МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО»
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ (ФИЛИАЛ) В Г. ЯЛТЕ

Теория вероятностей

Организация самостоятельной работы обучающихся

Е.П. ЛИННИК, С.А. МЕЛЬНИК

Ялта 2018

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»

Гуманитарно-педагогическая академия (филиал) в г. Ялте

УТВЕРЖДЕНО
На заседании кафедры математики,
теории и методики обучения математике
Протокол № 10 от 26.02.2018 г.

Ялта 2018

УДК 517 (073.8)

ББК Л 51
Печатается по решению ученого совета Гуманитарно-педагогической академии (филиал) в г. Ялте, ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского» (протокол № 8 от 24.09.2018 г.)

Рецензенты:
Алтухов Е.В., кандидат физ.-маю. наук, доцент
Качанова И.А., кандидат физ.-мат. наук, доцент

Линник Е.П., Мельник С.А.
Теория вероятностей: Организация самостоятельной работы обучающихся. Учеб.-метод. пособие для студентов математических и экономических специальностей университетов. / Е.П. Линник, С.А. Мельник. - Симферополь: ИТ «Ариал», 2018. - 58 с.
Аннотация. Учебно-методическое пособие состоит из основной части и приложения. Основная часть предназначена для самостоятельной работы обучающихся. Приложение предназначено для контроля преподавателем хода и результатов выполнения индивидуальных заданий обучающимися. Основная часть содержит индивидуальные задания для обучающихся, рекомендации по их выполнению и перечень рекомендованной литературы. Индивидуальные задания представлены в двадцати вариантах. Каждый вариант состоит из двух задач по разделу «Теория вероятностей». Задачи относятся к категории задач комплексного типа, так как при их решении требуется применение комплекса понятий, формул и методов. Методические рекомендации к выполнению индивидуальных заданий и перечень рекомендованной литературы имеют целью сориентировать обучающегося в теоретическом материале и направить его усилия на разработку алгоритмов решения предложенных задач. Приложение к методическим рекомендациям содержит решения индивидуальных заданий, рекомендации по организации выполнения обучающимися индивидуальных заданий, методику текущего контроля хода выполнения заданий и методику итогового оценивания результатов выполнения заданий. Предлагаемые индивидуальные задания нацелены на формирование у обучающихся знаний и умений по теории вероятностей на базовом уровне.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к классическим дисциплинам университетского цикла образования. Она включена в учебные планы многих направлений естественно-научного, экономического, социологического и других направлений подготовки специалистов. Данная дисциплина разделяется на два взаимосвязанных раздела: теорию вероятностей и математическую статистику, которые последовательно изучаются один за другим. Учебно-методическая литература по этой дисциплине представлена широким набором учебников, задачников, методических пособий, руководств к решению задач и другими материалами, написанными ведущими учёными и методистами. Эта дисциплина относится к категории сложных высокоуровневых наук. В процессе её изучения необходимо применять комплекс знаний из смежных дисциплин: теории множеств, алгебры, комбинаторики, математического анализа, теории меры и т. д. При этом в учебных планах большинства специальностей на изучение теории вероятностей и математической статистики отводится 2 – 4 часа аудиторного времени в неделю на протяжении двух семестров. В таких условиях обучающиеся под руководством преподавателя (даже с учётом систематического выполнения текущих домашних заданий) как правило ограничиваются решением типовых задач, направленных на выработку навыков применения конкретных формул и правил. Однако, большинство теоретико-вероятностных задач, встречающихся на практике, являются комплексными и требуют умения применять в комплексе как теорию вероятностей, так и методы математической статистики. Одной из методик формирования у обучающегося комплекса знаний по предмету является методика консультационного сопровождения процесса выполнения обучающимся индивидуального задания в процессе изучения дисциплины. При таком подходе аудиторные занятия и текущие домашние задания формируют знания теории предмета и вырабатывают навыки применения конкретных формул и алгоритмов. Параллельно с этим, обучающийся, выполняя индивидуальное задание в отведённое для самостоятельной работы внеаудиторное время, дозировано осваивает методику комплексного применения отдельных инструментов. На решение этой методической **задачи** и направлены предлагаемые методические рекомендации.

Данное методическое пособие разработано для достижения следующих **целей**:

– формирование у обучающего навыков самостоятельной работы с учебно-методической литературой;
– выработка умения математически строго формулировать поставленную задачу и обосновывать правомерность применения математического аппарата при её решении;
– выработка умения разрабатывать и реализовывать план комплексного применения теоретических знаний при решении поставленной задачи.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 3 руб., а игрок В - 5 руб.. Из коробки, содержащей четыре карточки на которых написаны числа 1, 2, 3, 4, игрок А берет наугад карточку, записывает увиденное число и возвращает карточку обратно в коробку. Игрок В из той же коробки берет наугад карточку, записывает полученное число и возвращает карточку в коробку. Если произведение полученных чисел меньше 4, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если произведение больше 4, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. Если произведение равно 4, то результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Цех производит некоторое изделие. Средний процент брака среди выпускаемых изделий равен 3%. На пункт контроля качества изделия поступают партиями по 1000 штук. Для контроля из каждой партии безвозвратно извлекают наудачу контрольную выборку объёмом 50 экземпляров. Если в контрольной выборке нет бракованных изделий, то партия признаётся качественной и 950 изделий направляются потребителю. В противном случае партия отправляется на пересортировку. Какова вероятность того, что в партии, прошедшей контроль и направленной потребителю, процент брака окажется выше среднего?

Каков ожидаемый средний процент бракованных изделий, попавших к потребителю?

Вариант 2

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 4 руб., а игрок В - 5 руб.. Из коробки, содержащей два белых, один черный и один красный шар, игрок А берет наугад один шар. Игрок В из коробки, содержащей один белый и два черных шара, берет наугад один шар. Если шары одного цвета, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если один шар белый, а другой черный, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. Если среди вынутых шаров есть красный, то результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

На телефонной станции работает коммутационный узел, осуществляющий соединение вызывающего абонента с вызываемым. В силу воздействия различных случайных факторов узел может производить неправильные соединения. Средний процент неправильных соединений равен 2%. Какова вероятность того, что первое неправильное соединение произойдёт не ранее, чем при сотом вызове? Каково ожидаемое среднее количество правильных соединений до первого неправильного?

Вариант 3

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 3 руб., а игрок В - 2 руб.. Из коробки, содержащей четыре карточки на которых написаны числа 1, 2, 3, 4, игрок А берет наугад карточку, записывает увиденное число и возвращает карточку обратно в коробку. Игрок В из той же коробки берет наугад карточку, записывает полученное число и возвращает карточку в коробку. Если произведение полученных чисел больше 6, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если произведение меньше 4, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. Если произведение больше или равно 4 и меньше или равно 6, то результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что А победит?

2.Какова вероятность того, что В выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

На телефонной станции работает коммутационный узел, осуществляющий соединение вызывающего абонента с вызываемым. В силу воздействия различных случайных факторов узел может производить неправильные соединения. Средний процент неправильных соединений равен 3%. После каждого третьего неправильного соединения узел подвергается профилактике. Какова вероятность того, что за период между двумя очередными профилактиками узел произведёт не менее 100 правильных соединений? Каково ожидаемое среднее количество правильных соединений, производимых узлом между двумя профилактиками?

