системы. Далее, для того чтобы построить распределение мощности сигнала по частотам ω , составляем Фурье-образ (преобразование Фурье) сигнала x

$$x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t) \exp(i\omega t) dt .$$

По сути, мы раскладываем сигнал по частотам, и получаем зависимость сигнала не от времени, а от частот. Тогда спектр мощности сигнала x : $P(\omega) = |x(\omega)|^2$ – это распределение энергии по частотам.

Давайте посмотрим, как будет меняться спектр мощности для траекторий системы Лоренца. Первой рассмотрим траекторию, возникающую при параметрах $\sigma = 19.8$, $b = 1$, $r = 56$ (см. рис. 17).

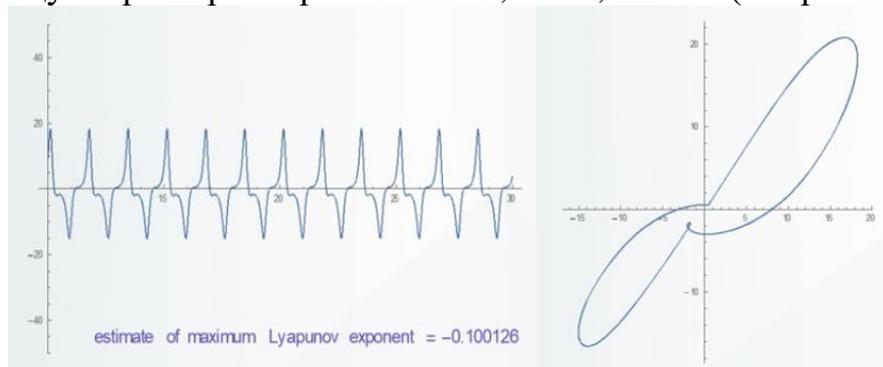


Рис. 17. Траектория и соответствующая ей фазовая диаграмма.

И построим изображение спектра мощности первой интегральной траектории. По рисунку 18 видно, что частоты четко выделяются, что как раз и соответствует периодическому сигналу.

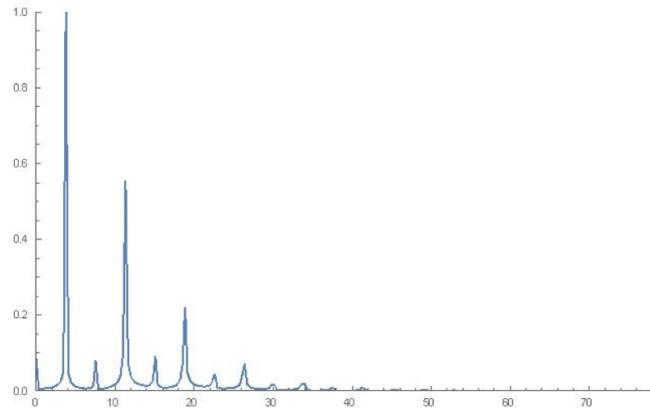


Рис. 18. Спектр мощности первой траектории.

Далее посмотрим, как изменится изображение спектра мощности, когда система Лоренца выйдет на хаотический режим (см. рис. 19). Возьмем значения параметров $\sigma = 16$, $b = 4$, $r = 45.92$.

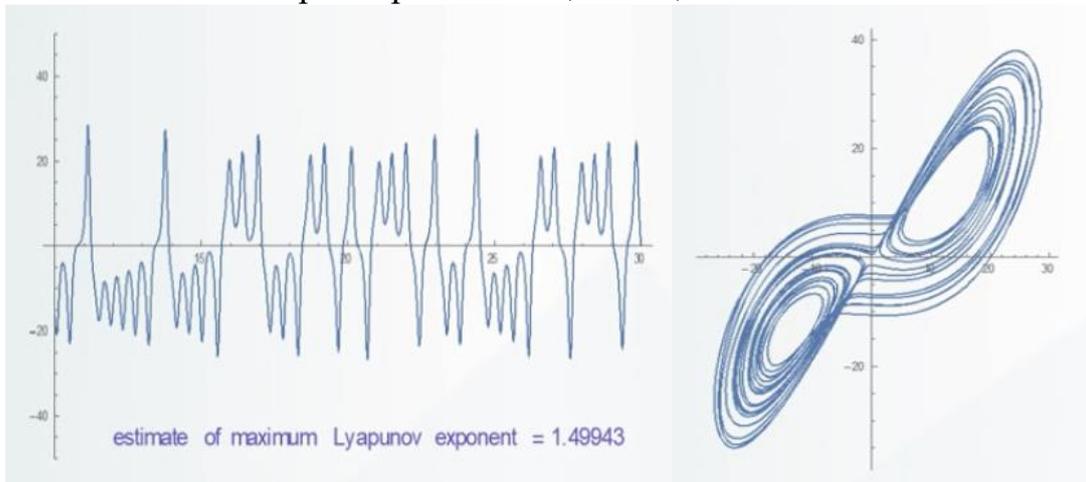


Рис. 19. Траектория и фазовая проекция хаотического режима.

Как видите, изображение спектра мощности хаотического режима разительно отличается (см. рис. 20).

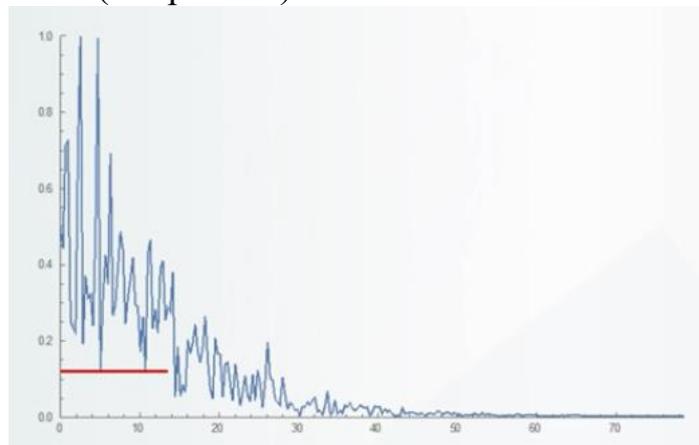


Рис. 20. Спектр мощности хаотической траектории.

Красной чертой отмечен так называемый «пьедестал», возникающий на низких частотах и характерный только хаотическим режимам.

Значит, если у нас есть траектория и мы хотим ответить на вопрос, является ли эта траектория хаотической или нет, строим спектр мощности, находим «пьедестал», и на основании это делаем вывод.

Корреляционная функция

Определим, что же такое корреляционная функция. Пусть $x(t)$ – значение интегральной траектории динамической системы в момент времени t , а $x(t+\tau)$ – значение в момент $t+\tau$. Тогда корреляционная функция строится по формуле

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt.$$

Функция $C(\tau)$ служит мерой корреляции (объединения) между двумя значениями величины $x(t)$, разделенными временным интервалом τ .

Давайте теперь построим корреляционную функцию для траектории системы Лоренца, если система находится в различных режимах. И первым будем исследовать режим при зафиксированных значениях параметров $\sigma=10$, $b=\frac{8}{3}$, $r=12$. Это будет устойчивый фокус. И соответствующий график корреляционной функции представлен на рисунке 21.

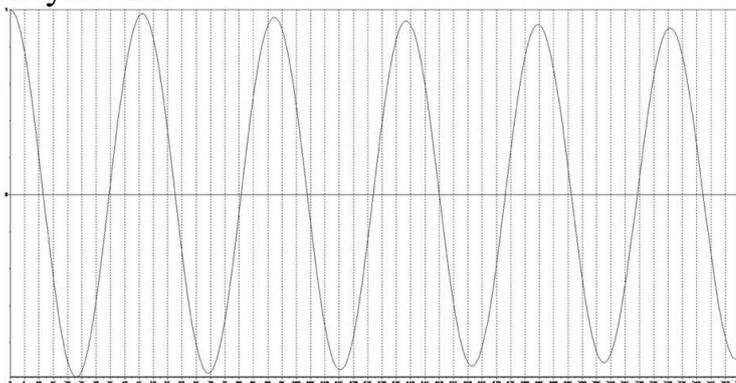


Рис. 21. Корреляционная функция устойчивого режима.

Теперь пусть система Лоренца выйдет на хаотический режим ($\sigma=10$, $b=\frac{8}{3}$, $r=28$). Посмотрим, как изменится вид графика корреляционной функции (см. рис. 22). Одной из особенностей корреляционной функции интегральной траектории системы Лоренца является то, что в хаотическом режиме корреляционная функция $C(\tau)$ быстро убывает. То есть отсутствует объединение между прошлым и будущим (система «забывает» прошлое).

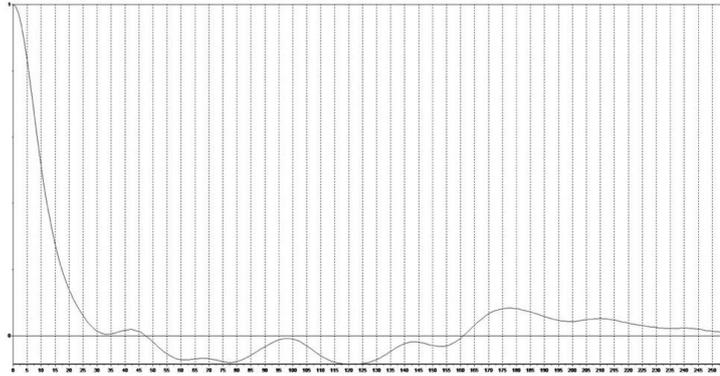


Рис. 22. Корреляционная функция хаотического режима.

