МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В.И. Вернадского»
(ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского»)

«Утверждаю»
Проректор по научной деятельности

__________________ С.И. Федоркин

«__»______________________2015 г.

ПРОГРАММА

кандидатского экзамена

КЭ по специальности

01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Симферополь, 2015

Программа кандидатского экзамена по специальности

01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Разработчики: доктор физико-математических наук, профессор Копачевский Н.Д., доктор физико-математических наук, профессор Орлов И.В., доктор физико-математических наук, профессор Муратов М.А.

Программа утверждена на Ученого совета факультета математики и информатики
Протокол от “15” апреля 2015 г. № 2
Председатель ______________________ (О.И. Рудницкий)
(подпись) (Ф.И.О.)

Согласовано с учебно-методической комиссией ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского»
Протокол от “______” __________2015 г. № _____

Председатель __________________ (проф. Курьянов В.О.)
(подпись) (Ф.И.О.)

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: теория функций действительной переменной (действительный анализ), теория функций комплексной переменной (комплексный анализ), функциональный анализ, а также программы соответствующих курсов лекций, читаемых на механико-математических, математико-механических и физико-математических факультетах университетов. Программа соответствует программе, разработанной экспертным советом Высшей аттестационной комиссии по математике и механике при участии МГУ им. М.В. Ломоносова.

1. Действительный анализ

1.1. Меры, измеримые функции, интеграл.

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини. ([2], гл. V; [5], гл. III-VI, XI, XII; [Д1], гл. 1-4)

I.2. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования.

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса. ([2], гл. VI; [5], гл. VIII, IX, XIII, XVII; [Д1], гл. 5)

I.3. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды.

Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства **L***p* , их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в **L***2* и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы. ([2], гл. VII; [5], гл. VII)

I.4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурь.е

Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярнымы интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса. ([2], гл. VIII, §§ 1-7; [5], гл. X; [6], гл. 15,16)

I.5. Гладкие многообразия и дифференциальные формы.

Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа. ([6],гл. 17; [9], гл. 9)

2. Комплексный анализ

2.1. Интегральные представления аналитических функций.

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого. ([7], гл. IV; [4], гл. III, §§ 1–3; [3], гл. I, § 4, гл. III, § 3)

2.2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты.

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами. ([7], гл. V–VII; [4], гл. III, §§ 4–7, гл. IV, гл. V, § 4; [3], гл. I, §5, гл. V, §2)

2.3. Целые и мероморфные функции.

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг–Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями. ([7], гл. IX, §1,2; [4], гл. VII, §§ 1–3; [3], гл. V, §1)

2.4. Конформные отображения.

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях. ([7], гл. III, § 1,3, гл. XII, §§ 1,2,6,7; [4], гл. V, §§1–3; [3], гл. II)

2.5. Аналитическое продолжение.

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля–Шварца. Модулярная функция.

Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара. ([7], гл. X, гл. XII, §8; [4], гл. VIII; [3], гл. II, §3)

2.6. Гармонические функции.

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга. ([11], стр. 295–304)

3. Функциональный анализ

3.1. Метрические и топологические пространства.

Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах. ([2], гл. II; [10], гл. IV)

3.2. Нормированные и топологические линейные пространства.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха–Хана. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и L*p*. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства. ([2], гл. III; [10], гл. IV)

3.3. Линейные функционалы и линейные операторы.

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма. ([2], гл. IV, §§1–3,5,6; [10], гл. IV; [Д4], гл. VI, §1,2)

3.4. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них.

Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы. ([8], гл. VI–VIII; [10], гл. V)

3.5. Дифференциальное исчисление в линейных пространствах.

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона. ([2], гл. X)

3.6. Обобщенные функции.

Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем. ([1], гл. II; [2], гл. IV, §4, гл. VIII, §8; [Д5], гл. 6, стр. 177–180)

Основная литература[1]

[1] В скобках указан год переиздания

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.М., Наука, 1976 (1981)

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976 (1989).

3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1973

4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т. 1-2. М., Наука, 1967-1968

5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1974

6. Никольский С.М. Курс математического анализа, т. II. М., Наука, 1975 (1991)

7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Наука, 1977 (1999)

8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ. М., Мир, 1976

9. Рудин У. Основы математического анализа. М., Мир, 1976

10. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. V. М., Физматгиз, 1959

11. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1.М., Наука, 1976 (1985)

Дополнительная литература

Д1 Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998

Д2 Евграфов М.А. Аналитические функции. М., Наука, 1991

Д3 Зорич В.А. Математический анализ, т. II. М., Наука, 1984

Д4 Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа.М., Наука, 1965

Д5 Рудин У. Функциональный анализ. М., Мир, 1975

Д6 Садовничий В.А. Теория операторов. М., Высш. Школа, 1999

Д7 Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М., Мир, 1983