Вариант 4

Задача 1

Игроки A и B играют в такую игру. Игрок A делает ставку 4 руб., а игрок B - 5 руб.. Из коробки, содержащей два белых, один черный и два красных шара, игрок A берет наугад один шар. Игрок B из коробки, содержащей один белый и два черных шара, берет наугад один шар. Если шары одного цвета, то побеждает A и он забирает весь призовой фонд. Если один шар белый, а другой черный, то побеждает B и он забирает весь призовой фонд. Если среди вынутых шаров есть красный, то результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что B победит?

2.Какова вероятность того, что A выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Предприятие производит изделия, которые могут содержать скрытые дефекты, выявляемые лишь в процессе эксплуатации. Средний процент дефектных изделий равен 1.5%. Изделия упаковывают в тару по 20 штук. Какова доля упаковок, содержащих не более одного дефектного изделия? Каково ожидаемое среднее количество дефектных изделий в одной упаковке?

Вариант 5

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 3 руб., а игрок В - 5 руб.. Из коробки, содержащей четыре карточки на которых написаны числа 1, 2, 3, 4, игрок А берет наугад карточку, записывает увиденное число и возвращает карточку обратно в коробку. Игрок В из той же коробки берет наугад карточку, записывает полученное число и возвращает карточку в коробку. Если сумма полученных чисел делится на 4, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если сумма делится на 3, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. Если сумма не делится ни на 4 ни на 3, то результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

На автомойку поступает простейший поток клиентов. Средний интервал между приездом двух очередных клиентов равен 1/3 часа. Клиенты, приехавшие на мойку в тот период, когда мойка занята, становятся в очередь. Какова вероятность того, что за три часа работы на мойку поступит не менее 10 машин? Каково ожидаемое среднее количество машин, поступающих на мойку за 3 часа?

Вариант 6

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 3 руб., игрок В делает ставку 4 руб.. Один раз подбрасывают три монеты - одна достоинством 1 руб. и две достоинством 5 руб.. Результатом эксперимента считается сумма цифр, выпавших на монетах (если выпал герб, то считают, что выпал 0). Если сумма оказалась четной, то побеждает А и забирает весь призовой фонд. Если сумма оказалась нечетной, то побеждает В и забирает весь призовой фонд. Если все три монеты упали гербом вверх, то результат считается ничейным и игроки делят призовой фонд поровну. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Предприятие приобрело электронный прибор. Время безотказной работы подобных приборов случайно и имеет показательное распределение. Среднее время безотказной работы приборов данного типа и данного производителя равно 8 тысяч часов непрерывной работы. Какова вероятность того, что данный прибор проработает безотказно не менее среднего времени безотказной работы? Какой гарантийный срок следует установить производителю, чтобы ожидаемый процент приборов, не выдержавших срок гарантии, не превышал 5%?

Вариант 7

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 3 руб., а игрок В - 7 руб.. Одновременно подбрасывают два кубика. Если произведение чисел, выпавших на верхних гранях кубиков, меньше 6, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если произведение больше 6, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. В остальных случаях результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Для повышения надёжности работы электронной схемы её основной элемент продублировали таким же элементом. Когда основной элемент выходит из строя, мгновенно включается его дублёр. Время безотказной работы элемента схемы случайно и имеет показательное распределение. Среднее время безотказной работы одного элемента равно 2 тысячи часов. Какова вероятность того, что схема безотказно проработает не менее 5 тысяч часов? Какой срок схема проработает безотказно с гарантией не ниже 0.9?

Вариант 8

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 2 руб., а игрок В - 4 руб.. Одновременно подбрасывают два кубика. Если произведение чисел, выпавших на верхних гранях кубиков, больше 15, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если произведение меньше 10, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. В остальных случаях результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Предприятие производит шарики для подшипников. Стандартный диаметр выпускаемых шариков равен 1 см. В силу влияния случайных факторов диаметры шариков слегка отклоняются от стандартного в большую или в меньшую сторону. Величина отклонения не содержит систематических отклонений и имеет нормальное распределение. Среднеквадратический разброс диаметров равен 0.1 см. Какова доля шариков, диаметры которых отклоняются от стандартного более, чем на 0.1 см? В каких пределах должно находиться отклонение диаметра шарика от стандартного, чтобы процент шариков с такими диаметрами составлял не менее 90% объёма выпуска?

Вариант 9

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 6 руб., а игрок В - 3 руб.. Одновременно подбрасывают два кубика. Если сумма чисел, выпавших на верхних гранях кубиков, больше 8, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если сумма меньше 5, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. В остальных случаях результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Договором страхования предусматривается выплата двух видов страхового возмещения в случае ДТП: возмещение ущерба, понесённого клиентом, и возмещение ущерба, причиненного клиентом другим лицам. Размер страхового возмещения по каждому из видов не может превышать 1000 руб. Любой размер страхового возмещения по каждому из видов равновозможен в пределах указанной суммы. Какова вероятность того, что суммарный размер страхового возмещения по одному ДТП не превысит 500 руб? Каков ожидаемый средний размер суммарного страхового возмещения?

Вариант 10

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 2 руб., игрок В делает ставку 3 руб.. Один раз подбрасывают три монеты достоинством 1 руб., 5 руб. и 10 руб. Результатом эксперимента считается сумма цифр, выпавших на монетах (если выпал герб, то считают, что выпал 0). Если сумма оказалась четной, то побеждает А и забирает весь призовой фонд. Если сумма оказалась нечетной, то побеждает В и забирает весь призовой фонд. Если все три монеты упали гербом вверх, то результат считается ничейным и игроки делят призовой фонд поровну. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Для увеличения срока службы электрической лампочки к ней последовательно подключили ещё одну такую же. Время безотказной работы лампочки случайно и имеет показательное распределение. Среднее время безотказной работы одной лампочки данного типа, включенной в такую схему, равно 8 тысяч часов непрерывной работы. Какова вероятность того, что эта схема из двух последовательно соединенных ламп проработает безотказно не менее 10 тысяч часов непрерывной работы? Какой срок схема проработает безотказно с гарантией не ниже 0.9?

Вариант 11

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 3 руб., а игрок В - 5 руб.. Из коробки, содержащей четыре карточки на которых написаны числа 1, 2, 3, 4, игрок А берет наугад карточку, записывает увиденное число и не возвращает карточку обратно в коробку. Игрок В из той же коробки берет наугад карточку и записывает полученное число. Если произведение полученных чисел меньше 4, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если произведение больше 4, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. Если произведение равно 4, то результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что А победит?

2.Какова вероятность того, что В выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Игроки А и В играют в такую игру. Одновременно бросают два игральных кубика. Если оба числа, выпавшие на верхних гранях кубиков, больше 4, то побеждает А. Если оба числа, выпавшие на верхних гранях кубиков, меньше 3, то побеждает В. Если в результате очередного бросания кубиков победитель не выявлен, то кубики бросают ещё раз. Игра продолжается до победы одного из участников. Какова вероятность того, что игра закончится на 9-ом броске? Каково ожидаемое среднее количество сыгранных туров? Какова вероятность того, что сыгранное количество туров окажется больше ожидаемого среднего количества?