А вот в регулярном режиме $C(\tau)$ либо постоянна, либо осциллирует (гармонические колебания).

4. Количественные критерии хаоса

Показатели Ляпунова

Именно показатели Ляпунова являются количественной мерой экспоненциального разбегания интегральных траекторий динамической системы.

Как обычно, рассмотрим нелинейную динамическую систему (1) с заданным начальным условием. Теперь обобщим ситуацию и запишем систему в векторной форме

$$\dot{x} = F(x),$$

которой соответствует фазовая траектория x начальным условием x_0 . Немножко меняем начальное условие $x_0 + \tilde{x}_0$ и получаем еще одну фазовую траекторию $x + \tilde{x}$, где \tilde{x} – малое возмущение. Можно продолжить процесс и построить еще фазовые траектории, различающиеся малым отличием начальных условий. Вопрос заключается в том, что с эти фазовыми траекториями будет происходить при увеличении времени: они будут разбегаться со временем или сходятся к какому-то аттрактору, либо постоянно будут располагаться на некотором фиксированном расстоянии друг от друга. В этом и заключается смысл ляпуновских показателей – предсказать дальнейшее поведение траекторий при малом возмущении системы.

Введем замену в систему уравнений. Вместо x в исходное уравнение подставим $x + \tilde{x}$ и разложим правую часть в Тейлора по малому возмущению \tilde{x}

$$\frac{dx}{dt} + \frac{d\tilde{x}}{dt} = F(x) + A(x)\tilde{x}.$$

Учитывая векторную форму, переходим к следующему соотношению для малого возмущения

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A(x)\tilde{x}.$$

Получилось дифференциальное уравнение относительно малого возмущения \tilde{x} . Именно это уравнение позволяет отследить эволюцию \tilde{x} и, соответственно, понять, что происходит с траекториями исходной системы при малом возмущении начальных условий. Здесь $A(x)$ – матрица частных производных

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Важная особенность этой матрицы заключается в том, что она зависит от времени.

Теорема Ляпунова

Сформулируем теперь одну из теорем Ляпунова, которая позволит нам ввести ляпуновские показатели и использовать их в определении хаотического аттрактора.

Дадим теперь определение понятию «ляпуновский показатель». Для любого решения \tilde{x} уравнения $\dot{\tilde{x}} = A(x)\tilde{x}$ и произвольного числа T существует ляпуновский характеристический показатель – вещественно число, отличное от $\pm\infty$, определяемое как верхний предел

$$\Lambda_{\tilde{x}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\tilde{x}(T)\|.$$

Показатель Ляпунова обладает таким свойством: $\Lambda_{C\tilde{x}} = \Lambda_{\tilde{x}}$ – это значит, что если мы умножаем возмущение на некоторую константу C , то значения показателя Ляпунова для соответствующего возмущения не меняется. Так же, ляпуновский показатель для линейной комбинации двух возмущений \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 меньше либо равен максимальному из двух показателей Ляпунова для этих возмущений:

$$\Lambda_{C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2} \leq \max(\Lambda_{\tilde{x}_1}, \Lambda_{\tilde{x}_2}).$$

Пусть имеется N линейно независимых решений $\{\tilde{x}\}$ (фундаментальная система решений) уравнения $\dot{\tilde{x}} = A(x)\tilde{x}$, которым отвечает N ляпуновских показателей, нумеруемых в порядке убывания: $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N$. Стоит отметить, что размерность фазового пространства определяет количество показателей Λ_N . Λ_1 – старший

ляпуновский показатель, именно он играет наибольшую роль при определении хаотичности динамической системы.

Спектр (набор) ляпуновских показателей $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N\}$ является полной характеристикой системы $\dot{\tilde{x}} = A(x)\tilde{x}$, а не одного решения \tilde{x} , поскольку он не зависит от выбора фундаментальной системы $\{\tilde{x}\}$.

Для каждой траектории исходной нелинейной системы уравнений в вариациях $\dot{\tilde{x}} = A(x)\tilde{x}$ даст определенный спектр $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N\}$. Присутствие в этом спектре показателя Λ означает, что существует такое возмущение исходной траектории, которое эволюционирует во времени как $\tilde{x} \sim \exp(\Lambda t)$.

Теорема Ляпунова. Если существует хотя бы один $\Lambda_i > 0$, то фазовая траектория неустойчива. Если все показатели $\Lambda_i < 0$, то фазовая траектория асимптотически устойчива. Если $\Lambda_1 = 0$, то линейного анализа не достаточно.

Ляпуновские показатели аттракторов

Начнем мы с того, что определим геометрический смысл ляпуновских показателей. Пусть существует шарообразное облако изображающих точек малого радиуса ε с центром на траектории $x(t)$ (см. рис. 23). Далее с течением времени это облако будет деформироваться и примет вид N -мерного эллипсоида. А вот размеры этого эллипсоида по главным полуосям в момент времени t : $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N\} = \{\varepsilon \exp(\Lambda_1 t), \dots, \varepsilon \exp(\Lambda_N t)\}$. Спектр ляпуновских характеристических показателей как раз реализуется при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $t \rightarrow T$.

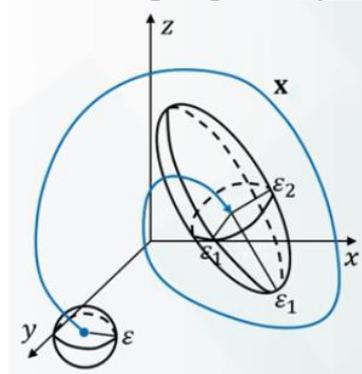


Рис. 23. Геометрический смысл ляпуновских показателей для трехмерного пространства.

Каждый ляпуновский показатель отвечает за расширение или сжатие эллипсоида изображающих точек вдоль одной из его главных осей – это собственно и является геометрическим смыслом показателей Ляпунова.

Разберем теперь, каким же требованиям должен удовлетворять спектр:

1) сумма всех N показателей должна быть отрицательна $\sum_{s=1}^N \Lambda_s < 0$. То

есть выполняется условие диссипативности – аттрактор является притягивающим множеством нулевой меры в фазовом пространстве, на котором с течением времени концентрируется облако изображающих точек;

2) у аттрактора, отличного от неподвижной точки, должен иметься хотя бы один нулевой ляпуновский показатель.

Вот наконец-то мы подошли к самому главному – классификации аттракторов по сигнатуре (знаку) спектра ляпуновских показателей.

- автономная система на прямой: имеется один ляпуновский показатель, он отрицательный (обозначим его так $\langle - \rangle$); значит, получаем устойчивую неподвижную точку.

- автономная система на плоскости: два ляпуновских показателя; и возможны такие варианты $\langle -, - \rangle$ – устойчивая неподвижная точка, $\langle 0, - \rangle$ – предельный цикл.

- автономная система в трехмерном пространстве: если получаем вариант $\langle -, -, - \rangle$, то это притягивающая неподвижная точка; если $\langle 0, -, - \rangle$ – предельный цикл; если $\langle 0, 0, - \rangle$ – двумерный тор (выглядит эта фигура как бублик); $\langle +, 0, - \rangle$ – странный аттрактор.

Как видно из классификации, принципиальная возможность появления аттрактора с положительным показателем, а значит и хаоса, возникает, начиная с размерности фазового пространства $N = 3$.

Сечение Пуанкаре аттрактора Лоренца

Дадим нестрогое определение странного аттрактора. Под странным аттрактором можно понимать притягивающее множество неустойчивых траекторий в фазовом пространстве диссипативной динамической системы, обладающее фрактальной структурой. Что значит «фрактальная структура»? Рассмотрим это понятие на примере сечения Пуанкаре аттрактора Лоренца на плоскости $z = 27$ (см. рис. 24). Точки E_1 и E_2 – ненулевые стационарные точки системы Лоренца. Оказывается, что полученное сечение Пуанкаре не что иное, как множество Кантора (канторовская пыль).

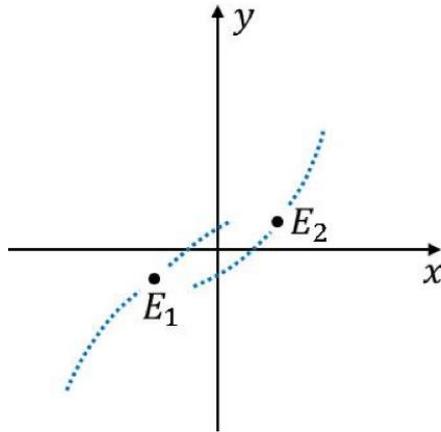


Рис. 24. Сечение Пуанкаре аттрактора Лоренца.

Чтобы получить канторовскую пыль, нужно выбрать отрезок единичной длины. Далее делим его на три части, выбрасываем из него середину. Получается еще два отрезка, каждый из которых снова делим на три части и снова отбрасываем середину и так далее (см. рис. 25).

