ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации
Вронского Бориса Михайловича
"Малые движения и собственные колебания системы "жидкость–газ"",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация Бориса Михайловича Вронского посвящена исследованию эволюционных и спектральных задач для различных гидродинамических систем, заполняющих ограниченный сосуд Ω. Тематика безусловно актуальна как в теоретическом, так и в прикладном отношении. Интерес к таким задачам обусловлен возможностью применения к задачам, возникающим в геофизике, физике атмосферы, океанологии, космической технике. В теоретическом отношении — изучаются нестандартные начально-краевые задачи, допускающие анализ в рамках интересных и содержательных теоретико-операторных построений.

В диссертации рассматриваются малые движения и собственные колебания гидродинамических систем, что позволяет использовать линейные (однако, достаточно сложные) модели. Основные объекты исследования — это система "идеальная жидкость — газ"; та же система при вращении сосуда; идеальная стратифицированная жидкость, целиком заполняющая сосуд; и система "вязкая жидкость — газ".

Метод исследования опирается на теоретико-операторный подход к линейным задачам гидродинамики, предложенный и развитый в работах Н. Д. Копачевского и С. Г. Крейна. Автор развивает этот подход в применении к исследуемым задачам. Общая схема такова. Первым этапом исследования является запись исходной начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в операторной форме — как задачи для некоторого эволюционного уравнения в подходящем гильбертовом пространстве. При этом используется ортогональное проектирование на соответствующие соленоидальные и градиентные подпространства. Вводятся и исследуются операторы, отвечающие вспомогательным краевым задачам. Затем изучается спектральная задача, возникающая из эволюционной поиском решений, зависящих от времени по закону $e^{i\omega t}$. Обычно возникает спектральная задача

для некоторого операторного пучка. Требуется изучить свойства операторов, входящих в определение пучка, и привести его к виду, удобному для спектрального анализа. Далее применяются факты из спектральной теории операторных пучков. Здесь автор опирается на результаты Маркуса, Мацаева, Радзиевского, Оразова. Выделяются ветви собственных значений, исследуется их асимптотическое поведение, устанавливаются свойства полноты и базисности системы собственных функций. Наконец, исследуется разрешимость эволюционного уравнения в гильбертовом пространстве с помощью теории абстрактных гиперболических уравнений, что приводит к теоремам о разрешимости исходной начально-краевой задачи в конкретных функциональных классах.

Остановимся подробнее на главных результатах работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы.

В главе 1 (самой объемной в диссертации) изучается гидросистема, состоящая из идеальной несжимаемой жидкости и идеального газа, занимающая ограниченную область Ω. При этом жидкость занимает область Ω_1, а газ — область Ω_2; эти области разделены поверхностью Γ (свободной поверхностью жидкости). К исходной начально-краевой задаче применяется метод ортогонального проектирования. Поиск решений, зависящих от времени по закону $e^{i\omega t}$, приводит к спектральной краевой задаче, особенность которой в том, что спектральный параметр входит как в уравнение в области Ω_2, так и в уравнение на поверхности Γ. Эту задачу удается записать в операторной форме и привести к задаче $y = \lambda \mathcal{A} y$ о спектре самосопряженного положительного компактного оператора $\mathcal{A}$ в подходящем гильбертовом пространстве (здесь $\lambda = \omega^2$). Это позволяет автору доказать, что собственные числа λ_k положительны и накапливаются к $+\infty$, и получить вариационные принципы для собственных значений. Приводятся соображения о существовании двух серий собственных значений с различной асимптотикой, одна из которых отвечает акустическим колебаниям газа, а вторая — поверхностным колебаниям жидкости. Установлено, что система собственных функций образует ортогональный базис в соответствующем гильбертовом пространстве. Далее изучается эволюционная задача с помощью записи в виде абстрактного уравнения гиперболического типа, к которому применимы общие результаты Н. Д. Копачевского и С. Г. Крейна. Итогом является теорема об однозначной разрешимости исходной начально-краевой задачи в подходящих функциональных

классах.

В главе 2 исследуется прежняя система "идеальная жидкость — газ" при условии равномерного вращения сосуда вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_0. Исследование проходит по той же схеме, но теперь спектральная задача уже не сводится к задаче о спектре самосопряженного оператора. Выяснено, что спектр вещественный. Выделяются две спектральных зоны: $|\omega| > 2\omega_0$ и $|\omega| \leq 2\omega_0$. При условии $|\omega| > 2\omega_0$ задача равносильна вопросу о спектре некоторого операторного пучка. С помощью применения метода факторизации Маркуса и Мацаева удается факторизовать изучаемый операторный пучок при некотором дополнительном условии. При этом условии найдены две серии собственных частот $\omega_k^{\pm}$ с предельными точками $\pm\infty$ и выяснено их асимптотическое поведение. Установлено, что система собственных функций образует базис Рисса и p-базис в соответствующем гильбертовом пространстве. Наконец, показано, что отрезок $[-2\omega_0, 2\omega_0]$ принадлежит существенному спектру задачи. С физической точки зрения, дискретному спектру соответствуют поверхностно-акустические колебания системы, а непрерывный спектр обусловлен вращением гидросистемы.