Вариант 12

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 4 руб., а игрок В - 5 руб.. Имеются две коробки с шарами: одна содержит два белых, один черный и один красный шар, другая содержит один белый и два черных шара. Игрок А наугад выбирает одну из коробок и из неё наугад берёт один шар. Игрок В берёт из оставшейся коробки наугад один шар. Если шары одного цвета, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если один шар белый, а другой черный, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. Если среди вынутых шаров есть красный, то результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Ракетная установка стреляет по цели выпуская ракеты по одной. Точность стрельбы данной установки такова, что средний процент попаданий при одном выстреле равен 95%. Запас ракет равен 10 штук. Стрельба ведётся либо до первого попадания, либо до использования всего запаса. Какова вероятность того, что цель будет поражена с первого выстрела? Какова вероятность того, что будет израсходован весь запас? Каково ожидаемое среднее количество ракет, которое использует установка за одну серию стрельбы?

Вариант 13

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 3 руб., а игрок В - 5 руб.. Из коробки, содержащей четыре карточки на которых написаны числа 1, 2, 3, 4, игрок А берет наугад карточку, записывает увиденное число и не возвращает карточку обратно в коробку. Игрок В из той же коробки берет наугад карточку и записывает полученное число. Если произведение полученных чисел больше 6, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если произведение меньше 6, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. Если произведение равно 6, то результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что А победит?

2.Какова вероятность того, что В выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Стрелки А и В соревнуются в точности стрельбы по цели. Стрелок А в среднем попадает в цель в 95 случаях из 100. Стрелок В попадает в цель среднем в 96 случаях из 100. Стрелки стреляют по очереди до чьего-либо первого промаха. Промахнувшийся считается проигравшим. Первым стреляет А. Какова вероятность того, что А допустит первый промах на 7- й пуле? Какова вероятность того, что А использует n штук пуль? Каково ожидаемое среднее количество пуль, израсходованных стрелком А?

Вариант 14

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 4 руб., а игрок В - 10 руб.. Имеются две коробки с шарами: одна содержит два белых, один черный и два красных шара, другая содержит один белый и два черных шара. Игрок А наугад выбирает одну из коробок и из неё наугад берёт один шар. Игрок В берёт из оставшейся коробки наугад один шар. Если шары одного цвета, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если один шар белый, а другой черный, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. Если среди вынутых шаров есть красный, то результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

По каналу связи передаются серии из 100 независимых сигналов. Сигналы могут подвергаться искажениям из-за помех. Средний процент искаженных сигналов для данных условий связи равен 2%. Какова ожидаемая доля серий сигналов, переданных без искажений? Каково ожидаемое среднее количество искаженных сигналов в одной серии?

Вариант 15

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 2 руб., а игрок В - 6 руб.. Из коробки, содержащей два белых, один черный и два красных шара, игрок А берет наугад два шара. Игрок В из коробки, содержащей один белый и два черных шара, берет наугад один шар. Если все три шара одного цвета, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если среди вынутых шаров есть белые, есть чёрные, но нет красных, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. Если среди вынутых шаров есть красный, то результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

К услугам данного банкомата обращаются в среднем 12 клиентов в час. Поток клиентов простейший. Каждые 8 часов банкомат проверяет служащий банка. Какова вероятность того, что за время между проверками к услугам банкомата обратятся менее 100 клиентов? Каково ожидаемое среднее количество клиентов, обращающихся в банкомат за время между проверками?

Вариант 16

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 3 руб., а игрок В - 5 руб.. Из коробки, содержащей четыре карточки на которых написаны числа 1, 2, 3, 4, игрок А берет наугад карточку, записывает увиденное число и не возвращает карточку обратно в коробку. Игрок В из той же коробки берет наугад карточку и записывает полученное число. Если сумма полученных чисел делится на 4, то побеждает А и он забирает весь призовой фонд. Если сумма полученных чисел делится на 3, то побеждает В и он забирает весь призовой фонд. В иных случаях результат считается ничейным и каждый игрок получает половину призового фонда. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что А победит?

2.Какова вероятность того, что В выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Предприятие производит приборы. В процессе эксплуатации такой прибор постоянно находится в рабочем состоянии. Время безотказной работы конкретного прибора случайно и имеет показательное распределение. Ожидаемое среднее время безотказной работа такого прибора равно 6 тысяч часов. Какова ожидаемая средняя доля приборов данного типа, работающих безотказно дольше ожидаемого среднего времени безотказной работы? Какой гарантийный срок следует установить для таких приборов, чтобы ожидаемый процент приборов, не выдержавших гарантийных срок, не превышал 5%?

Вариант 17

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 8 руб., игрок В делает ставку 4 руб.. Игрок А наугад выбирает одну из монет достоинством 1 руб., 5 руб. или 10 руб и подбрасывает её. Записывают выпавшее число (если монета упала гербом вверх, то считают, что выпало число 0). Игрок В наугад выбирает одну из монет достоинством 1 руб., 2 руб. или 5 руб. и подбрасывает её. Записывают выпавшее число. Результатом эксперимента считается сумма чисел, выпавших на монетах. Если сумма оказалась меньше 5, то побеждает А и забирает весь призовой фонд. Если сумма оказалась больше 5, то побеждает В и забирает весь призовой фонд. Если сумма оказалась равной 5, то результат считается ничейным и игроки делят призовой фонд поровну. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Прибор постоянно включен в электрическую сеть. В случайные моменты времени в сети возникают мгновенные пиковые напряжения. Поток таких моментов простейший. Средняя продолжительность интервала между такими моментами равна 12 часов. Вероятность того, что прибор не выдержит перегрузку и выйдет из строя равна 0.1. Какова вероятность того, что прибор проработает безотказно не менее 120 часов? Каково ожидаемое среднее время безотказной работы прибора?

Вариант 18

Задача 1

Игроки A и B играют в такую игру. Игрок A делает ставку 5 руб., игрок B делает ставку 6 руб.. Игрок A наугад выбирает одну из монет достоинством 1 руб., 5 руб. или 10 руб и подбрасывает её. Записывают выпавшее число (если монета упала гербом вверх, то считают, что выпало число 0). Игрок B наугад выбирает одну из монет достоинством 1 руб., 2 руб. или 5 руб. и подбрасывает её. Записывают выпавшее число. Результатом эксперимента считается произведение чисел, выпавших на монетах. Если произведение оказалось положительным, но меньше либо равно 5, то побеждает A и забирает весь призовой фонд. Если произведение оказалось больше 5, то побеждает B и забирает весь призовой фонд. Если произведение оказалось равно 0, то результат считается ничейным и игроки делят призовой фонд поровну. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что B победит?

2.Какова вероятность того, что A выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Деталь, изготавливаемая автоматом, считается качественной, если её контролируемый показатель отклонился от шаблонного значения не более, чем на 10 единиц. Случайные отклонения контролируемого показателя от шаблонного значения не имеет систематических погрешностей и имеют нормальное распределение со среднеквадратическим отклонением 5 единиц. Каков ожидаемый средний процент качественных деталей, изготавливаемых автоматом? В каких пределах находится отклонение от шаблона ля 99% деталей?

Вариант 19

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 5 руб., игрок В делает ставку 7 руб.. Для игры используют сосуд, имеющий форму прямого параллелепипеда. Дно сосуда представляет собой квадрат со стороной $H=10$ *см.* Внутри сосуда на дне начерчен квадрат со стороной $h=4$ *см,* стороны которого параллельны стенкам сосуда и равноудалены от них. На дно сосуда наудачу бросают монету диаметра $d=2$ *см.* Если монета целиком разместилась внутри меньшего квадрата, то победителем объявляется игрок А и он забирает весь призовой фонд. Если монета коснулась или пересекла стороны меньшего квадрата, то объявляется ничья и призовой фонд делится поровну между игроками. В остальных случаях победителем объявляется игрок В и он задирает весь призовой фонд. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Защитный слой бетона в строительных конструкциях в процессе эксплуатации предохраняет арматуру от коррозии, что является важным фактором в обеспечении ее долговечности. Отклонения толщины защитного слоя от проектных значений происходят в связи с технологическими трудностями, возникающими при изготовлении железобетонных конструкций. Изменение толщины защитного слоя бетона в плитах перекрытий соответствует нормальному закону распределения со среднеквадратическим отклонением *1.1 мм* и средним значением *+16 мм*. Проектное значение толщины плиты равно *200 мм.*

1. Каков ожидаемый средний процент плит, толщина

которых находится в пределах *215 мм – 218 мм*?

2. Какова верхняя граница, которую толщина плит не превысит с гарантией 90%?

Вариант 20

Задача 1

Игроки А и В играют в такую игру. Игрок А делает ставку 5 руб., игрок В делает ставку 7 руб.. Для игры используют сосуд, имеющий форму прямого цилиндра. Дно сосуда представляет собой круг диаметром *G=10 см.* Внутри сосуда на дне начерчен круг диаметра *g=4 см,* который расположен концентрично с дном. На дно сосуда наудачу бросают монету диаметра *d=2 см.* Если монета целиком разместилась внутри меньшего круга, то победителем объявляется игрок А и он забирает весь призовой фонд. Если монета коснулась или пересекла окружность, то объявляется ничья и призовой фонд делится поровну между игроками. В остальных случаях победителем объявляется игрок В и он задирает весь призовой фонд. Ответьте на следующие вопросы.

1.Какова вероятность того, что В победит?

2.Какова вероятность того, что А выиграет больше, чем поставил?

3.Какова ожидаемая средняя прибыль каждого игрока?

Задача 2

Для для повышения надёжности работы аварийного датчика к нему параллельно подключили ещё один такой же. Время безотказной работы датчика случайно и имеет показательное распределение. Среднее время безотказной работы одного датчика данного типа, включенного в такую схему, равно 8 тысяч часов непрерывной работы. Какова вероятность того, что эта схема проработает безотказно не менее 10 тысяч часов непрерывной работы? Какой срок схема проработает безотказно с гарантией не ниже 0.9?

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ 1

При решении задачи используется ряд понятий, формул и теорем из классических разделов теории вероятностей. Поэтому, прежде чем приступить к решению первой задачи, целесообразно повторить основные положения теории и выполнить тренировочные упражнения. Рекомендуется изучить [1, с. 18-26], [4, гл. I, § 3]. При этом следует обратить особое внимание на определения: множества элементарных исходов, вероятностного пространства стохастического эксперимента, классического и геометрического определения вероятности. Обучающимся, решающим варианты 19 и 20, необходимо повторить геометрическое определение вероятности [1, с. 27-30], [4, гл. I, § 5]. Решение данной задачи целесообразно начать с построения множества элементарных исходов для стохастического эксперимента, описанного в условии задачи. Затем следует установить является ли построенное множество конечным или оно бесконечно. На следующем шаге необходимо определить являются ли исходы одинаково возможными. После этого, основываясь на проведенных исследованиях, необходимо выбрать то определение вероятности случайного события, которое соответствует выявленным характеристикам эксперимента.

При применении классического определения вероятности следует учесть, что построенное множество элементарных исходов должно удовлетворять следующим требованиям.

1) Оно должно состоять из *конечного* количества исходов.
2) В состав множества должны входить только *элементарные* исходы.
3) Перечень элементарных исходов должен быть

исчерпывающим.

4) Все элементарные исходы должны быть *одинаково возможными*.

Для расчёта вероятностей с помощью классического определения вероятности целесообразно повторить основные формулы комбинаторики [1, с. 22-23], [4, гл. I, § 2]. В качестве тренировочных упражнений полезно решить задачи 11 и 17 из задачника [2].

При применении геометрического определения вероятности следует учесть, что построенное множество элементарных исходов должно удовлетворять следующим требованиям.

1) Оно может быть *бесконечным* и даже *несчётным*, но должно иметь конечную меру (длину, площадь, объём).
2) В состав множества должны входить только *элементарные* исходы.
3) Это множество должно содержать *все* элементарные исходы.
4) Все элементарные исходы должны быть *одинаково возможными*.

Для расчёта вероятностей с помощью геометрического определения вероятности целесообразно выполнить тренировочные упражнения решив задачи 28 и 29 из задачника [2].

В задачах 1 помимо расчёта вероятностей победы игроков необходимо вычислить ожидаемые средние прибыли игроков за один тур. Поскольку игра имеет финансовый характер, именно средние прибыли являются основной целью проводимых расчётов так как они указывают кому выгодны установленные правила игры. В данной игре величины прибыли игроков являются случайными величинами, определёнными на множестве элементарных исходов. С точки зрения теории вероятностей ожидаемая средняя прибыль игрока является математическим ожиданием величины прибыли этого игрока. Для вычисления математического ожидания случайной величины необходимо знать закон распределения этой величины. Условием задачи законы распределения прибыли игроков не заданы и их нужно построить. Для повторения типов случайных величин, способов задания их законов распределения в вычисления числовых характеристик рекомендуется изучить [5, пункты 5.1 – 5.6]. Следует обратить внимание на то, что как для дискретных, так и для абсолютно непрерывных случайных величин существует несколько способов задания законов их распределения. Для решения задач 1 рекомендуется построить распределения прибылей игроков в форме ряда распределения. Такая форма задания закона распределения наиболее удобна для вычисления математических ожиданий в рассматриваемых задачах. В качестве тренировочных упражнений полезно решить задачи 170 и 188 из задачника [2].

Завершает решение задачи формирование ответа. Ответ должен представлять собой развёрнутые ответы на все вопросы, поставленные в условии задачи. На основе проведенных исследований должен быть сформулирован общий вывод: кому из игроков выгодны предложенные условия игры и почему.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение элементарного и не элементарного исхода стохастического эксперимента. Приведите примеры элементарных и не элементарных исходов в вашей задаче.
2. Сформулируйте классическое определение вероятности. Для каждого из условий этого определения укажите в условии вашей задачи те части, которые обеспечивают выполнение данного

условия.

3. Сформулируйте геометрическое определение вероятности. Для каждого из условий этого определения укажите в условии вашей задачи те части, которые обеспечивают выполнение данного условия.
4. Сформулируйте определение случайной величины и закона распределения случайной величины.
5. Какие бывают типы случайных величин. К какому типу случайных величин относится прибыль игрока в вашей задаче?
6. Назовите способы задания законов распределения случайных величин того типа, к которому относится закон распределения прибыли в вашей задаче. Какой способ вы выбрали для решения задачи и почему?
7. Перечислите способы вычисления математического ожидания случайных величин. Какой вы выбрали и почему?
8. Перечислите свойства математических ожиданий. Каковы величины ожидаемой средней прибыли игроков в вашей задаче по итогам трёх туров?
9. Является ли игра, описанная в вашей задаче, справедливой? Кому она не выгодна и почему? Какую игру следует считать справедливой?
10. Может ли игрок, для которого игра не выгодна, так изменить свою ставку так, чтобы сделать игру справедливой (при условии, что условия эксперимента не меняются и ставка его соперника остаётся неизменной)?