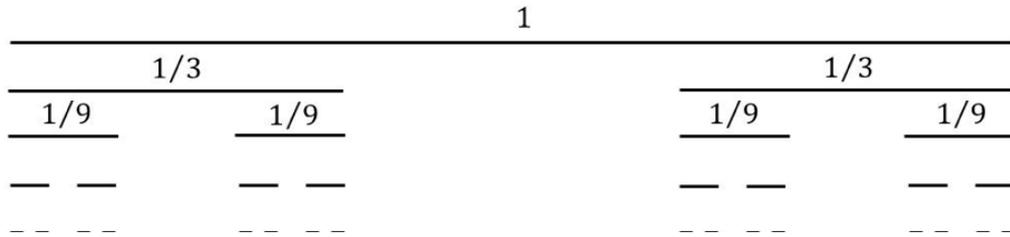


Рис. 25. Множество Кантора

Каждый фрагмент множества Кантора, полученный из какого-то отрезка на некотором уровне построения, подобен всему множеству и переходит в него при соответствующем пересчете масштаба. Канторовское множество является фрактальным, поэтому сечение Пуанкаре также фрактальное множество, а значит и аттрактор, для которого построено множество Пуанкаре, странный.

Понятие фрактала

Разберемся, что же такое фрактал. На самом деле теория фракталов – это достаточно обширный раздел геометрии, поэтому мы остановимся на ключевых моментах, необходимых нам для определения хаотичности динамических систем, а именно фрактальных размерностях аттрактора.

Впервые понятие фрактала использовал в своих работах Б. Мандельброт. *Фракталом* называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Наличие подобия – характерная черта фракталов. Например, множество Кантора.

Вспомним, что собой представляет подобие. Преобразование подобия (известное из школьной программы) можно записать в следующем виде

$$x = (x_1, \dots, x_N) \xrightarrow{s} x' = (sx_1, \dots, sx_N).$$

Еще одно школьное преобразование подобия – аффинное преобразование

$$x \rightarrow Mx + v.$$

Забегая вперед, стоит отметить, что фракталы не только самоподобные объекты, но и самоаффинные.

Фрактальная размерность – емкость

Определив понятие фрактала, перейдем теперь измеримости фрактала. Одна из таких эмпирических мер называется емкостью фрактала. Но прежде, вспомним, что такое топологическая размерность. В некоторых случаях, топологическая размерность ($D_T = \{0, N\}$) определяет минимальное количество параметров, необходимых для задания любой точки множества. Так для точки $D_T = 0$, для линии $D_T = 1$, для поверхности или фигуры $D_T = 2$, для тела или пространства $D_T = 3$ и так далее. Рассмотрим такой пример (см. рис. 26). Обе эти кривые имеют одинаковую топологическую размерность, хотя и видно, что это совершенно разные кривые. Именно поэтому нам нужна какая-нибудь другая размерность, которая позволит разделить (классифицировать) эти кривые, не считая их с точки зрения размерности одним и тем же. В этом нам поможет как раз фрактальная размерность – емкость.



Рис. 26. Топологическая размерность $D_T = 1$.

Емкость кривой. Пусть задана некоторая кривая. Накладываем теперь сетку со стороной ячейки ε на эту кривую (см. рис. 27). Далее отмечаем те клетки, через которые проходит кривая. Теперь, начинаем уменьшать $\varepsilon \rightarrow 0$, то есть меняем масштаб. Соответственно, у нас получается другое количество отмеченных клеток. Можем даль продолжать эту процедуру уменьшения масштаба, получая новое количество клеток на каждом шаге итерации.

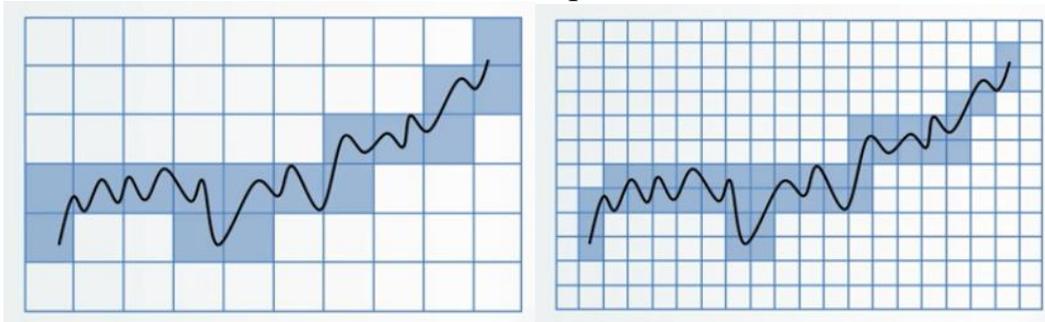


Рис. 27. Алгоритм расчета емкости кривой.

При уменьшении ε количество ячеек сетки $N(\varepsilon)$, через которые проходит кривая, будет возрастать как $N(\varepsilon) \cong \frac{1}{\varepsilon}$.

Емкость двумерной области. Возьмем некоторую замкнутую фигуру (см. рис. 28). Накладываем сетку, отмечаем клетки и считаем количество ячеек, через которые проходит фигура. Снова уменьшаем масштаб ($\varepsilon \rightarrow 0$) и получаем новое количество отмеченных ячеек.

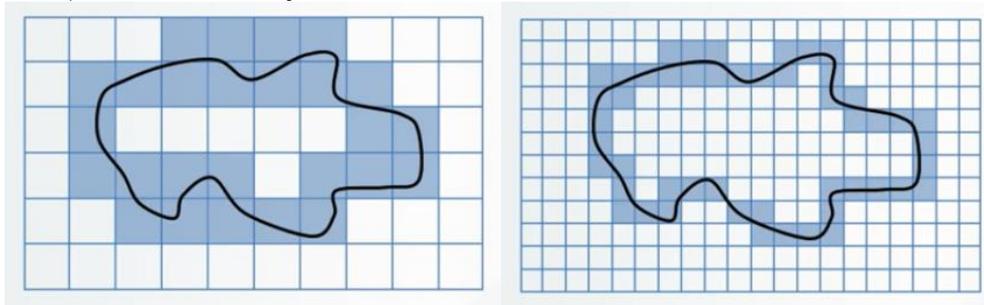


Рис. 28. Емкость двумерной области.

При уменьшении ε количество ячеек сетки $N(\varepsilon)$, покрывающих фигуру, будет возрастать как $N(\varepsilon) \cong \frac{1}{\varepsilon^D}$. И, обобщая данную ситуацию, получим, что количество покрывающих ячеек будет возрастать как $N(\varepsilon) \cong \frac{1}{\varepsilon^D}$, где D – размерность рассматриваемых множеств, характеризует скорость роста числа ячеек покрытия данного множества при уменьшении размера ячеек. Формула

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

является расчетной формулой для определения емкости исследуемого множества (иногда обозначают через D_0). Фрактальную размерность, определенную с помощью покрытия множества ячейками фиксированной формы и размера, называют *емкостью множества*.

Фрактал – объект, для которого емкость больше его топологической размерности $D > D_T$, причем D имеет дробные значения. Например, для отрезка единичной длины $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = 1 = D_T.$$

Получаем, что фрактальная размерность и топологическая совпадают, значит, отрезок не является фракталом.

Спектр обобщенных размерностей Реньи

В рамках нелинейной динамики систем, к сожалению, одной размерности D_0 (емкости) недостаточно. Если аттрактор не однороден – одни элементы покрытия посещаются чаще, другие реже. Этого обстоятельства нет в определении D_0 . Как же исследовать такой случай?

Пусть построено покрытие аттрактора. Тогда каждой i -й ячейке покрытия будет отвечать некоторая вероятность пребывания в ней изображающих точек p_i . В этом случае можно ввести понятие спектра обобщенных размерностей Реньи в общем случае

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum p_i^q}{\log \varepsilon}.$$

Поговорим теперь о частных случаях. Посмотрим, какие же размерности можно получить из обобщенной формулы.

$q = 0$: $D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$ – получили как раз фрактальную размерность;

$q = 1$: пусть ячейки полностью покрывают аттрактор и не накладываются друг на друга $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i = 1$. Количество информации в

утверждении, что изображающая точка аттрактора обнаружена в одной определенной ячейке покрытия вычисляется как $I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log p_i$. Чем

мельче ячейки, тем больше информации в утверждении, что точка попала в данную определенную точку. Можно предположить, что данное нарастание происходит по степенному закону $I(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D_1}$.

Тогда еще одна размерность рассчитывается как

$D_1 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log p_i}{\log \varepsilon}$ – информационная размерность. Смысл

размерности D_1 – мера хаотичности системы, которая играет важную роль в анализе нелинейных динамических систем, особенно при описании потери информации в ходе эволюции хаотических систем;

$q = 2$: допустим мы имеем фазовую траекторию, возьмем какое-то ε -покрытие и вероятность попадания двух точек в i -й элемент покрытия равна p_i^2 . Далее рассмотрим сумму вероятностей по всем ячейкам $C(\varepsilon) = \sum p_i^2$ – корреляционную сумму. При уменьшении ε сумма

будет убывать, и можно предположить, что это будет происходить по степенному закону $C(\varepsilon) \cong \varepsilon^{D_2}$. Тогда последнее выражение

эквивалентно $D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum p^2}{\log \varepsilon}$ – корреляционная размерность.

Эта размерность является мерой иерархического сгущивания, то есть характеризует упорядоченность внутренней структуры объекта.

Рассмотренные выше размерности в общем случае находятся в соотношении

$$D_0 \geq D_1 \geq D_2.$$

Что касается частных случаев: множества, у которых $D_0 = D_1 = D_2$ называются *однородными фракталами (монофракталами)*. Множества, у которых $D_0 > D_1 > D_2$ называются *мультифракталами*.

Если говорить о реальных ситуациях, то, конечно же, в природе чаще всего встречаются мультифракталы.

Осталось теперь выяснить, как рассчитать корреляционную размерность для какого-либо аттрактора, чтобы определить его хаотичность.

Алгоритм Грассбергера-Прокаччиа

Этот алгоритм как раз и позволяет вычислить корреляционную размерность. Имеем набор векторов $\{x_i : i = 1, 2, \dots, M\}$, соответствующих фазовой траектории. Как мы получили этот набор, сейчас не имеет особого значения. Первым шагом вычисляем корреляционную сумму $C(\varepsilon)$ на асимптотике, показывающую относительное число пар точек аттрактора, находящемся на расстоянии не большем ε , где ε – это размер соответствующего покрытия

$$C(\varepsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i,j=1}^M \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|),$$

где $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Если выполняется условие $C(\varepsilon) \cong \varepsilon^{D_2}$ (хотя бы в ограниченном диапазоне значений ε), то D_2 является корреляционной размерностью аттрактора.

5. Масштабно-инвариантные случайные процессы

Случайные процессы. Основные понятия

Рассмотрим основные определения. *Случайный процесс* $\xi(t)$ – случайная величина, изменяющаяся во времени. Можно сказать, что это случайная функция, зависящая от времени. Отдельные наблюдения за

случайным процессом дадут каждый раз различные функции $\xi^{(k)}(t)$. Функции $\xi^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ называются *реализациями* случайного процесса $\xi(t)$.

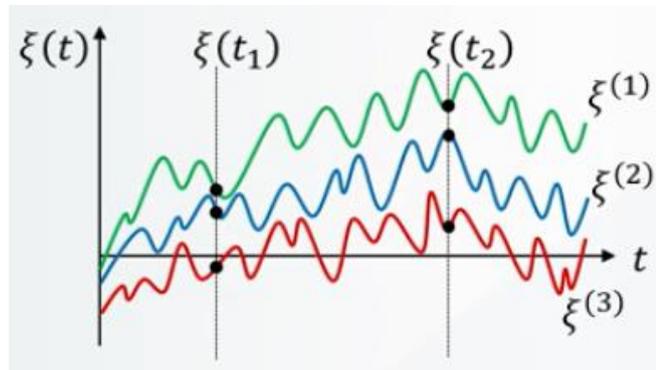


Рис. 29. Реализации случайного процесса $\xi(t)$.

Основной особенностью реализаций случайного процесса является то, что их бесчисленное множество (семейство); если еще раз запустить случайный процесс, то получим уже другое семейство реализаций.

В любой фиксированный момент времени t значение случайного процесса $\xi(t)$ является случайной величиной $\xi(t_i)$ с одномерной плотностью распределения вероятностей $\rho(x, t_i)$. На рис. 29 показаны в моменты времени t_1 и t_2 показаны случайные величины $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ (сечения случайной функции), точками показаны возможные значения, которые принимают случайные величины $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$.

Рассмотрим те характеристики случайных процессов (моменты), которые нам понадобятся в дальнейшем для изучения уже масштабно-инвариантных (фрактальных) случайных процессов.

1. *Математическое ожидание* в момент времени t

$$M = \bar{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x, t) dx.$$

2. *Дисперсия* в момент времени t

$$\sigma^2(t) = \overline{\xi(t) - \bar{\xi}(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{\xi}(t))^2 \rho(x, t) dx.$$

3. *Корреляционная функция*, характеризующая степень зависимости между сечениями случайной функции, относящимся к различным моментам времени t_1 и t_2

$$K(t_1, t_2) = \overline{(\xi(t_1) - \bar{\xi}(t_1))(\xi(t_2) - \bar{\xi}(t_2))}.$$

Случайные процессы. Классификация

Строго стационарный случайный процесс – случайный процесс, для которого плотность распределения вероятностей $\rho(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ не меняется при любом сдвиге τ во времени значений t_1, \dots, t_n , то есть является инвариантной относительно временного сдвига

$$\rho(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \rho(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

Строгость заключается в том, что при сдвиге во времени не меняется ни одна из характеристик такого случайного процесса.

Свойства строго стационарного случайного процесса: математическое ожидание не зависит от времени, дисперсия не зависит от времени и корреляционная функция зависит только от разности моментов времени $\tau = t_2 - t_1$.

Слабо стационарный случайный процесс – случайный процесс, для которого при сдвиге по времени τ не меняются только математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция (т.е. не меняются моменты до второго порядка включительно).

Если процесс строго стационарен, то он является и слабо стационарным.

Временные ряды и эргодические процессы

Это еще один класс стационарных процессов, важный с точки зрения приложений нелинейной динамики.

Временной ряд – совокупность наблюдений некоторой величины в различные моменты времени, либо в более строгой математической формулировке – множество данных $\{x_t, t \in T\}$, где T – некоторое счетное (дискретные временные ряды) или континуальное множество (непрерывные временные ряды).

Определенные средние значения случайного процесса являются средними по ансамблю реализаций $\{\xi^{(k)}(t)\}$ (являются средними статистическими). Если известна одна из реализаций $\xi^{(i)}(t)$, то можно определить для нее средние по времени T :

$$M = \overline{\xi^{(i)}(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \xi^{(i)}(t) dt \quad \text{– математическое ожидание,}$$

$$\sigma^2 = \overline{\xi^{(i)}(t) - M} \quad \text{– дисперсия,}$$

$$K(\tau) = \overline{(\xi^{(i)}(t) - M)(\xi^{(i)}(\tau) - M)} \quad \text{– корреляционная функция.}$$

Можно считать, что временной ряд по сути одна из реализаций случайного процесса.

Наличие только одной реализации приводит к рассмотрению так называемого эргодического процесса. *Эргодическим* называется процесс, все характеристики которого могут быть получены по одной его реализации при $T \rightarrow \infty$, т.е. не надо рассматривать весь ансамбль реализаций, чтобы получить все свойства и характеристики случайного процесса. Только для эргодического процесса, по одной единственной реализации можно определить все его характеристики.

На практике, часто при анализе отдельного временного ряда принимают гипотезу об эргодичности процесса. Эргодический процесс является стационарным, обратное не всегда верно.

Далее перейдем к изучению масштабно-инвариантных случайных процессов.

Броуновский процесс

Прежде чем рассмотреть математику броуновского процесса, вспомним немного физики, лежащей в основе броуновского процесса, а именно броуновское движение. На рис. 30 показано, как в результате беспорядочного движения молекул воды, клетка растения (броуновская частица) со временем меняет свое положение. Стрелочками показано случайное блуждание броуновской частицы.

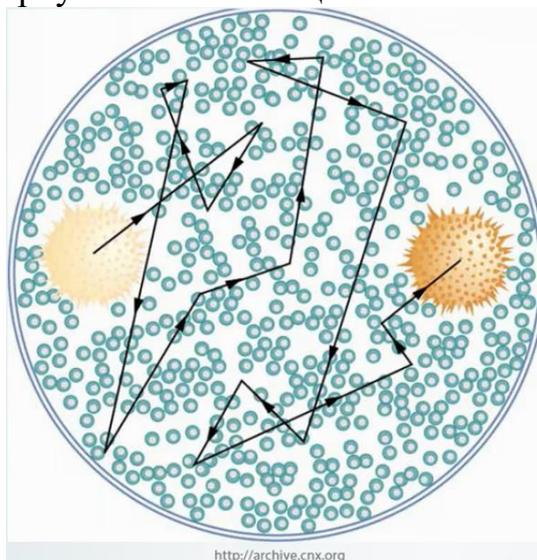


Рис. 30. Броуновское движение.

Математическая модель броуновского движения – случайный процесс (*броуновский процесс*) $\xi(t)$ со следующими характеристиками:

1. $\xi(0) = 0$;
2. процесс с независимыми приращениями, т.е. случайные функции $\xi(0)$, $\xi(t_1) - \xi(0)$, ..., $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$, ... независимы;

3. приращение $\Delta\xi(t), t_2 > t_1$ имеет нормальное (гауссово) распределение

$$F(\Delta\xi < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}\right) du,$$

математическое ожидание равно нулю, а дисперсия равна $\sigma^2(t_2 - t_1)$.

Свойства броуновского процесса:

1. величина $|\xi(t_2) - \xi(t_1)|$ пропорциональна $\sqrt{t_2 - t_1}$, здесь коэффициент пропорциональности $const = \sigma\sqrt{2/\pi}$;

2. статистическое самоподобие (идентичность) приращения реализации $\xi(t + \Delta t) - \xi(t) \stackrel{\Delta}{=} c^{-H} (\xi(t + c\Delta t) - \xi(t))$, $H = 1/2$ – показатель (экспонента) Хёрста, c – коэффициент самоподобия, символ $\stackrel{\Delta}{=}$ означает идентичность вероятностных распределений для реализаций, указанных слева и справа от символа;

3. статистическая идентичность достигается различным масштабированием реализации: по оси времени в c раз, по оси значений – в \sqrt{c} раз (см. рис. 31);

4. фрактальная размерность броуновского процесса равна $3/2$.

