

## ОТЗЫВ

официального оппонента

на диссертационную работу Кузьменко Екатерины Михайловны  
"Компактные экстремумы и компактно-аналитические свойства  
вариационных функционалов в шкале пространств Соболева  
над многомерной областью"

представленную на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

### 1. Актуальность темы

Работа выполнена в Таврическом национальном университете имени В.И. Вернадского. Предметом исследования выступают компактные экстремумы и компактно-аналитические свойства основного вариационного функционала в шкале пространств Соболева  $W^{1,p}(D)$ ,  $p \in \mathbb{N}$  над многомерной областью  $D \subset \mathbb{R}^n$  с липшицевой границей.

Начиная с 20-х годов прошлого века и вплоть до настоящего времени, экстремальным вариационным задачам в пространствах Соболева уделяется большое внимание ученых, занимающихся как фундаментальной, так и прикладной математикой. Основную сложность в этом вопросе представляет тот факт, что в пространствах Соболева функционал Эйлера-Лагранжа обладает значительно худшими аналитическими свойствами, чем в банаховых пространствах типа  $C^k$ , что существенно затрудняет применение классических методов сильного дифференциального исчисления и классической теории экстремумов. Анализ таких задач привел недавно к обобщению понятий локального экстремума, непрерывности, сильной дифференцируемости, повторной дифференцируемости и т.д., основанному на переходе к соответствующим свойствам в шкале подпространств, порожденных абсолютно выпуклыми компактами. Построенное, в работах И.В. Орлова и Е.В. Божонков, вариационное исчисление в гильбертовых пространствах Соболева  $W^{1,2}(a, b)$  над отрезком, описывает так называемые компактные экстремумы вариационных функционалов и их компактно-аналитические свойства. Поэтому естественной и актуальной является задача расширения имеющегося формализма исследования компактно-аналитических свойств и вычисления компактных экстремумов на случай пространств Соболева  $W^{1,p}(D)$  над многомерной областью  $D$ . В контексте изложенного выше считаю, что тема диссертационной работы Кузьменко О.О. является актуальной.

Актуальность исследований, приведённых в диссертации, подчеркивается также связью работы с госбюджетными темами кафедры алгебры и функционального анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского: "Проблемы функционального и бесконечномерного анализа"(2006-2010 гг., Номер государственной регистрации 0106U003959); "Проблемы функционального и бесконечномерного анализа"(2011-2015 гг., Номер государственной регистрации 0111U000916) в которых автор принимал участие в качестве исполнителя.

## 2. Научная новизна полученных результатов

К наиболее важным результатам данного исследования, которые определяют научную новизну работы и выносятся на защиту, можно отнести следующие:

1. Введены классы отображений  $K_p(z)$ ,  $WK_p(z)$ ,  $W^n K_p(z)$ ,  $p \in \mathbb{N}$  и показано, что принадлежность интегранта подходящему классу гарантирует его корректную определенность на элементах пространства Соболева  $W^{1,p}(D)$ , компактную непрерывность, компактную дифференцируемость и кратную компактную дифференцируемость, соответственно.
2. Получены аналоги обобщенного уравнения Эйлера для  $K$ -экстремалей и необходимого условия в форме Лежандра для компактного экстремума вариационных функционалов в пространствах Соболева  $W^{1,p}(D)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .
3. Получено достаточное условие  $K$ -экстремума вариационных функционалов на  $W^{1,p}(D)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , в терминах гессиана интегранта.
4. Автором разработана схема исследования вариационных функционалов на нелокальный  $K$ -экстремум. Описан ряд классов вариационных функционалов, имеющих нелокальных  $K$ -экстремум.

## 3. Анализ публикаций и полнота изложения результатов в автореферате диссертации

По теме диссертации опубликовано 14 работ (из них 9 статей в научных журналах и 5 тезисов в материалах международных конференций). Результаты диссертации докладывались на IV Международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я. Б. Лопатинского (Донецк, Украина, 14–17 ноября 2012 г.); International Conference "Analysis and mathematical physics" (Kharkiv, Ukraine, June 24–28, 2013); XXI–XXIII Крымских осенних математических школах–симпозиумах: КРОМШ–2010, КРОМШ–2011, КРОМШ–2012, (Ласпи, Крым, Украина, сентябрь 2010–2012 гг.); Крымской Международной Математической Конференции (Судак, Украина, 22 сентября–4 октября 2013 г.); XXV Крымская осенняя математическая школах–симпозиумах: КРОМШ–2014 (Судак, Крым, Россия, 20–30 сентябрь 2014 г.); семинарах кафедры алгебры и функционального анализа Таврического национального университета имени В. И. Вернадского; XXXIX–XXXVIII научных конференциях профессорско–преподавательского состава Таврического национального университета имени В. И. Вернадского (Симферополь, Украина, 2010–2013 гг.); XIV научной конференции профессорско–преподавательского состава Запорожского института экономики и информационных технологий (Мелитополь, Украина, март 2012 г.); VI Всеукраинской научной конференции Мелитопольского государственного педагогического университета им. Богдана Хмельницкого "Информационные технологии в образовании" (Мелитополь, Украина, апрель 2014 г.).