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ 2

В отличие от задач № 1, задачи № 2 существенно различаются по методам их решения. Поэтому, рекомендации по их решению будут даны для каждого варианта индивидуально. Справочная информация представлена в справочнике [3].

Вариант 1. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Вычислить вероятность события A_n = {количество бракованных изделий в партии из 1000 штук равняется n}.
2. Вычислить вероятность события B_n= {количество бракованных изделий в партии, попавшей к потребителю, равно n}.
3. Обозначим v – возможное количество бракованных изделий, оказавшихся в партии, попавшей к потребителю. Тогда вероятности $P\{v=n\}=P(B_n)$ задают закон распределения случайной величины v. Следовательно для получения ответов на вопросы задачи необходимо вычислить: Ev, $P\{v>Ev\}$, $100\ Ev/950$ (%).

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***биномиальное распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 66], [4, с. 60-61], [2, с. 37], [6, с. 20].

При реализации пункта 2 потребуется применить формулу условной вероятности [1, с. 38-40], [2, с. 19], [6, с. 13]. Пусть H = {в контрольной выборке нет бракованных изделий}. Тогда $B_n = \mathrm{H} \cap A_n$. Используя формулу условной вероятности вычислить $P(B_n)=P\{H|A_n\}P(A_n)$.

При реализации пункта 3 потребуются умения вычислять математическое ожидание случайной величины и применять терему сложения вероятностей.

Для вычисления Ev рекомендуется изучить материал [1, с. 83], [4, с. 72-74] и воспользоваться решением примера 2 [4, с. 74].

Для вычисления $P\{v>Ev\}$ рекомендуется применить теорему сложения вероятностей [1, с. 31-33] и соответствующей формулой из [4, с. 37-40], [6, с. 15].

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения биномиального распределения?
2. Появление какого события следует считать успехом в вашей задаче?
3. Каковы условия применимости формулы условной вероятности?
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей нескольких событий в случае совместимых и в случае несовместимых событий. Какой из этих вариантов применили вы и почему?
5. Вычислите Ev самостоятельно.

Вариант 2. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим v – номер того соединения, при котором впервые произойдёт сбой. Определить закон распределения случайной величины v, то есть вычислить $P\{v=n\}$.
2. Вычислить $P\{v\geq 100\}$.
3. Вычислить $E(v-1)$.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***геометрическое распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 72], [4, с. 61-62].

При реализации пункта 2 потребуется применить теорему сложения вероятностей [1, с. 31-33], [4, с. 37-40].

Для вычисления $E(v\text{-}1)$ рекомендуется изучить материал [1, с. 75-78], [4, с. 72-74] и воспользоваться решением примера 3 [4, с. 74].

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения геометрического распределения?
2. Появление какого события следует считать успехом в вашей задаче?
3. Как связаны вероятность события и вероятность противоположного события?
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей нескольких событий в случае совместимых и в случае несовместимых событий. Какой из этих вариантов применили вы и почему?
5. Вычислите Ev самостоятельно.

Вариант 3. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим v – номер того соединения, при котором неправильное соединение произойдёт в третий раз и узел связи подвергнется профилактике. Обозначим z – количество правильных соединений между профилактиками. Построить законы распределения величин v и z.
2. Вычислить $P\{z \geq 100\}$.
3. Вычислить Ez.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***геометрическое распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 72], [4, с. 61-62]. Для построения закона распределения величины ν нужно представить событие $\{\nu=n\}$ в виде объединения событий $A_{i\,j\,n}$ = {первое, второе и третье неправильные соединения произошли при соединениях с номерами $i, j, n,$ соответственно}. Являются ли эти события совместимыми? Какие значения может принимать величина ν? Для построения закона распределения величины z необходимо установить каким равенством связаны величины ν и z.

Для вычисления $P\{z \geq 100\}$ рекомендуется применить теорему сложения вероятностей [1, с. 31-33] и формулой вероятности противоположного события [1, с. 34], [6, с. 12, 15].

Для вычисления Ez рекомендуется изучить материал [1, с. 75-78], [4, с. 72-74]. Вычисление этого математического ожидания потребует проведения некоторых стандартных математических действий.

Рекомендация. Представьте искомое математическое ожидание в виде:

$$Ez = \frac{(1-p)^3 p}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n\right)'''.$$

Вычислите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$.Вычислите третью производную найденной суммы и получите формулу для математического ожидания.

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения геометрического распределения?
2. Появление какого события следует считать успехом в вашей задаче?
3. Как связаны вероятность события и вероятность противоположного события?
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей

нескольких событий в случае совместимых и в случае несовместимых событий. Какой из этих вариантов применили вы и почему?
5. Перечислите свойства математического ожидания случайной величины.

Вариант 4. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим v – возможное количество бракованных изделий в одной упаковке. Определить закон распределения случайной величины v, то есть вычислить $P\{v=n\}$.
2. Вычислить $P\{v\leq 1\}$.
3. Вычислить Ev.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***биномиальное распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 66], [4, с. 60-61], [2, с. 37], [6, с. 20].

При реализации пункта 2 для вычисления $P\{v\leq 1\}$ рекомендуется применить теорему сложения вероятностей [1, с. 31-33], и соответствующей формулой из [4, с. 37-40], [6, с. 15].

При реализации пункта 3 для вычисления Ev рекомендуется изучить материал [1, с. 83, 31-33], [4, с. 72-74] и воспользоваться решением примера 2 [4, с. 74].

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения биномиального распределения?
2. Появление какого события следует считать успехом в вашей задаче?
3. Каковы условия применимости формулы условной вероятности?

4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей нескольких событий в случае совместимых и в случае несовместимых событий. Какой из этих вариантов применили вы и почему?
5. Вычислите самостоятельно $E\nu$.

Вариант 5. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим $\nu(t)$ – количество клиентов, посетивших автомойку за время t (часов). Построить закон распределения величины $\nu(t)$.
2. Вычислить $P\{\nu(3)\geq 10\}$.
3. Вычислить $E\nu(3)$.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***распределение Пуассона.*** Для этого необходимо выучить материал [1, 68-72], [4, с. 63], [2, с. 53, с. 60-61], [6, с. 25], [5, с. 106-111, 520-527].

При реализации пункта 2 для вычисления $P\{\nu(3)\geq 10\}$ рекомендуется применить теорему сложения вероятностей [1, с. 31-33] и соответствующую формулу из [4, с. 63], [6, с. 25].

При реализации пункта 3 для вычисления $E\nu$ рекомендуется изучить материал[1, с. 75-78], [4, с. 72-74] и воспользоваться решением примера 3 [4, с. 74].

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения распределения Пуассона?
2. Чему равняется интенсивность потока событий в вашей задаче? Как изменится интенсивность потока, если изменить единицу измерения времени (например, измерять время в минутах)?

3. Как связаны вероятность события и вероятность противоположного события?
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей нескольких событий в случае совместимых и в случае несовместимых событий. Какой из этих вариантов применили вы и почему?
5. Вычислите самостоятельно $E\ v(t)$.

Вариант 6. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим v – время безотказной работы прибора. Исходя из условий задачи определить тип случайной величины v и построить её закон распределения.
2. Вычислить Ev и $P\{v \geq Ev\}$.
3. Из неравенства $P(v<T) \leq 0.05$ найти гарантийный срок T.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***показательное (экспоненциальное) распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 149-151], [4, с. 70], [5, с. 520-527]. Обратить внимание на физический смысл параметра показательного распределения.