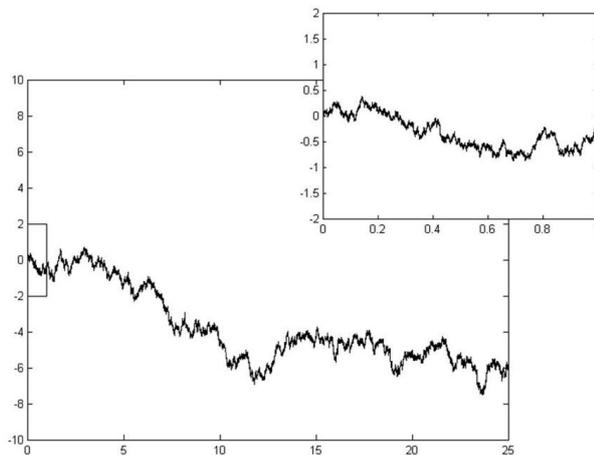


Рис. 31. Статистическое самоподобие при $c = 25$.

Обобщенный броуновский процесс

Обобщенный броуновский процесс $\xi(t)$ – случайный процесс со следующими характеристиками:

1. $\xi(0) = 0$;

2. приращение $\Delta\xi(t), t_2 > t_1$ имеет обобщенное гауссово распределение с параметром $H (0 < H < 1)$

$$F(\Delta\xi < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)^{2H}}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)^{2H}}\right) du,$$

$\overline{\xi(t_2) - \xi(t_1)} = 0$ – математическое ожидание,

$\overline{(\xi(t_2) - \xi(t_1))^2} = \sigma^2 (\xi(t_2) - \xi(t_1))^{2H}$ – дисперсия.

Свойства обобщенного броуновского процесса:

1. случайный процесс с зависимыми приращениями

$$\overline{(\xi(t) - \xi(0))(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))} = \frac{1}{2} \sigma^2 \left[(t + \Delta t)^{2H} - t^{2H} - \Delta t^{2H} \right],$$

в частном случае броуновского процесса корреляционная функция

$$\overline{(\xi(t) - \xi(0))(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))} = 0 \text{ при } H = 1/2;$$

не сложно показать, что $\overline{(\xi(t) - \xi(0))(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))} < 0$ при $0 < H < 1/2$

и $\overline{(\xi(t) - \xi(0))(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))} > 0$ при $H > 1/2$. Если корреляционная функция отрицательна, то имеем так называемый *антиперсистентный* процесс – тенденция к увеличению в прошлом означает тенденцию к уменьшению в будущем, и наоборот. Если корреляционная функция положительна, то получаем *персистентный* процесс – тенденция к увеличению в прошлом означает тенденцию к увеличению в будущем, и наоборот.

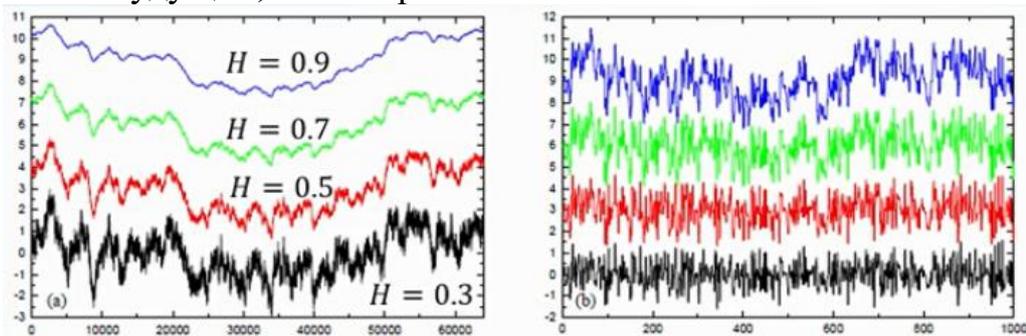


Рис. 32. Обобщенный броуновский процесс при различных значениях показателя Хёрста.

2. величина $\left| \xi(t_2) - \xi(t_1) \right|$ пропорциональна $\sqrt{(t_2 - t_1)^{2H}}$,
здесь коэффициент пропорциональности $const = \sigma\sqrt{2/\pi}$;

3. статистическое самоподобие приращения процесса
$$\xi(t + \Delta t) - \xi(t) \stackrel{\Delta}{=} c^{-H} \left(\xi(t + c^{2H} \Delta t) - \xi(t) \right);$$

4. статистическая идентичность достигается различным масштабированием реализации: по оси времени в c^{2H} раз, по оси значений – в c^H раз;

5. фрактальная размерность $D_0 = 2 - H$, т.е. зная фрактальную размерность можно рассчитать показатель Хёрста, и наоборот. Из этого соотношения можно сделать вывод, что фрактальная размерность обобщенного броуновского процесса находится в интервале $1 < D < 2$.

6. Анализ фрактальных временных рядов

Стационарные ряды. Анализ корреляционной функции

В данном параграфе будем изучать монофрактальные временные ряды, а именно стационарный дискретный временной ряд вида

$$\{x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Масштабная инвариантность для данного ряда принимает вид

$$\{x_i\} \stackrel{\Delta}{=} c^H \{x_{ci}\}.$$

Имеется в виду, что плотность распределения вероятности для ряда слева от знака равенства и справа одна и та же. Это значит, что растягивая исходный ряд в c раз по оси времени и в \sqrt{c} раз по оси ординат, то исходный временной ряд является статистически эквивалентным полученному в результате масштабирования ряду.

Где же встречаются в природе фрактальные временные ряды?

1. Геофизические временные ряды (температура, количество осадков, сток воды, уровень озона, скорость ветра, сейсмические события и т.д.);

2. Медицинские и физиологические временные ряды (ЭКГ, ЭЭГ, артериальное давление, уровень глюкозы, экспрессия генов и т.д.);

3. Астрофизические временные ряды (рентгеновское излучение космических объектов, количество солнечных пятен и т.д.);

4. Технические временные ряды (интернет-трафик, дорожное движение, нейтронная мощность реактора и т.д.);

5. Социальные временные ряды (экономика и финансы, характеристики языков, число погибших в вооруженных конфликтах, количество инфицированных при эпидемии и т.д.).

Теперь перейдем к анализу корреляционной функции. Строим временной ряд приращений

$$\{\Delta x_i\} = \{x_i - x_{i-1}\}.$$

Далее составляем автоковариационную функцию приращений по формуле

$$C(s) = \langle \Delta x_i \Delta x_{i+s} \rangle = \frac{1}{N-s} \sum_{i=1}^{N-s} \Delta x_i \Delta x_{i+s}, \quad s > 0,$$

здесь s – временной масштаб (время задержки). Получив автоковариационную функцию достаточно просто построить автокорреляционную функцию

$$A(s) = \frac{C(s)}{\langle (\Delta x_i)^2 \rangle},$$

где $\langle (\Delta x_i)^2 \rangle$ – дисперсия.

Рассмотрим возможные случаи для временных рядов в зависимости от значений автокорреляционной функций.

Если $C(s) = 0$, то приращения Δx_i не коррелированы (броуновский процесс).

Если $C(s) \sim \exp(-s/t_x)$, где t_x – характерное время убывания, то приращения Δx_i с короткими корреляциями (авторегрессионный процесс).

Если $C(s) \sim s^{-\gamma}$ ($0 < \gamma < 1$), то приращения Δx_i с длинными корреляциями (обобщенный броуновский процесс).

Наличие длинных корреляций в $\{\Delta x_i\}$ говорит о масштабной инвариантности $\{x_i\}$ с показателем Хёрста $H = 1 - \gamma / 2$.

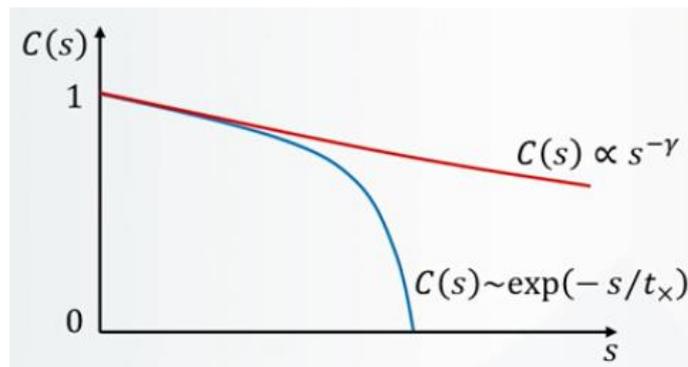


Рис. 33. Графики корреляционных функций.

Метод нормированного размаха

Данный метод предназначен для оценок стационарных временных рядов. В зарубежной литературе метод нормированного размаха еще называют RS -анализом.

Рассмотрим пошагово алгоритм этого метода. Допустим, имеем экспериментальный временной ряд, из которого получили ряд приращений $\{\Delta x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Например, на рис. 34 показан временной ряд, составленный по данным о скорости прироста твитов (включая ретвиты и упоминания) в период первых президентских дебатов в США в 2016 году.