## 5. Оценка содержания диссертации и ее завершенности

Диссертация представляет собой законченное научное исследование, выполненное на актуальную тему. Диссертация написана ясно, четко, с логичным изложением материала, что в достаточной степени характеризует высокий научный уровень автора.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов и списка использованных источников. Объектом исследования является основной вариационный функционал в шкале пространств Соболева  $W^{1,p}(D)$  над многомерной областью. Основной целью диссертации является описание компактно-аналитических свойств и построение общей теории компактных экстремумов вариационных функционалов в шкале пространств Соболева  $W^{1,p}(D)$ , где  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

В **введении** раскрывается суть и значимость научной проблемы. Приведен обзор полученных результатов, выделены основные положения, которые выносятся на защиту. Нумерация утверждений в диссертации и автореферате одинаковая.

В **первом разделе** приведен обзор литературы по теме диссертации и сформулированы основные результаты, которые получены другими авторами в этом направлении.

Базовой для последующих результатов является **вторая глава**. Основные результаты второй главы описывают компактно-аналитические свойства вариационных функционалов в пространствах Соболева  $W^{1,p}(D)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , в терминах  $K$ -псевдополиномиальных интегрантов. Получены условие корректной определенности, компактной непрерывности, компактной дифференцируемости,  $n$ -кратной  $K$ -дифференцируемости основного вариационного функционала. Эти результаты позволяют автору в дальнейшем получить аналоги известных условий локального экстремума для вариационных функционалов в гладком случае, на случай пространств Соболева  $W^{1,p}(D)$ . Приводится пример интегрального функционала, который в пространстве  $W^{1,2}(D, \mathbb{C})$ ,  $D \subset \mathbb{R}^N$  является  $K$ -непрерывным, но при этом остается разрывным в нуле в обычном смысле.

**Раздел 3** посвящен необходимым условиям компактного экстремума основного вариационного функционала в шкале пространств Соболева над многомерной областью. Основным результатом этого раздела является вывод и обоснование аналога классического необходимого условия локального экстремума — обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского для  $K$ -экстремалей в пространствах Соболева  $W^{1,p}(D)$  и аналога классического необходимого условия Лежандра на случай  $K$ -минимума вариационных функционалов в пространствах Соболева  $W^{1,p}(D)$ . Автором также изучается вопрос о гладкости  $K$ -экстремалей. В частности, приведен пример показывающий, что в отличие от классического вариационного  $C^1$ -случая, существенно повышение гладкости для  $K$ -экстремали в соболевском случае, вообще говоря, не происходит.

В **четвертой главе** получены достаточные условия компактного экстремума вариационных функционалов в пространствах Соболева  $W^{1,p}(D)$  над многомерной компактной областью  $D$  с липшицевой границей, в терминах гессиана подинтегральной

функции. Кроме того, в этой главе автором разработана схема исследования вариационного функционала на нелокальный  $K$ -экстремум. Описан ряд классов вариационных функционалов, допускающих нелокальный  $K$ -экстремум.

## ОБЩЕЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценивая работу в целом, хочу отметить, что диссертация является законченным научным исследованием, полностью соответствует специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, содержит полностью обоснованные и достоверные научные результаты, которые в совокупности являются существенными для развития современного вариационного исчисления в пространствах Соболева и его приложений. Эти результаты полностью изложены в 9 статьях, которые опубликованы в изданиях из перечня ВАК. Как отдельные результаты диссертации, так и диссертация в целом многократно докладывались на авторитетных научных конференциях и научных семинарах. Содержание автореферата идентично отражает основные положения диссертации. Существенных замечаний, которые бы повлияли на общую высокую оценку представленной диссертации у меня нет. Тем не менее, перечислю некоторые.

1. На странице 19 не ясна роль банаховости (полноты) пространства  $K$ -линейных симметричных форм  $(z)^k = \underbrace{(z, z, \dots, z)}_k$  (см., для сравнения, L.I. Nicolaescu, Note of Linear Algebra, University of Notre Dame, 2014).
2. Область значений борелевых отображений (см. определение 2.2.1)  $R_k : D_x \times D_y \times D_z \longrightarrow Z_k^*$  требует уточнения.
3. Результаты параграфа 4.3 (классы нелокальных  $K$ -экстремумов) вполне можно было выделить в отдельную главу.
4. По тексту диссертации встречаются некоторые неточности и опечатки, в частности:
  - В формулировке леммы 2.2.8 (пункт (iii)) и далее по тексту ее доказательства) область интегрирования  $D$  следует заменить на  $D_x$ ;
  - В формуле (2.31) показатель  $p'$  заменить на  $p$ ;
  - В формуле (2.19) выражение  $o(\|h\|_{L_p})^k$  заменить на  $o(\|h\|_{L_p}^k)$ ;
  - На стр. 32 утверждение  $\nabla y \rightarrow \infty$  заменить на  $\|\nabla y\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \infty$ ;
  - Формула (2.52) содержит неточности в части применения неравенства Гельдера-Минковского;
  - На стр. 66 условие  $h \in W^{1,p}(D)$  заменить на  $h \in W_0^{1,p}(D)$ .

Таким образом считаю, что диссертационная работа “Компактные экстремумы и компактно-аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева  $W^{1,p}$  над многомерной областью”, которая представлена к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ, по объему проведенных исследований, ее актуальностью, научным уровнем и количеством публикаций полностью удовлетворяет требованиям ВАК к кандидатским диссертациям, а ее автор — Кузьменко Екатерина Михайловна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой дифференциальных уравнений  
Днепропетровского национального университета  
имени Олеся Гончара

Когут П.И.

Подпись проф. Когута Петра Ильича удостоверяю:

