О Т З Ы В

официального оппонента

на диссертацию **Ахрамовича Максима Вячеславовича**

Q-Коммутируемость линейных операторов

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01. – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа Ахрамовича М.В. посвящена изучению алгебраических зависимостей между элементами различных операторных алгебр, включая, прежде всего, алгебры неограниченных операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана.

Интерес к такого рода вопросам обусловлен тем, что в той или иной форме они возникают в самых разнообразных областях классической математики (уравнения в частных производных, дифференциальные операторы, теория возмущений, представления соотношений) и теоретической физики (коммутационные и антикоммутационные соотношения для квантово-механических наблюдаемых, статистическая физика, квантовая теория поля). В явной форме исследования такого рода были начаты в работах Германа Вейля и Джона фон Неймана в связи с принципом неопределенности Гейзенберга. В настоящее время интерес к алгебраической структуре алгебр неограниченных операторов ещё вырос за счет возникновения новых методов в некоммутативной геометрии и теории представлений, связанных с бесконечномерными алгебрами Ли, модулярной теорией Томиты-Такесаки и теорией представлений квантовых аналогов классических групп. Таким образом, тематика работы является актуальной.

Полученные диссертантом результаты естественно разбиваются на три группы. Первая группа посвящена вопросу о возможности полной классификации, с точностью до преобразования подобия, пар q-коммутирующих нильпотентных (порядка 3) операторов (A, B) в конечномерных векторных пространствах $\mathbf{V}$, подчиненных некоторому биквадратичному соотношению $(\alpha A^2 + \beta AB + \gamma B^2)^2 = 0$. Доказано, что такая классификация давала бы решение известной задачи классификации наборов операторов, не связанных соотношениями. Другими словами, это "дикая" задача, в принятой сейчас алгебраистами терминологии. Аналогичный ответ получен и для классификации пар q-коммутирующих нильпотентных операторов (A, B) порядка два и три, связанных квадратичным соотношением $AB^2 = 0$. Последний результат кажется совершенно неожиданным и, таким образом, существенно расширяет наши представления о достижимых обобщениях знаменитой теоремы Жордана, описывающей орбиты подобия операторов в конечномерных пространствах.

Следующая группа результатов связана с вопросом об антикоммутирующих измеримых и локально измеримых самосопряженных операторах T и S, присоединенных к некоторой алгебре фон Неймана $\mathbf{M}$. Множества $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ измеримых и $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$ локально измеримых операторов являются алгебрами относительно операций сильного умножения и сильного сложения (сильное произведение операторов T и S определяется как замыкание "наивного" произведения, определенного поточечно на максимальной области). Совпадает ли антикоммутирование в этих алгебрах с антикоммутированием в смысле срезок? Этот вопрос является q-аналогом известной задачи о коммутирующих самосопряженных операторах, решенной Нельсоном. Автор доказывает, что ответ на вопрос о совпадении двух определений антикоммутирования как для измеримых. так и для локально измеримых операторов положителен. Безусловно, это важный результат, который должен найти приложения и дать начало новым исследованиям.

Наконец, третья группа вопросов связана с известной теоремой Бента Фуглида о коммутанте нормального оператора, которая гласит, что если нормальный оператор коммутирует с ограниченным оператором, то он коммутирует и с его сопряженным. Как известно, теорема Фуглида возникла как ответ на вопрос, поставленный фон Нейманом, что само по себе необычно: по части решения конкретных задач фон Нейман не имел себе равных. Результат Фуглида оказался очень полезным в теории операторов и операторных алгебр, а также общих *-алгебр, и потому постоянно приковывал к себе внимание математиков. Задачи фуглидовского типа, решавшиеся диссертантом, формулируются очень просто и естественно: верна ли теорема Фуглида для алгебр локально измеримых операторов $\mathbf{LS}(\mathbf{M})$? Ответ оказался положительным, если исходная алгебра фон Неймана $\mathbf{M}$ не имеет прямого слагаемого типа II. Для случая, когда такое слагаемое присутствует, диссертант получил результат в специальном случае двух нормальных операторов. Считаю, что эти результаты и интересны, и полезны.

Таким образом, полученные автором результаты являются новыми и представляют важный вклад в теорию операторов и операторных алгебр. По теме исследования диссертантом опубликовано 9 работ в журналах и тематических сборниках, а также 6 докладов на конференциях. Они полностью отражают основное содержание диссертации.

Все результаты работы строго обоснованы, их достоверность не вызывает сомнений.

Автореферат написан ясно и конкретно, и дает хорошее представление как об общем состоянии рассматриваемых областей теории операторов, так и о том продвижении, которое было достигнуто благодаря усилиям автора диссертации.

Не сомневаюсь, что результаты работы будут постоянно использоваться в дальнейших исследованиях, что для работы теоретического характера и означает её практическую значимость.

В качестве замечания, отмечу встречающиеся в работе опечатки. Например:

1. На странице 66 (случай измеримых операторов) размерностная функция обозначается буквой D, в то время как на странице 73 (случай локально измеримых операторов) для обозначения этой же размерностной функции используется символ d.

2. На странице 76 в доказательстве теоремы 3.3.6 в равенстве $TS = ST$ пропущен знак: нужно написать $TS = -ST$.

3. На странице 35, второй абзац, пространство $\widetilde{\mathcal{V}}$ обозначено $\widetilde{\mathbf{V}}$.

4. На страницах 60 и 61 естественнее было бы поменять местами теорему 3.1.9. и определение 3.1.10 и вместо "локально предизмеримых" подпространств и операторов рассматривать "локально измеримые" подпространства и операторы.

5. На странице 85 в последней строке в обозначении алгебры вместо $\mathbf{a}$ следует писать $\mathbf{A}$.

Приведенные замечания не влияют на хорошее впечатление о результатах диссертации. Считаю, что работа полностью соответствует требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней и Паспорту специальности, а её автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор ф.-м. наук,
профессор кафедры
высшей математики ФГБОУ ВПО
"Вологодский государственный университет" В.С. Шульман

Подпись заверяю

Начальник
отдела кадров
Управления дела...