При выполнении пункта 2 целесообразно изучить определение и метод вычисления математического ожидания абсолютно непрерывной случайной величины [6, с. 35]. Затем воспользоваться результатом из примера 2 [4, с. 83].

Выполнение пункта 2 сводится к решению простейшего показательного неравенства.

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения показательного распределения?

2. К какому типу случайных величин относится случайная величина v?
3. Чему равняется интенсивность потока событий в вашей задаче? Как изменится интенсивность потока, если изменить единицу измерения времени (например, измерять время в минутах)?
4. Запишите формулу вычисления вероятности попадания абсолютно непрерывной случайной величины в заданное множество.
5. Вычислите Ev самостоятельно.

Вариант 7. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим v_i – время безотказной работы *i-го* элемента схемы и $v = v_1+v_2$. Исходя из условий задачи определить тип случайной величины v и построить её закон распределения.
2. Вычислить $P\{v\geq 5\}$.
3. Из неравенства $P(v\geq T)\geq 0.9$ найти гарантийный срок T.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***показательное (экспоненциальное) распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 149-151], [4, с. 70], [5, с. 520-527], [2, с. 132-134, № 402]. Обратить внимание на физический смысл параметра показательного распределения. Для построения закона распределения величины v следует применить Теорему 1 [4, с.109], Следствие 1 [4, с. 111], и Теорему 3 [4, с. 116].

Для выполнения пункта 2 следует применить формулу расчета вероятности попадания случайной величины в заданное множество [4, с. 67].

Выполнение пункта 3 приводит к необходимости решить неравенство показательно-степенного типа. Точное решение этого неравенства найти невозможно. Поэтому, значение T вычисляется приближённо.

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения показательного распределения?
2. К какому типу случайных величин относится случайная величина ν?
3. Чему равняется интенсивность потока событий в вашей задаче? Как изменится интенсивность потока, если изменить единицу измерения времени (например, измерять время в минутах)?
4. Запишите формулу вычисления вероятности попадания абсолютно непрерывной случайной величины в заданное множество.
5. Запишите формулу для построения плотности распределения суммы двух независимых абсолютно непрерывных случайных величин.

Вариант 8. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим ν – возможное значение величины диаметра некоторого шарика. Исходя из условий задачи определить величины математического ожидания и дисперсии величины ν.
2. Используя метод центрирования и нормирования случайной величины привести случайную величину ν к стандартному виду. Воспользовавшись таблицей значений функции распределения стандартного нормального закона вычислить $P\{|\nu\text{-}1|> 0.1\}$.
3. Используя аналогичный метод найти x из неравенства $\mathrm{P}(\,|\mathrm{v}\text{-}1| \le x) \ge 0.9$.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***нормальное (гауссовское) распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 127-133], [4, с. 69], [5, с. 127-130], [6, с. 39].

Для ответа на вопросы 2 и 3 следует использовать результаты [1, с. 127-133], [4, с. 83, Пример 3] и [6, с. 39]. Для закрепления навыков работы с нормальным распределением и статистическими таблицами рекомендуется изучить [2, с. 109] и разобрать решение задачи 331 [2, с. 111].

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения нормального распределения?
2. К какому типу случайных величин относится случайная величина v?
3. Опишите алгоритм центрирования и нормирования случайной величины.
4. Какой закон распределения имеет центрированная и нормированная случайная величина, если исходная величина имела нормальное распределение?.
5. С какой целью проводится центрирование и нормирование случайных величин, имеющих нормальное распределение? Опишите правило использования статических таблиц для нормального распределения.

Вариант 9. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим v_i – возможный размер страховой выплаты по i-*ому* виду страхования и $v = v_1+v_2$ – суммарный размер страховой выплаты клиенту. Исходя из условий задачи определить тип случайной величины v и построить её закон распределения.

2. Примем за единицу расчётов 1 тыс. руб. Вычислить $P\{v \leq 0.5\}$.
3. Вычислить Ev .

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить условия возникновения, определение и свойства случайных величин, имеющих ***равномерное распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 122-124], [4, с. 69], [6, с. 38-39]. Для построения закона распределения величины v следует применить Теорему 1 [4, с.109], Следствие 1 [4, с. 111]. Изучить [2, с. 132-135, № 405].

Для выполнения пункта 2 следует применить формулу расчета вероятности попадания случайной величины в заданное множество [1, с. 116-118], [4, с. 67].

Для выполнения пункта 3 необходимо повторить свойства математических ожиданий [1, с. 75-78], [4, с. 78-83].

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения равномерного распределения?
2. Перечислите свойства математического ожидания случайной величины.
3. Объясните физический смысл математического ожидания и дисперсии случайной величины. Вычислите дисперсию величины v .
4. Запишите формулу вычисления вероятности попадания абсолютно непрерывной случайной величины в заданное множество.
5. Запишите формулу для построения плотности распределения суммы двух независимых абсолютно непрерывных случайных величин.

Вариант 10. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим v_i – время безотказной работы *i-ой* лампочки схемы и $v = min\{v_1, v_2\}$. Исходя из условий задачи определить тип случайной величины v и построить её закон распределения.
2. Примем за единицу времени 1 тыс. часов. Вычислить $P\{v \geq 10\}$.
3. Из неравенства $P(v \geq T) \geq 0.9$ найти гарантийный срок T.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***показательное (экспоненциальное) распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 149-151], [4, с. 70], [2, с. 114], [5, с. 520-527]. Обратить внимание на физический смысл параметра показательного распределения. Докажите справедливость равенства $v = min\{v_1, v_2\}$. Для построения закона распределения величины v рекомендуется использовать равенство $P(v \geq t)=P(v_1 \geq t,\ v_2 \geq t)$. Затем воспользоваться независимостью величин v_1 и v_2. Для выполнения пункта 2 следует применить формулу расчета вероятности попадания случайной величины в заданное множество [1, с. 116-118], [4, с. 67] и использовать свойства функции распределения..

Выполнение пункта 3 приводит к необходимости решить неравенство показательно-степенного типа.

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения показательного распределения?
2. К какому типу случайных величин относится случайная величина v?
3. Опишите правило построения закона распределения функции от двух независимых случайных величин.

4. Запишите формулу вычисления вероятности попадания абсолютно непрерывной случайной величины в заданное множество.
5. Как называется закон распределения величины ν?

Вариант 11. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим ν – номер того тура, в котором определился победитель игры. Определить закон распределения случайной величины ν, то есть вычислить $P\{\nu=n\}$. Вычислить $P\{\nu=9\}$.
2. Вычислить $E\,\nu$.
3. Вычислить $P\{\nu \geq E\,\nu\}$.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***геометрическое распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 72], [4, с. 61-62]. Рассмотрим события:

A_n = {игра закончилась в *n-ом* туре и победителем оказался А},

B_n = {игра закончилась в *n-ом* туре и победителем оказался В}.

Тогда $P(\nu = n) = A_n \cup B_n$.Для построения закона распределения величины ν потребуется применить теорему сложения вероятностей [1, с. 31-33], [4, с. 37] и теорему умножения вероятностей [1, с. 38-40], [4, с. 47-49].

Для вычисления $E\nu$ рекомендуется изучить материал [1, с. 75-78], [4, с. 72-74] и воспользоваться решением примера 3 [4, с. 74].

