МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ХАЛИЛОВА ЗАРЕМА ИСМЕТОВНА

УДК 517.98: 517.972

КОМПАКТНЫЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ В БАНАХОВЫХ КОНУСАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Симферополь — 2014

Диссертация является рукописью
Работа выполнена на кафедре алгебры и функционального анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского в г. Симферополь.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, **Орлов Игорь Владимирович,** Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, заведующий кафедрой алгебры и функционального анализа
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, **Гольдман Михаил Львович** Российский университет дружбы народов, г. Москва, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации
	кандидат физико-математических наук, доцент **Уксусов Сергей Николаевич** Воронежский государственный университет, г. Воронеж, доцент кафедры теории функций и геометрии

Защита состоится «28» ноября 2014 г. в 14.00 ч на заседании специализированного ученого совета К 52.051.10 в Таврическом национальном университете им. В. И. Вернадского по адресу: г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Таврического национального университета им. В. И. Вернадского по адресу: г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4,
на сайте Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
http://science.crimea.edu/zashita/xalilova/index.html

Автореферат разослан «____» октября 2014 г.

Ученый секретарь
специализированного ученого совета К 52.051.10 Ф. С. Стонякин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Вариационные задачи с негладким интегрантом составляют важную часть современного вариационного исчисления.

Так, например, введение модуля под знак классического вариационного функционала уже приводит к экстремальной задаче, которая не поддается исследованию классическими методами, ввиду нарушения гладкости интегранта.

В подобных ситуациях обычно применяются методы негладкого анализа, использующие различные типы субдифференциалов, каждый из которых имеет свои преимущества и свою разумную область применимости.

Субдифференциалы, как инструмент негладкого анализа, достаточно давно получили признание в математике. Начиная с классического субдифференциала выпуклого функционала появились и продолжают появляться новые определения субдифференциалов, рассчитанные на применение к различным классам экстремальных и других негладких задач (такие, как известный субдифференциал Ф. Кларка, субдифференциал Б. Н. Пшеничного и многие другие). В большинстве своем эти определения с отображениями в евклидовы пространства, но имеются и более общие.

Субдифференциалам и их приложениям посвящено большое количество современных работ. Среди авторов отметим Е. К. Басаева, В. Ф. Демьянова, А. Г. Кусраева, С. С. Кутателадзе, В. Л. Левина, А. Д. Иоффе, Ю. Э. Линке, А. М. Рубинова, В. А. Рощину, а также J. M. Borwein, B. Dacorogna, A. Ya. Kruger.

При всем том, "больным местом" современного субдифференциального исчисления является отсутствие значимой теории субдифференциалов высших порядков.

Это ведет, например, к отсутствию достаточных условий экстремума вне рамок выпуклости (в той или иной форме). По существу, это ограничивает общую теорию экстремальных задач "прямыми методами" , восходящими к принципу Гильберта-Лебега.

Таким образом, назрела необходимость в построении развитого субдифференциального исчисления, включающего исчисления первого и высших порядков, вплоть до формулы Тейлора и теории экстремумов, и имеющего широкую область применимости.

В работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина был введен и подробно исследован в случае скалярного аргумента так называемый компактный субдифференциал (K–субдифференциал) для отображений вещественного аргумента в ЛВП.

В случае пространств Фреше K–субдифференциал оказался адекватным инструментом и позволил найти топологическое решение проблемы Радона –

Никодима.

Естественным образом возник вопрос о переносе понятия K–субдифференциала на случай векторного аргумента. Вопрос диктуется не только внутренней логикой теории, но и соображением (возможно, более важным) о приложениях в вариационном исчислении.

В диссертации построено развитое K–субдифференциальное исчисление, включающее исчисления первого и высших порядков. Полученные результаты позволяют исследовать вариационные экстремальные задачи с негладким (так называемым субгладким) интегрантом, которые не могут быть исследованы классическими методами.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа выполнялась в рамках госбюджетной темы кафедры алгебры и функционального анализа Таврического национального университета имени В.И. Вернадского "Проблемы функционального и бесконечномерного анализа"(2011-2015 гг., номер государственной регистрации 0111U000916), в которой автор принимал участие в качестве исполнителя.

Цель и задачи исследования. Описание нормированных и банаховых конусов. Построение аппарата теории многозначных субаддитивных операторов с компактными выпуклыми значениями (K–операторов) в банаховых конусах.

Применение полученных результатов для построения, в основных чертах, развитой теории компактных субдифференциалов для отображений в банаховых конусах первого и высших порядков, вплоть до формулы Тейлора и теории экстремумов.

Приложения к вариационным функционалам с субгладким интегрантом. Получение оценки K–субдифференциала первого и второго порядка вариационного функционала, получение компактного выпуклого аналога уравнения Эйлера–Лагранжа, необходимого условия Лежандра, достаточного условия Лежандра-Якоби. Рассмотрение конкретных примеров.

Объект исследования. Компактные субдифференциалы отображений в банаховых конусах, компактные субдифференциалы вариационных функционалов с субгладким интегрантом первого и второго порядка.

Предмет исследования. Основные аналитические свойства K–субдифференцируемых отображений, основные аналитические свойства компактных субдифференциалов вариационных функционалов с субгладким интегрантом.

Методы исследования. В данной работе применяются методы негладкого анализа, функционального анализа, вариационного исчисления, дифференциальных уравнений и бесконечномерного математического анализа.

В частности, методы негладкого анализа и бесконечномерного дифференциального исчисления применяются при построении развитого исчисления компактных субдифференциалов отображений векторного аргумента.

Методы функционального анализа применяются при построении функциональной базы, которая включает в себя элементы теории абстрактных нормированных конусов, общей теории сублинейных операторов и функционалов, теории сублинейных K–операторов и K–функционалов.

Методы вариационного исчисления и теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах применяются при исследовании аналога уравнения Эйлера-Лагранжа — "включения Эйлера-Лагранжа" , а также получении аналогов необходимого условия Лежандра и условий Лежандра–Якоби.

Научная новизна полученных результатов.

1. Впервые исследованы абстрактные банаховы конуса (вообще говоря, не вложенные ни в одно банахово пространство). В частности, получен результат о квазиполноте абстрактных банаховых конусов.

2. Впервые изучены сублинейные K–операторы в банаховых конусах. В частности, получена теорема о квазиполноте банахова конуса ограниченных K–операторов.

3. Впервые, на основе теории K–пределов и K–операторов, построена теория K–субдифференциалов первого порядка в банаховых конусах.

В частности, получены формула полного K–субдифференциала, формула K–субдифференциала композиции.

4. Впервые получены K–аналоги формулы конечных приращений и теоремы о среднем в банаховых конусах. В частности, эти результаты позволили показать, что в достаточно общей ситуации K–субдифференцируемость всюду на отрезке влечет почти всюду классическую дифференцируемость.

5. Впервые построена замкнутая теория K–субдифференциалов высших порядков в банаховых конусах.

В частности, получены K–аналоги ряда основных результатов классического анализа Фреше, от теоремы Юнга до формулы Тейлора и теории экстремумов.

6. Впервые получена оценка компактных субдифференциалов первого и второго порядка вариационного функционала с субгладким интегрантом.

7. Впервые получены субгладкие аналоги основной вариационной леммы и уравнения Эйлера–Лагранжа для основного вариационного функционала.

8. Впервые получены субгладкие аналоги простого и усиленного условий Лежандра, а также условий Лежандра–Якоби для основного вариационного функционала.

Практическое значение полученных результатов. Диссертация имеет в основном теоретическое значение. Результаты диссертации развивают теорию компактных субдифференциалов для случая векторного аргумента, позволяют исследовать экстремальные вариационные задачи с субгладким интегрантом.

Результаты исследований могут быть использованы в актуальных задачах современного вариационного исчисления и оптимального управления, имеющих приложения в математической физике, в частности, для исследования субгладких задач механики и физики.

Личный вклад соискателя. Работы [1], [2], [5], [6] опубликованные по теме диссертации, не имеют соавторов. Работы [3], [4], [7] вышли в соавторстве с научным руководителем И. В. Орловым. Результаты, опубликованные в работах [1], [2], [5], [6], получены соискателем самостоятельно.

В работах [3], [4], [7] профессору И. В. Орлову принадлежит постановка задачи и общий план исследования, полученные результаты принадлежит соискателю.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались на Международной молодежной математической школе SOPAPH-2012 «SMOOTHNESS, OSCILLATIONS IN ANALYSIS WITH APPLICATIONS IN MATHEMATICALS PHYSICS» (Симферополь, Украина, 17-20 июня, 2012); Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii, (Donetsk, Ukraine, November 14 – 17, 2012); VIII международной научной конференции для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харьков, Украина, 17-28 апреля, 2013); International Conference Analysis and mathematical physics (Kharkiv, Ukraine, 24-28 June, 2013); International Conference Nonlinear partial differential equations (Donetsk, Ukraine, September 9-14, 2013); XXII-XXIII, XXV Крымских осенних математических школах-симпозиумах: КРОМШ-2011, КРОМШ-2012, КРОМШ-2014 (Ласпи, Судак, Крым, 2011-2012, 2014 гг.); Крымской международной математической конференции (Судак, Украина, 22 сентября – 4 октября, 2013); XL-XLIII научных конференциях профессорско-преподавательского состава Таврического национального университета им. В.И. Вернадского (Симферополь, Крым, 2011-2014 гг.); семинарах кафедры алгебры и функционального анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, выводов, списка использованной литературы. Полный объем работы – 164 страницы, в том числе основного текста – 135 страниц. Список использованной литературы насчитывает 184 названия.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 научных работах, 7 из которых в изданиях, входящих в список специализированных научных изданий МОНУ ([1] – [7]), 8 публикаций в сборниках тезисов конференций ([8] – [15]).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении раскрывается сущность и состояние научной проблемы и ее значимость. Проведен обзор полученных результатов, выделены положения, выносимые на защиту. Нумерация утверждений в диссертации и автореферате одна и та же.

В разделе 1 приводится краткая историческая справка о круге вопросов, имеющих отношение к теме работы. Приведен обзор литературы по теме диссертации и сформулированы основные результаты, достигнутые в этом направлении.

Раздел 2 посвящен исследованию абстрактных нормированных конусов, сублинейных и K–сублинейных операторов в нормированных конусах. Раздел 2 состоит из введения и трех подразделов.

Подраздел 2.1 содержит общую теорию абстрактных нормированных конусов: вводится определение абстрактного и нормированного конусов, строится локально выпуклая конус-топология, доказана квазиполнота банаховых абстрактных конусов.

Определение 2.1.1. *Конусом* (выпуклым) назовем некоторое множество векторов $X = \{x\}$, снабженное операциями сложения векторов и умножения на неотрицательные скаляры.

Определение 2.1.3. Выпуклый конус X назовем *нормированным*, если для любого его элемента $x \in X$ определена неотрицательная величина (*конус–норма*) $\|x\|$, обладающая следующими свойствами: (i) $(\|x\| = 0) \iff (x = 0)$; (ii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$; (iii) $\|\lambda \cdot x\| = \lambda \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \ge 0)$.

Конус–норма индуцирует *локально выпуклую конус–топологию* в X.

Определение 2.1.6. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированный конус. Обозначим через X_K множество всех компактных выпуклых подмножеств X. Нетрудно проверить, что X_K образует выпуклый конус относительно поэлементного сложения множеств и умножения на неотрицательные скаляры.

Нулем в X_K является множество $\{0\}$.

Теорема 2.1.11. Если X — банахов конус, то нормированный конус X_K — также банахов.

В п. 2.2 строится теория сублинейных операторов в нормированных конусах, а также бисублинейных операторов. Исследуются основные свойства, в том числе получен аналог классической изометрии между пространством линейных и билинейных ограниченных операторов.

Определение 2.2.1. Пусть E — выпуклый конус, F — индуктивно упорядоченный выпуклый конус. Оператор $A : E \to F$ назовем *сублинейным*, если: (i) $A(h_1 + h_2) \preceq Ah_1 + Ah_2$; (ii) $A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah$; $(\forall h_1, h_2 \in E, \forall \lambda \ge 0)$.