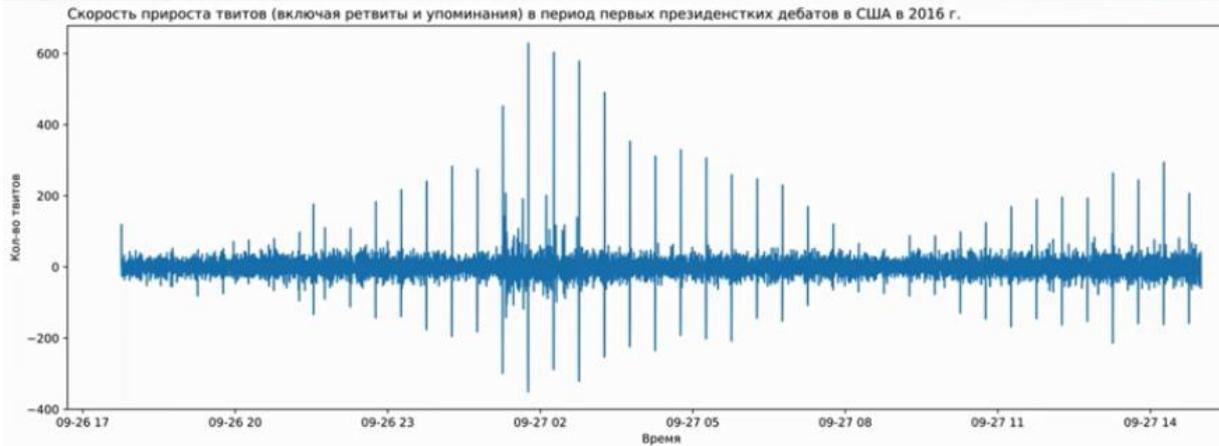


Рис. 34. Пример временного ряда приращений.

Шаг 1. Разбиваем временной ряд приращений $\{\Delta x_i\}$ непересекающимися отрезками ν длиной s каждый. Получаем $N_s = \lfloor N / s \rfloor$ – число отрезков.

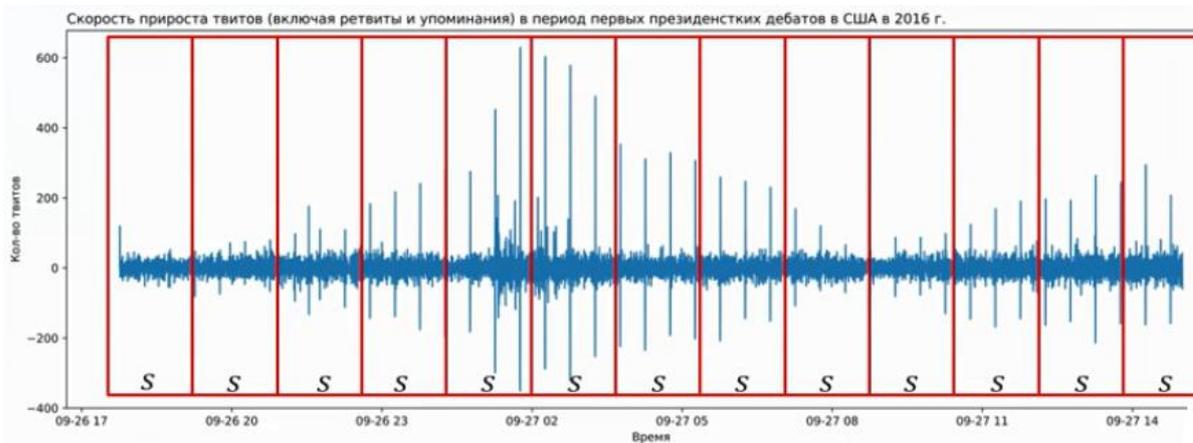


Рис. 35. Разбиения временного ряда приращений.

Шаг 2. Для каждого сегмента $\nu = 0, 1, \dots, N_s - 1$ рассчитываем *накопленные отклонения от среднего* по формуле

$$Y_\nu(j) = \sum_{i=1}^j (\Delta x_{\nu s+i} - \langle \Delta x_{\nu s+i} \rangle_s) = \sum_{i=1}^j \Delta x_{\nu s+i} - \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \Delta x_{\nu s+i},$$

где j – число значений ряда в сегменте ν .

Шаг 3. Для каждого сегмента ν рассчитываем *размах* (т.е. величину максимального изменения $Y_\nu(j)$ за рассматриваемый интервал времени s)

$$R_v(s) = \max_{1 \leq j \leq s} Y_v(j) - \min_{1 \leq j \leq s} Y_v(j)$$

и среднеквадратичное отклонение

$$S_v(s) = \sqrt{\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s [Y_v(j)]^2}.$$

Шаг 4. Для выбранного s рассчитываем среднее значение нормированного размаха

$$F_{RS}(s) = \frac{1}{N_s} \sum_{v=0}^{N_s-1} \frac{R_v(s)}{S_v(s)}.$$

Шаг 5. Изменяем s и повторяем шаги 2-4.

Выводы. Если выполняется эмпирический закон Хёрста

$$F_{RS}(s) \cong s^H,$$

то $\{\Delta x_i\}$ является масштабно-инвариантным рядом с показателем H . Так же, оценкой показателя Хёрста является тангенс угла наклона прямой в двойном логарифмическом масштабе

$$\log(F_{RS}(s)) = H \log(s).$$

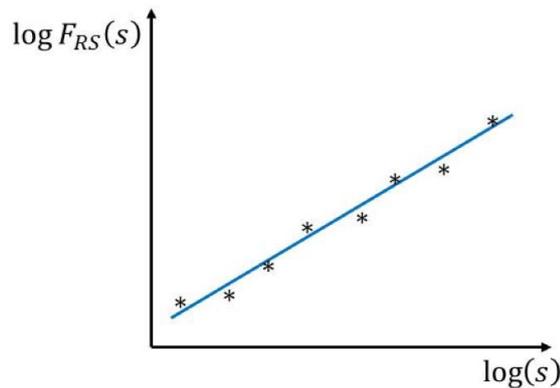


Рис. 36. Аппроксимация значений логарифмов $F_{RS}(s)$ и s .

Что еще дает оценка показателя Хёрста?

1. Наличие или отсутствие корреляций в приращениях значений ряда (если $H = 0,5$, то никаких корреляций в исходном ряду нет; если $H > 0,5$, то имеем персистентный временной ряд; если $H < 0,5$, то имеем временной ряд с антиперсистентностью).

2. Оценка фрактальной размерности $D_0 = 2 - H$.

3. Показатель степенной автокорреляционной функции $\gamma = 2 - 2H$.

Нестационарные ряды. Метод бестрендового флуктуационного анализа

В природе, в большей степени, встречаются нестационарные и мультифрактальные временные ряды. Поэтому подробнее остановимся

на рассмотрении подходов к анализу этих рядов. В зарубежной литературе метод бестрендового флуктуационного анализа еще называют *DFA*-анализом.

Пусть мы имеем нестационарный дискретный временной ряд $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Шаг 1. Из исходного временного ряда строим кумулятивный временной ряд

$$\{Y(j)\} = \left\{ \sum_{i=1}^j (x_i - \langle x_i \rangle_N) \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Шаг 2. Аналогично предыдущему методу, разбиваем $\{Y(j)\}$ непересекающимися отрезками ν длиной s каждый. Получаем $N_s = \lfloor N/s \rfloor$ – число отрезков.

Шаг 3. Для каждого сегмента ν находим локальный тренд $y_\nu(j)$ и отклонение флуктуационного профиля от локального тренда

$$\Delta Y_\nu(j) = Y_\nu(j) - y_\nu(j).$$

Шаг 4. Для каждого сегмента ν находим дисперсию выборки для $\Delta Y_\nu(j)$

$$D_\nu(s) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (\Delta Y_\nu(j))^2.$$

Шаг 5. Усредняем значения дисперсий на каждом сегменте ν , находим функцию флуктуаций

$$F_{DFA}(s) = \sqrt{\frac{1}{N_s - 1} \sum_{\nu=0}^{N_s-1} D_\nu(s)}.$$

Шаг 6. Изменяем s и повторяем шаги 3-5.

Выводы. Если выполняется закон

$$F_{DFA}(s) \cong s^\alpha,$$

то $\{x_i\}$ является масштабно-инвариантным рядом со скейлинговым показателем α . Оценкой скейлинговой экспоненты является тангенс угла наклона прямой в двойном логарифмическом масштабе

$$\log(F_{DFA}(s)) = \alpha \log(s).$$

Что дает оценка скейлингового показателя?

1. Наличие или отсутствие корреляций в приращениях значений ряда (если $\alpha = 0,5$, то никаких корреляций в исходном ряду

нет; если $\alpha > 0,5$, то имеем персистентный временной ряд; если $\alpha < 0,5$, то имеем временной ряд с антиперсистентностью).

2. Оценка фрактальной размерности $D_0 = 2 - \alpha$.

3. Показатель степенной автокорреляционной функции $\gamma = 2 - 2\alpha$. Если $0 < \gamma < 1$, то получаем медленное убывание корреляционной функции, т.е. имеем ряд с длинной памятью.