Для выполнения пункта 3 рекомендуется применить формулу вероятности противоположного события и теорему сложения вероятностей.

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения геометрического распределения?
2. Появление какого события следует считать успехом в вашей задаче?
3. Как связаны вероятность события и вероятность противоположного события?
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей нескольких событий в случае совместимых и в случае несовместимых событий. Какой из этих вариантов применили вы и почему?
5. Сформулируйте теорему умножения вероятностей нескольких событий в случае независимых и в случае зависимых событий. Какой из этих вариантов применили вы и почему?

Вариант 12. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим ν – количество потраченных ракет. Определить закон распределения случайной величины ν, то есть вычислить $P\{\nu=n\}$.
2. Вычислить $P\{\nu=1\}$ и $P\{\nu=10\}$.
3. Вычислить $E\,\nu$.

Для построения закона распределения величины ν потребуется применить теорему сложения вероятностей [1, с. 31-33], [4, с. 37] и теорему умножения вероятностей [1, с. 38-40], [4, с. 47-49]. Рассмотрите события A_n = {ракета номер n поразила цель}, $n = 1, 2, \dots, 10$. Представьте событие $\{\nu = n\}$ в виде пересечения событий A_n и противоположного к ним события. Обратите внимание, что при $n < 10$ и при $n=10$ получаются различные представления.

Для вычисления $E\nu$ рекомендуется изучить материал [1, с. 75-78], [4, с. 72-74]. Также рекомендуется вспомнить формулу суммы конечной геометрической прогрессии.

Вопросы для самоконтроля.

1. Появление какого события следует считать успехом в вашей задаче?
2. Как связаны вероятность события и вероятность противоположного события?
3. Сформулируйте теорему сложения вероятностей нескольких событий в случае совместимых и в случае несовместимых событий. Какой из этих вариантов применили вы и почему?
4. Сформулируйте теорему умножения вероятностей нескольких событий в случае независимых и в случае зависимых событий. Какой из этих вариантов применили вы и почему?
5. Можно ли утверждать, что случайная величина v имеет геометрическое распределение?

Вариант 13. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим v – количество пуль, израсходованных стрелком A в результате игры. Определить закон распределения случайной величины v, то есть вычислить $P\{v=n\}$.
2. Вычислить P{А допустит первый промах на 7- й пуле}.
3. Вычислить $E\,v$.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***геометрическое распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 72], [4, с. 61-62]. Для построения закона распределения величины v потребуется применить теорему сложения вероятностей [1, с. 31-33], [4, с. 37] и теорему умножения вероятностей [1, с. 38-40], [4, с. 47-49]. Рассмотрите события: $A_к$ = {Стрелок *А* промахнулся при *к-ом* выстреле}, $B_к$ = {Стрелок В промахнулся при *к-ом* выстреле}. Представьте событие $\{\nu = n\}$ в виде объединения пересечений событий $A_к$, $B_к$ и противоположных к ним событий. Затем примените теоремы сложения и умножения вероятностей.

При реализации пункта 2 потребуется применить теорему умножения вероятностей [4, с. 47-49].

Для вычисления $E\,\nu$ рекомендуется изучить материал [1, с. 75-78], [4, с. 72-74] и воспользоваться решением примера 3 [4, с. 74].

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения геометрического распределения?
2. Появление какого события следует считать успехом в вашей задаче?
3. Как связаны вероятность события и вероятность противоположного события?
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей нескольких событий в случае совместимых и в случае несовместимых событий. Какой из этих вариантов применили вы и почему?
5. К какому виду распределений относится закон распределения случайной величины ν? Можно ли считать, что случайная величина ν имеет геометрическое распределение?

Вариант 14. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим ν – возможное количество искажённых сигналов в одной серии из 100 сигналов. Определить закон распределения случайной

величины ν, то есть вычислить $P\{\nu=n\}$.

2. Вычислить $P\{ \nu = 0\}$.
3. Вычислить $E\nu$.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***биномиальное распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 66], [4, с. 60-61], [2, с. 37], [6, с. 20]. Определите какое событие вы будете считать успехом в очередном испытании. Проверьте выполнены ли условия возникновения биномиального распределения.

При реализации пункта 3 для вычисления $E\nu$ рекомендуется изучить материал [1, с. 75-78, 83], [4, с. 72-74] и воспользоваться решением примера 2 [4, с. 74], [2, с. 63].

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения биномиального распределения?
2. Появление какого события следует считать успехом в вашей задаче?
3. К какому типу случайных величин относится случайная величина ν?
4. Сформулируйте определение математического ожидания случайной величины.
5. Поясните физический смысл этого понятия.

Вариант 15. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим $\nu(t)$ – количество клиентов, воспользовавшихся услугами данного банкомата за время t (часов). Построить закон распределения величины $\nu(t)$.
2. Вычислить $P\{\nu(8) < 100\}$.

3. Вычислить $E\nu(8)$.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***распределение Пуассона.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 68-72], [4, с. 63], [2, с. 53], [6, с. 25], [5, с. 106-111, 520-527].

При реализации пункта 2 для вычисления $P\{\nu(3) < 100\}$ рекомендуется применить теорему сложения вероятностей [1, с. 31-33] и соответствующую формулу из [4, с. 63], [6, с. 25].

При реализации пункта 3 для вычисления $E\nu$ рекомендуется изучить материал [1, с. 75-78], [4, с. 72-74] и воспользоваться решением примера 3 [4, с. 74].

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения распределения Пуассона? Выполнены ли они в вашей задаче?
2. Чему равняется интенсивность потока событий в вашей задаче? Как изменится интенсивность потока, если изменить единицу измерения времени (например, измерять время в минутах)?
3. Как связаны вероятность события и вероятность противоположного события?
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей нескольких событий в случае совместимых и в случае несовместимых событий. Какой из этих вариантов применили вы и почему?
5. К какому типу случайных величин относится случайная величина $\nu(t)$?

Вариант 16. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим ν – время безотказной работы прибора.

Исходя из условий задачи определить тип случайной величины v и построить её закон распределения.

2. Вычислить Ev и $P\{v \geq Ev\}$.
3. Из неравенства $P(v<T) \leq 0.05$ найти гарантийный срок T.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***показательное (экспоненциальное) распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 149-151], [4, с. 70], [5, с. 520-527]. Обратить внимание на физический смысл параметра показательного распределения. Как он связан с средним временем безотказной работы прибора?

При выполнении пункта 2 целесообразно изучить определение и метод вычисления математического ожидания абсолютно непрерывной случайной величины [6, с. 35]. Затем воспользоваться результатом из примера 2 [4, с. 83] или [2, с. 114].

Выполнение пункта 2 сводится к решению простейшего показательного неравенства.

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения показательного распределения?
2. К какому типу случайных величин относится случайная величина v?
3. Чему равняется интенсивность потока событий в вашей задаче? Как изменится интенсивность потока, если изменить единицу измерения времени (например, измерять время в минутах)?
4. Запишите формулу вычисления вероятности попадания абсолютно непрерывной случайной величины в заданное множество.

5. Вычислите Ev самостоятельно.

Вариант 17. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим $v(t)$ – количество пиковых нагрузок, имевших место за время t (часов). Построить закон распределения величины $v(t)$.
2. Обозначим z – время безотказной работы прибора. Построить закон распределения величины z. Вычислить $P(z \geq 120)$.
3. Вычислить $E\,z$.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства простейшего потока событий, а также свойства случайных величин, имеющих ***распределение Пуассона*** и ***показательное (экспоненциальное) распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 149-151], [4, с. 63, 70], [2, с. 53], [6, с. 25], [5, с. 106-111, 520-527].