В главе 3 изучаются колебания стратифицированной сжимаемой жидкости. Стратификация выражается в том, что плотность жидкости меняется вдоль вертикальной оси, то есть $\rho_0 = \rho_0(z)$. Накладывается условие устойчивости стратификации. Важным параметром задачи является величина $N_0^2 = \max\{-g(\ln\rho_0(z))'\}$. Выделяются две спектральные зоны: $\lambda > N_0^2$ и $\lambda \in [0, N_0^2]$ (здесь $\lambda = \omega^2$). Спектральная задача при условии $\lambda > N_0^2$ сводится к вопросу о спектре некоторого операторного пучка. Автор изучает свойства операторов, входящих в пучок и, применяя теорию факторизации Маркуса и Мацаева, находит условие факторизации пучка. Если это условие выполнено, то удается выделить серию вещественных собственных значений с предельной точкой $+\infty$. Система собственных функций образует p-базис в соответствующем гильбертовом пространстве. Далее установлено, что существенный спектр задачи занимает отрезок $[0, N_0^2]$. По физическому смыслу дискретная часть спектра отвечает акустическим колебаниям, а непрерывная часть порождается стратификацией. Также доказана однозначная разрешимость исходной начально-краевой задачи.

Глава 4 посвящена изучению частично-диссипативной гидросистемы, состоящей из вязкой несжимаемой жидкости и идеальной сжимаемой

жидкости (газа). Постановка этой задачи наиболее сложная. Исследуются нормальные колебания, то есть решения, зависящие от времени по закону $e^{-\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. В спектральной задаче параметр λ входит как в уравнение в области Ω_1, так и в краевое условие на Γ. В операторной формулировке возникает некоторый операторный пучок. Автор проводит тщательный (технически сложный) анализ этого пучка, применяя результаты Маркуса и Мацаева, а также Радзиевского. Показано, что собственные значения расположены в правой полуплоскости симметрично относительно вещественной оси и примыкают к положительной полуоси и мнимой оси. Найдены четыре различные серии собственных значений — две с предельной точкой в нуле и две с предельной точкой на $+\infty$; описано их асимптотическое поведение. Собственные значения, локализованные вдоль мнимой оси, отвечают акустическим колебаниям. Собственные значения, локализованные вдоль положительной полуоси, связаны с волнами в вязкой жидкости. Изучены свойства полноты системы собственных и присоединенных векторов.

Таким образом, в диссертации изучены четыре модели гидросистем, для которых получены интересные содержательные результаты.

Отдельные мелкие неточности, замеченные мною на предварительном этапе знакомства с материалом диссертации, были устранены автором при подготовке окончательной версии работы. Приведу три более существенных замечания.

1. Для справедливости леммы 1.1 (а именно, для того, чтобы область определения самосопряженного оператора B_σ содержалась в $H^2(\Gamma)$) нужны какие-то предположения о поверхности Γ. Достаточно, чтобы сама поверхность Γ и ее край $\partial\Gamma$ были гладкими. Предположения о липшицевости $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, сделанного на стр. 18, здесь недостаточно.

2. В диссертации имеется систематическая ошибка, связанная с описанием функциональных классов. Класс функций φ_2 в (1.128), (1.129) (стр. 37) задан некорректно. Дело в том, что для произвольных функций $\varphi_2 \in H^1(\Omega_2)$ значение нормальной производной $\partial\varphi_2/\partial n$ на границе не определено. Первые производные от φ_2 принадлежат $L_2(\Omega_2)$ и следов на границе (даже в обобщенном смысле) не имеют. По-видимому, правильным классом

функций здесь является такой:

$$\varphi_1 \in H^1_{\Omega_1}, \quad \Delta\varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_{S_1} = 0; \quad \varphi_2 \in H^1_{\Omega_2}.$$

Аналогично, класс функций (1.163) (стр. 44) задан некорректно. Видимо, правильным классом является такой:

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \{\varphi = (\varphi_1; \varphi_2) : \ \varphi_1 \in H^1_{h,S_1}(\Omega_1); \quad \varphi_2 \in H^1_{\Omega_2}\}.$$

При таком определении класса $\mathcal{H}^1(\Omega)$ утверждение леммы 1.6 останется в силе (но доказательство надо менять).

3. Имеется систематическая неточность, связанная с соболевскими пространствами с полуцелыми значками. На стр. 29, 72, 113 ошибочно утверждается, что пространством, сопряженным к $H^{1/2}(\Gamma)$ (относительно спаривания в $L_2(\Gamma)$) является $H^{-1/2}(\Gamma)$. В действительности, $(H^{1/2}(\Gamma))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$, где $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ определяется как подпространство в $H^{-1/2}(\Gamma)$, состоящее из (обобщенных) функций, допускающих продолжение нулем до элемента из $H^{-1/2}(\partial\Omega_1)$. Известно, что $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ является собственным подпространством в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

   Аналогичное недоразумение имеется на стр. 115 и 122. Там в качестве "позитивного" пространства должно выступать $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ — подпространство в $H^{1/2}(\Gamma)$, состоящее из функций, продолжимых нулем до элемента из $H^{1/2}(\partial\Omega_1)$. Тогда "негативным" пространством является $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma)$.

Отмеченные выше неточности допускают несложные исправления, которые не отразятся на характере результатов. Это дает основание оценить результаты диссертации в целом положительно.

Таким образом, диссертация Б. М. Вронского посвящена актуальной теме и содержит новые интересные результаты в области теории эволюционных и спектральных задач линейной гидродинамики. Работа выполнена на высоком научном уровне с применением разнообразных методов и технических приемов спектральной теории операторов (включая теорию операторных пучков) и теории дифференциальных уравнений в частных производных. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях автора и неоднократно докладывались на

семинарах и конференциях. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация "Малые движения и собственные колебания системы "жидкость–газ"" удовлетворяет требованиям ВАК о порядке присуждения ученых степеней, а ее автор Вронский Борис Михайлович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики
и математической физики
Санкт-Петербургского
государственного университета

Т. А. Суслина

11 ноября 2014 года

ПОДПИСЬ РУКИ
Т. А. Суслиной
ЗАВЕРЯЮ. НАЧАЛЬНИК
ОТДЕЛА КАДРОВ
Н. А. ГОРИНОВА
11.11.14