4. Позволяет определить шум какого вида содержится в исходном временном ряде. Оказывается, если $\alpha \cong 1$, то получаем так называемый «розовый» шум (фликер-шум). Если для временного ряда характерно наличие фликер-шума, то система, что сгенерировала этот временной ряд, склонна к катастрофическим событиям.

5. А вот если $\alpha \cong 1,5$, то получаем так называемый «коричневый» шум.

Метод мультифрактального бестрендового флуктуационного анализа

Имеем дискретный временной ряд $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Шаг 1. Аналогично, из исходного временного ряда строим кумулятивный временной ряд

$$\{Y(j)\} = \left\{ \sum_{i=1}^j (x_i - \langle x_i \rangle_N) \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Шаг 2. Снова разбиваем $\{Y(j)\}$ непересекающимися отрезками v длиной s каждый. Получаем $N_s = [N/s]$ – число отрезков.

В общем случае длина ряда N не кратна длине отрезка v , поэтому процедуру разбиения необходимо повторить в обратном направлении. В результате получаем $2N_s$ сегментов.

Шаг 3. Для каждого сегмента v находим локальный тренд $y_v(j)$ и отклонение флуктуационного профиля от локального тренда

$$\Delta Y_v(j) = Y_v(j) - y_v(j).$$

Шаг 4. Для каждого сегмента v находим дисперсию выборки для $\Delta Y_v(j)$

$$D_v(s) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (\Delta Y_v(j))^2.$$

Шаг 5. Усредняем значения дисперсий на каждом сегменте v , находим функцию флуктуаций

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [D_v(s)]^2 \right\}^{\frac{1}{q}},$$

здесь значение q связано со значением показателя Реньи, с которым мы познакомились ранее.

Шаг 6. Изменяем s и повторяем шаги 3-5.

Выводы. Если выполняется скейлинговый закон

$$F_q(s) \cong s^{h(q)},$$

то $\{x_i\}$ является масштабно-инвариантным рядом со скейлинговым показателем $h(q)$. Оценкой скейлинговой экспоненты является тангенс угла наклона прямой в двойном логарифмическом масштабе

$$\log(F_q(s)) = h(q) \log(s).$$

На рис. 37 представлен пример такой зависимости для биномиального мультифрактального случайного процесса. Как видно, здесь не одна зависимость, а целый набор при разных значениях q .

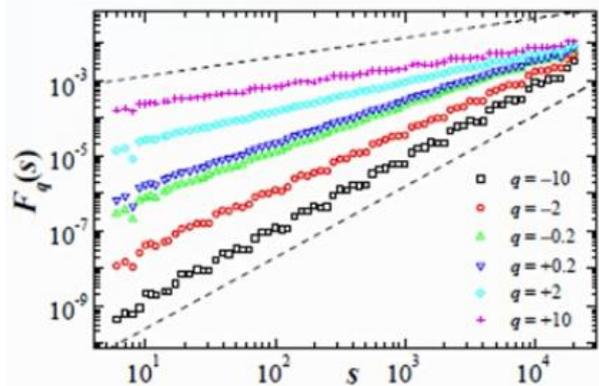


Рис. 37. Оценка скейлинговой экспоненты $h(q)$.

В отличие от монофрактальных рядов, в мультифрактальных рядах скейлинговая экспонента $h(q)$ не единственное числовое значение, а функция от параметра q .

Частные случаи. Если $q > 0$, то основной вклад в функцию $F_q(s)$ дают те интервалы v , проявляющие большие отклонения $D_v(s)$. Как итог, обобщенный скейлинговый показатель $h(q)$ описывает поведение интервалов с большими флуктуациями.

Если $q < 0$, то основной вклад в функцию $F_q(s)$ дают те интервалы v , проявляющие малые отклонения $D_v(s)$. Значит,

обобщенный скейлинговый показатель $h(q)$ описывает поведение интервалов с малыми флуктуациями.

Интервалы повторяемости экстремальных событий

Экстремальные события еще называют катастрофическими событиями. Дело в том, что масштабные инвариантные временные ряды характеризуются наличием экстремальных событий. И важно уметь предсказывать появление таких событий. Что же такое экстремальные события с точки зрения математики?

Катастрофическое (экстремальное) событие – либо неожиданное событие (т.е. его не удастся предсказать), либо экстраординарное событие (т.е. выделяющееся из ряда родственных ему событий), либо и то, и другое сразу. Такое определение используется в рискологии (наука о катастрофах).

Теперь, пусть имеем масштабно-инвариантный дискретный временной ряд $\{x_i\}$, нормированный на нулевое среднее и единичную дисперсию. Поясним, нормированный на нулевое среднее – значит, от каждого значения временного ряда вычитаем среднее значение, а нормированный на единичную дисперсию – значит, делим каждое значение временного ряда на дисперсию временного ряда.

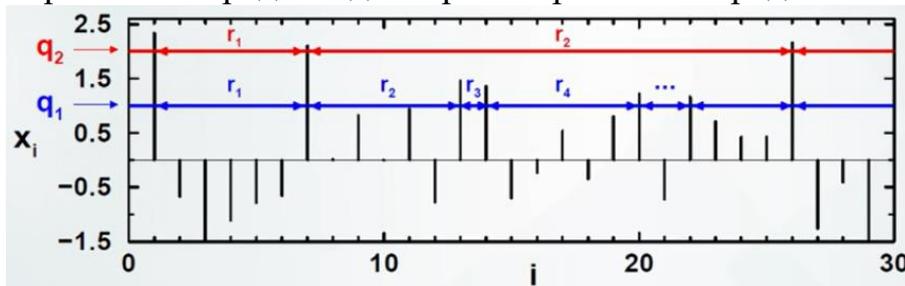


Рис. 38. Пример масштабно-инвариантного временного ряда $\{x_i\}$.

Теперь надо как-то проанализировать эти катастрофические события. Для этого необходимо задать уровень экстремальности события. Обозначим такой уровень через q (это q никак не связано с обозначением из функции флуктуаций предыдущего пункта). Далее через r_q обозначим интервалы повторяемости экстремальных событий (см. рис. 38). Очевидно, что чем выше задается уровень экстремального события, тем больше среднее значение интервалов повторяемости $\langle r_q \rangle$, т.е. $\langle r_q \rangle$ является возрастающей функцией от q .

Для некоррелированных временных рядов ($C(s) = 0$) интервалы повторяемости r_q являются некоррелированными и характеризуются распределением Пуассона

$$P(r_q) = \frac{1}{\langle r_q \rangle} \exp\left(-\frac{r_q}{\langle r_q \rangle}\right).$$

Для коррелированных временных рядов ($C(s) \sim s^{-\gamma}$) интервалы повторяемости r_q характеризуются растянутым экспоненциальным распределением

$$P(r_q) = \frac{a_\gamma}{\langle r_q \rangle} \exp\left(-b_\gamma \left(\frac{r_q}{\langle r_q \rangle}\right)^\gamma\right).$$

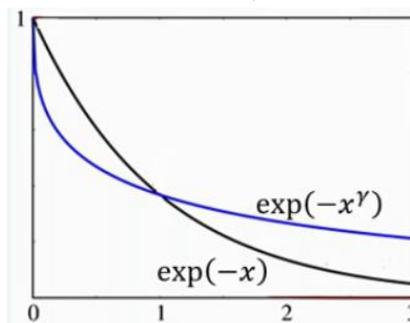


Рис. 39. Сравнение распределения Пуассона с растянутым экспоненциальным распределением.

Можно сказать, что распределение Пуассона компактное (короткий «хвост», см. рис. 39), а растянутое экспоненциальное распределение имеет растянутый (тяжелый) «хвост». С точки зрения сути, это говорит о следующем: вероятность появления экстремального события для распределения Пуассона меньше, чем вероятность появления того же события для растянутого экспоненциального распределения.

Выводы из распределения.

1. Появление интервалов повторяемости экстремальных событий характеризуется значительно большей вероятностью для коррелированных рядов, чем для некоррелированных рядов.

2. Интервалы повторяемости экстремальных событий могут, как значительно превышать среднее значение, так и быть значительно меньше среднего.

3. Закон распределения интервалов повторяемости экстремальных событий характеризуется тем же показателем γ , что и закон распределения исходного ряда.

Вопросы для самоконтроля

Вопрос 1. Необходимым условием появления хаотических решений детерминированной динамической системы
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = h(x, y, z) \end{cases}$$

является

1. зависимость каждой из функций f, g, h от переменных x, y, z ,
2. нелинейность функций f, g, h ,
3. существование производной третьего порядка от функций f, g, h .

Вопрос 2. Одной из особенностей динамической системы
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = h(x, y, z) \end{cases}$$
 способной генерировать хаотические решения, является

1. рост малого начального возмущения,
2. наличие внешних источников шума,
3. наличие бесконечного количества степеней свободы.

Вопрос 3. Одной из особенностей динамической системы
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = h(x, y, z) \end{cases}$$
 способной генерировать хаотические решения, является

1. наличие внешних источников шума,
2. непредсказуемость поведения системы на больших временах,
3. наличие бесконечного количества степеней свободы.

Вопрос 4. Одной из особенностей динамической системы
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = h(x, y, z) \end{cases}$$
 способной генерировать хаотические решения, является

1. наличие внешних источников шума,
2. неустойчивость фазовых траекторий,
3. наличие бесконечного количества степеней свободы.