При реализации пункта 2 для вычисления $P\{z \geq t\}$ рекомендуется применить теорему сложения вероятностей [1, с. 31-33], [4, с. 37] и теорему умножения вероятностей [1, с. 38-40], [4, с. 47-49]. Рассмотрим события: A_j = {прибор выдержал перегрузку № j}. Представьте событие $\{z \geq t\}$ в виде объединения пересечений событий $\{\ v(t) = k\ \}$ и A_j .

При реализации пункта 3 для вычисления Ev рекомендуется изучить материал [1, с 75-78], [4, с. 82] и воспользоваться решением примера 2 [4, с. 83].

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте определение простейшего потока событий.
2. Каков закон распределения количества событий, происходящих в простейшем потоке событий за

время t?

3. Каков закон распределения интервала времени между появлениями двух очередных событий в простейшем потоке?
4. Как изменяется интенсивность простейшего потока событий при его прореживании?
5. К каким типам случайных величин относятся случайные величины $v(t)$ и z?

Вариант 18. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим v – возможное значение величины отклонения контролируемого показателя от шаблона. Исходя из условий задачи определить значения математического ожидания и дисперсии величины v.
2. Используя метод центрирования и нормирования случайной величины привести случайную величину v к стандартному виду. Воспользовавшись таблицей значений функции распределения стандартного нормального закона вычислить $P\{|v| \leq 10\}$. Исходя из физического смысла понятия «вероятность случайного события» вычислить ожидаемый средний процент качественных деталей, изготавливаемых автоматом.
3. Найти x из уравнения $P\{|v| \leq x\}= 0.99$.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***нормальное (гауссовское) распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 127-133], [4, с. 69], [5, с. 127-130], [6, с. 39].

Для ответа на вопросы 2 и 3 следует использовать результаты [4, с. 83, Пример 3] и [6, с. 39]. Для закрепления навыков работы с нормальным распределением и статистическими таблицами рекомендуется изучить [2, с. 109] и разобрать решение задачи 331 [2, с. 111].

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения нормального распределения?
2. Перечислите свойства случайных величин, имеющих нормальное распределение.
3. Опишите алгоритм центрирования и нормирования случайной величины.
4. Какой закон распределения имеет центрированная и нормированная случайная величина, если исходная величина имела нормальное распределение?
5. С какой целью проводится центрирование и нормирование случайных величин, имеющих нормальное распределение? Опишите правило использования статических таблиц для нормального распределения.

Вариант 19. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим v – возможное значение толщины плиты. Исходя из условий задачи определить значения математического ожидания и дисперсии величины v.
2. Используя метод центрирования и нормирования случайной величины привести случайную величину v к стандартному виду. Воспользовавшись таблицей значений функции распределения стандартного нормального закона вычислить $P\{215 \leq v \leq 218\}$. Исходя из физического смысла понятия «вероятность случайного события» вычислить ожидаемый средний процент таких плит.
3. Воспользовавшись таблицей значений функции распределения стандартного нормального закона найти x из уравнения $P\{ v \leq x\}=0.9$.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***нормальное (гауссовское) распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 127-133], [4, с. 69], [5, с. 127-130], [6, с. 39].

Для ответа на вопросы 2 и 3 следует использовать результаты [4, с. 83, Пример 3] и [6, с. 39]. Для закрепления навыков работы с нормальным распределением и статистическими таблицами рекомендуется изучить [2, с. 109] и разобрать решение задачи 331 [2, с. 111].

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения нормального распределения?
2. Перечислите свойства случайных величин, имеющих нормальное распределение.
3. Опишите алгоритм центрирования и нормирования случайной величины.
4. Какой закон распределения имеет центрированная и нормированная случайная величина, если исходная величина имела нормальное распределение?
5. С какой целью проводится центрирование и нормирование случайных величин, имеющих нормальное распределение? Опишите правило использования статических таблиц для нормального распределения.

Вариант 20. При решении данной задачи рекомендуется следовать такому плану.

1. Обозначим v_i – время безотказной работы *i-го* датчика схемы и $v = max\ \{v_1 ,v_2\}$. Исходя из условий задачи определить тип случайной величины v и построить её закон распределения.
2. Примем за единицу времени 1 тыс. часов.

Вычислить $P\{v\geq 10\}$.

3. Из неравенства $P(v \geq T)\geq 0.9$ найти гарантийный срок T.

При реализации пункта 1 рекомендуется изучить определение и свойства случайных величин, имеющих ***показательное (экспоненциальное) распределение.*** Для этого необходимо выучить материал [1, с. 149-151], [4, с. 70], [2, с. 114], [5, с. 520-527]. Обратить внимание на физический смысл параметра показательного распределения. Докажите, что время безотказной работы всей схемы задаётся формулой: $v = max \{v_1, v_2\}$. Для построения закона распределения величины v рекомендуется использовать равенство $P(v < t)=P(v_1 < t, v_2 < t)$. Затем воспользоваться независимостью величин v_1, v_2 и формулой, связывающей функцию распределения случайной величины с её плотностью распределения [6, с. 34-35].

Для выполнения пункта 2 следует применить формулу расчета вероятности попадания случайной величины в заданное множество [1, с. 116-118], [4, с. 67], [6, с. 35].

Выполнение пункта 3 приводит к необходимости решить неравенство показательно-степенного типа.

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы условия возникновения показательного распределения?
2. К какому типу случайных величин относится случайная величина v?
3. Опишите правило построения закона распределения функции от двух независимых случайных величин.
4. Запишите формулу вычисления вероятности попадания абсолютно непрерывной случайной

величины в заданное множество.

5. Можно ли утверждать, что случайная величина v имеет показательное распределение?

Требования, предъявляемые к оформлению результатов выполнения индивидуального задания.

1. Индивидуальное задание выполняется в отдельной ученической тетради.
2. На титульном листе должны быть указаны:
   - название дисциплины: Теория вероятностей и математическая статистика;
   - фамилия и инициалы обучающегося;
   - шифр академической группы;
   - номер варианта выполненного задания.
3. Для каждой решённой задачи излагается:
   - условие задачи;
   – подробное решение задачи с пояснениями и обоснованиями производимых рассуждений и вычислений;
   – подробный развёрнутый ответ на вопросы, сформулированные в условии задачи.

Защита индивидуального задания производится в форме публичного диспута.
Результаты выполнения задания оцениваются по следующей шкале:

-- задача № 1: максимальная оценка 20 баллов;
-- задача № 2: максимальная оценка 30 баллов.

Литература, рекомендуемая для самостоятельной работы при выполнении индивидуального задания

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2014. - 479 с. : табл., граф. - (Бакалавр. Базовый курс). - Предм. указ.: с. 474-479. Книга доступна в электронной библиотечной системе: http://www.biblio-online.ru
2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. – М. : Высшее образование, 2006. – 416 с.

Главы: 1 – 6.

3. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – К.: Наукова думка, 1978. – 582 с.

Главы: 1, 2, 6.

4. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1979. – 408 с.

Главы: I, II.

5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

Главы: 2 – 6.

6. Теория вероятностей и математическая статистика. (Учебное пособие). – Новосибирский государственный аграрный университет, 2007. – 120 с.

Содержание