

## Отзыв

### официального оппонента

**на диссертационную работу Кузьменко Екатерины Михайловны «Компактные экстремумы и компактно-аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева  $W^{1,p}$  над многомерной областью», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.**

В диссертации Е.М. Кузьменко исследуются вопросы определения экстремумов и наличия аналитических свойств у вариационных функционалов в шкале пространств Соболева  $W^{1,p}$  над многомерной областью. Для исследования этих проблем применяется развитый недавно новый подход, основанный на понятиях компактного экстремума и компактно-аналитических свойств вариационных функционалов с последующим переходом в условиях к обычным производным интегранта. Главное значение работы определяется, на мой взгляд, решением двух проблем. Во-первых - это получение простых и весьма общих достаточных условий, соответственно, корректной определенности, компактной непрерывности, компактной дифференцируемости и  $n$ -кратной  $K$ -дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа с помощью нового условия  $K$ -псевдополиномиальности интегранта, и связанных с этим условием классов Вейерштрасса. Во-вторых - перенос (что оказалось довольно нетривиальным) на случай нахождения  $K$ -экстремумов базисного аппарата классического вариационного исчисления: обобщенного уравнения Эйлера - Остроградского, обобщенного необходимого условия Лежандра, и др.

При описании аналитических свойств вариационных функционалов в  $W^{1,p}$  автору нужно было преодолеть проблему, обнаруженную М.М. Вайнбергом и И.В. Скрыпником: отсутствие второй сильной производной в невырожденной случае. Классический прием состоит в глобальной степенной оценке (по  $\nabla u$ ) интегранта сверху, что пригодно, как правило, только в задачах на абсолютный экстремум. В разделе 2 диссертации введено понятие  $K$ -псевдополиномиального интегранта, допускающего степенную оценку сверху только по каждому компактному множеству. Это условие оказывается уже достаточным для корректной определенности вариационного функционала (теорема



2.2.6), а принадлежность к определенным на его базе классам Вейерштрасса  $W^n K_p(z)$  для интегрантов, является достаточным условием  $K$ -дифференцируемости соответствующего порядка (теоремы 2.2.9, 2.2.22, 2.2.30). При этом на примерах показано, что классическая непрерывность, дифференцируемость и т.д., вообще говоря, отсутствуют. Следует отметить, что полученные достаточные условия принадлежности к классам Вейерштрасса (п. 2.2.5), легко проверяются и позволяют строить широкие классы примеров.

Что касается второй отмеченной проблемы, то назовем прежде всего тот принципиальный факт (теоремы 4.5.1-4.5.3 в диссертации), что понятие сильного и «слабого»  $K$ -экстремума в  $W^{1,p}$  является «обрамляющими» для классического локального экстремума (в нуле) в  $C^1$ : из наличия сильного  $K$ -экстремума в  $W^{1,p}$  следует наличие локального экстремума в  $C^1$ , а из наличия локального экстремума в  $C^1$  - следует наличие «слабого»  $K$ -экстремума в  $W^{1,p}$ . Второй важный момент заключается в том, что хотя вариационный функционал в  $W^{1,p}$  обладает лишь компактно-аналитическими свойствами, но как необходимые, так и достаточные условия  $K$ -экстремума в диссертации удалось выразить на языке обычных частных производных интегранта: теорема 3.2.1 (обобщенное уравнение Эйлера - Остроградского), 3.3.2 (обобщенное условие Лежандра), 4.2.1-4.2.3 (достаточное условие в терминах гессиана). Следует отметить важный раздел 4.3 в котором предложена классификация вариационных функционалов, имеющих нелокальный компактный экстремум в  $W^{1,p}$  над многомерной областью, и разработана схема исследования вариационного функционала на нелокальный компактный экстремум.

Считаю исследование актуальным, что подчеркивается и связью работы с госбюджетным темам кафедры алгебры и функционального анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского "Проблемы функционального и бесконечномерного анализа" (2006-2010 гг., Номер государственной регистрации 0106U003959); "Проблемы функционального и бесконечномерного анализа" (2011-2015 гг., Номер государственной регистрации 0111U000916) в которых автор принимал участие в качестве исполнителя.

Наряду с безусловно положительной оценкой диссертации в целом, хочу высказать следующее замечание. Многочисленные ссылки на литературу в тексте диссертации следовало бы оформлять более



подробно, указывая в скобках главу, параграф и результат на , который дается ссылка.

Хочу отметить, что диссертация является законченным научным исследованием, полностью соответствующим специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ, и содержит обоснованные и достоверные научные результаты, которые в совокупности являются существенными для развития современного вариационного исчисления в пространствах Соболева и его приложений. Результаты диссертации полностью изложены в 9 статьях в изданиях из перечня ВАК. Отдельные результаты и диссертация в целом неоднократно докладывались на авторитетных научных конференциях и научных семинарах. Содержание автореферата идентично отражает основные положения диссертации.

Считаю, что диссертационная работа "Компактные экстремумы и компактно-аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева  $W^{1,p}$  над многомерной областью" полностью удовлетворяет требованиям ВАК к кандидатским диссертациям, а ее автор Кузьменко Екатерина Михайловна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,  
доктор физико-математических наук,  
профессор К.В. Руновский

«23» октября 2014



Подпись профессора К.В. Руновского      заверяю.

Ученый секретарь