Вопрос 5. Хаотическое поведение характерно для

1. линейных автономных динамических систем первого порядка с числом степеней свободы $n \geq 3$,
2. нелинейных автономных динамических систем первого порядка с числом степеней свободы $n \geq 3$,
3. нелинейных автономных динамических систем первого порядка с числом степеней свободы $n \geq 2$.

Вопрос 6. Хаотическое поведение характерно для

1. нелинейных неавтономных динамических систем первого порядка с числом степеней свободы $n \geq 2$,
2. линейных неавтономных динамических систем первого порядка с числом степеней свободы $n \geq 2$,
3. нелинейных автономных динамических систем первого порядка с числом степеней свободы $n \geq 1$.

Вопрос 7. В теории динамических систем, диссипативными системами называют системы, для которых

1. объем облака изображающих точек не меняется со временем
2. облако изображающих точек со временем концентрируется на одном или нескольких аттракторах
3. объем облака изображающих точек увеличивается со временем

Вопрос 8. Матрица Гурвица формируется по определенному правилу из

1. коэффициентов характеристического уравнения динамической системы,
2. из фазовых переменных динамической системы,
3. из производных первого порядка от фазовых переменных динамической системы.

Вопрос 9. Критерий Рауса-Гурвица определяет необходимое и достаточное условие

1. асимптотической устойчивости,
2. асимптотически орбитальной устойчивости,
3. чувствительности решений к малым изменениям начальных условий.

Вопрос 10. Отображение Лоренца – это

1. зависимость величины очередного минимума интегральной траектории от предыдущего,
2. зависимость величины очередного максимума интегральной траектории от предыдущего,
3. зависимость величины очередного максимума фазовой траектории от предыдущего.

Вопрос 11. Отображение Лоренца является качественным критерием

1. существования детерминированного хаоса в динамической системе,
2. выхода системы на аттрактор в виде устойчивого узла,
3. выхода системы на аттрактор в виде устойчивого предельного цикла.

Вопрос 12. Качественным признаком выхода динамической системы на хаотический режим является

1. формирование в сечении Пуанкаре точек, принадлежащих некоторой прямой,
2. формирование в сечении Пуанкаре точек, принадлежащих некоторой окружности,
3. формирование в сечении Пуанкаре облака точек..

Вопрос 13. Корреляционная функция является

1. мерой корреляции между двумя значениями интегральной траектории, разделенными некоторым временным интервалом,
2. мерой корреляции между двумя значениями фазовой траектории, разделенными некоторым временным интервалом,
3. мерой корреляции между двумя минимумами интегральной траектории, разделенными некоторым временным интервалом.

Вопрос 14. Одной из особенностей корреляционной функции интегральной траектории системы Лоренца является то, что в хаотическом режиме

1. корреляционная функция медленно убывает,
2. корреляционная функция быстро убывает,
3. корреляционная функция либо постоянна, либо осциллирует.

Вопрос 15. Показатели Ляпунова являются мерой

1. линейного разбегания интегральных траекторий при незначительных изменениях начальных условий,
2. экспоненциального разбегания интегральных траекторий при незначительных изменениях начальных условий,
3. квадратичного разбегания интегральных траекторий при незначительных изменениях начальных условий.

Вопрос 16. Одной из особенностей корреляционной функции интегральной траектории системы Лоренца является то, что в хаотическом режиме

1. отсутствует корреляция между прошлым и будущим,
2. существуют постоянные корреляции между прошлым и будущим,
3. существуют осциллирующие корреляции между прошлым и будущим.

Вопрос 17. Фрактальную размерность, определенную с помощью покрытия данного множества ячейками фиксированной формы и размера, называют

1. топологической размерностью множества,
2. емкостью множества,
3. размерностью вложения.

Вопрос 18. Чему равна топологическая размерность точки?

1. 1,
2. 3,
3. 0.

Вопрос 19. Чему равна топологическая размерность поверхности?

1. 1,
2. 2,
3. 0.

Вопрос 20. Чему равна топологическая размерность линии?

1. 1,
2. 2,
3. 0.

Вопрос 21. Строго стационарным случайным процессом называют случайный процесс, для которого

1. при сдвиге во времени не меняется только математическое ожидание,
2. при сдвиге во времени не меняется только дисперсия,
3. при сдвиге во времени не меняется ни одна из характеристик случайного процесса.

Вопрос 22. Слабо стационарным случайным процессом называют случайный процесс, для которого

1. при сдвиге по времени не меняются все моменты до второго порядка включительно,
2. при сдвиге по времени не меняется только математическое ожидание,
3. при сдвиге по времени не меняется только дисперсия.

Вопрос 23. Броуновский случайный процесс – это процесс

1. с нормально распределенными зависимыми приращениями,
2. с равномерно распределенными зависимыми приращениями,
3. с нормально распределенными независимыми приращениями.

Вопрос 24. Для броуновского случайного процесса

1. дисперсия зависит от разности моментов времени, математическое ожидание равно нулю,
2. дисперсия зависит от квадрата разности моментов времени, математическое ожидание равно нулю,
3. дисперсия зависит от разности квадратов моментов времени, математическое ожидание равно нулю.

Вопрос 25. Для броуновского случайного процесса

1. статистическая идентичность (равенство функций распределения) достигается различным масштабированием реализации: по оси времени в \sqrt{c} раз, по оси значений – в c раз,
2. статистическая идентичность (равенство функций распределения) достигается различным масштабированием реализации: по оси времени в c раз, по оси значений – в \sqrt{c} раз,
3. не существует статистической идентичности.

Вопрос 26. Обобщенный броуновский процесс – это процесс

1. с независимыми приращениями,
2. с независимыми от времени приращениями,

3. с зависимыми приращениями.

Вопрос 27. Для временных рядов с длинной памятью интервалы повторяемости экстремальных событий r_q характеризуются

1. экспоненциальным распределением,
2. растянутым экспоненциальным распределением,
3. равномерным распределением.

Заключение

Вот и подошли мы к концу. Надеюсь, материал, предложенный вашему вниманию, был интересным и полезным. Мы с вами ознакомились с основными понятиями теории бифуркаций, изучили определение динамической системы и детально разобрали на примерах прикладные случаи, описываемые этими системами. Мы установили, что такие динамические системы могут иметь три типа установившихся режимов поведения: состояние равновесия, периодическое движение и хаотическое. Этим типам решений соответствуют аттракторы системы в виде устойчивой (или неустойчивой) точки равновесия, предельного цикла и хаотического или странного аттрактора. Важным является то, что простейшие типы хаотических аттракторов могут реализовываться в динамических системах с размерностью фазового пространства на менее трех.

Так же мы кратко и в несколько упрощенном виде привели основные представления и методы теории устойчивости. Главное внимание было уделено линейному анализу устойчивости траекторий. Теория устойчивости имеет огромное значение для нелинейных динамических систем. Исследование устойчивости траекторий позволяет определить характер системы и качественно представить ее фазовый портрет. Кроме того, изменение характера устойчивости траекторий при изменении параметров системы позволяет диагностировать бифуркацию – явление, состоящее в качественной перестройке фазового портрета динамической системы. И конечно, мы познакомились с основными типами бифуркаций, возникающих в динамических системах.

Естественно, что представленная вашему вниманию информация не исчерпывает все результаты, достигнутые в теории бифуркаций. Но в данном пособии мне хотелось рассказать вам об основах и азах этой теории, чтобы заинтересовать и предложить продолжить знакомство с этой, несомненно, интересной теорией.

Список литературы

1. Дмитриев А.В. Регулярная и хаотическая динамика социально-экономических систем. – М.-Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2016.
2. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: хаос, структуры, вычислительный эксперимент. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
3. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2016.
4. Вовк И.В., Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Дюжина лекций о фракталах: от объекта восхищения к инструменту познания. – М.: ЛЕНАНД, 2018.
5. Олемской А.И. Синергетика сложных систем: феноменология и статистическая теория. – М.: КРАСАНД, 2009.
6. Онлайн-курс «Моделирование процессов и систем. Нелинейные динамические системы» на образовательной платформе «Открытое образование» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://openedu.ru/course/hse/MODSYS>. – Загл. с экрана.
7. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
8. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций. Современные направления математики. Фундаментальные направления, т.5 (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР). – М.: Мир, 1985, С.5-218.
9. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
10. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002. – 560 с
11. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
12. Kuznetsov Y.A. Elements of applied bifurcation theory – New York. Springer-Verlag, 1998
13. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: Едоториал УРСС, 2004. . – 318с.
14. Семенова Е.Е. Математические модели нелинейной динамики (Введение в синергетику) [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://math-it.petrso.ru/users/semenova/Nonlinear_Dynamics/

**Методические рекомендации и задания к занятиям по
дисциплине «Элементы теории бифуркаций. Часть 2. Теория хаоса»:
учебно-методическое пособие**

Автор-составитель: Хазова Юлия Александровна

Редактор

Подписано в печать2019. Формат 60×80/16.
Тираж: 100 экз.

Отпечатано в отделе редакционно-издательской деятельности
КФУ им. В. И. Вернадского
295007, Симферополь, пр-т Академика Вернадского, 4,
КФУ им. В. И. Вернадского