Оператор A назовем *надлинейным*, если условие (i) заменить условием

(iii) $A(h_1 + h_2) \succeq Ah_1 + Ah_2$.

Определение 2.2.2. Пусть E — выпуклый конус, $F = \mathbb{R}$. Тогда сублинейный оператор $f : E \to \mathbb{R}$ назовем *сублинейным функционалом.*

В этом случае условия (i)–(ii) перепишутся в виде:
$(iv) \quad f(h_1 + h_2) \leq f(h_1) + f(h_2);\ f(\lambda h) = \lambda \cdot f(h) \quad (\lambda \geq 0)$.

Соответственно, для надлинейного функционала первое из неравенств (iv) заменяется неравенством: $\quad (v) \quad f(h_1 + h_2) \geq f(h_1) + f(h_2)$.

Далее, E и F — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен (согласованно с нормой: $(y_1 \preceq y_2) \Rightarrow (\|y_1\| \preceq \|y_2\|)$).

Определение 2.2.7. Пусть оператор $A : E \to F$ — сублинейный. Положим (по аналогии с линейным случаем): $\|A\| := \sup\limits_{\|h\| \leq 1} \|Ah\|$. Если $\|A\| < +\infty$, назовем оператор A *ограниченным.*

Определение 2.2.17. Пусть E_1, E_2, F — выпуклые конусы, F индуктивно упорядочен. Оператор $B : E_1 \times E_2 \to F$ назовем *бисублинейным*, если он сублинеен по каждой переменной в отдельности, т. е.

(i) $B(h_1 + h_2, k) \preceq B(h_1, k) + B(h_2, k); \quad B(h, k_1 + k_2) \preceq B(h, k_1) + B(h, k_2);$

(ii) $B(\lambda h, k) = \lambda \cdot B(h, k); \quad B(h, \mu k) = \mu \cdot B(h, k)\ (\lambda,\ \mu \geq 0)$.

Справедлив аналог классической изометрии между пространством линейных и билинейных ограниченных операторов.

Теорема 2.2.22. Если $E_1, E_2; F$ — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен, то имеет место изометрия: $L_{sub}(E_1, E_2; F) \cong L_{sub}(E_1; L_{sub}(E_2; F))$, которая устанавливается с помощью биекции $(B : E_1 \times E_2 \to F) \longleftrightarrow (A_B : E_1 \to L_{sub}(E_2; F))$, $(A_B h)k = B(h, k)$.

В п 2.3 рассматривается частный случай сублинейных операторов — сублинейные K-операторы. Построена теория сублинейных K-операторов, а также K-функционалов и бисублинейных K-функционалов.

Определение 2.3.1. Пусть E — выпуклый конус, F — нормированный конус, F_K — нормированный упорядоченный конус выпуклых компактных подмножеств F. Сублинейный оператор $A : E \to F_K$ назовем *сублинейным K–оператором*, или, коротко, *K–оператором.*

Сублинейный оператор $f : E \to \mathbb{R}_K$ назовем *сублинейным K–функционалом*, или, коротко, *K–функционалом.*

В случае нормированного конуса E, банахов конус сублинейных ограниченных K–операторов $L_{sub}(E; F_K)$ будем более коротко обозначать $L_K(E; F)$; банахов конус сублинейных ограниченных K-функционалов $L_{sub}(E; \mathbb{R}_K) = L_K(E; \mathbb{R})$ более коротко обозначим E^*_K.

Теорема 2.3.16. Пусть E_1, E_2 – выпуклые конусы, $\varphi : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}_K$. Тогда φ — бисублинейный K–функционал в том и только в том случае, если

$$\varphi(h_1, h_2) = [\underline{\varphi}(h_1, h_2); \overline{\varphi}(h_1, h_2)],$$

где $\underline{\varphi} : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ — *бинадлинейный функционал*, $\overline{\varphi} : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ — *бисублинейный функционал*, $\underline{\varphi}(h_1, h_2) \le \overline{\varphi}(h_1, h_2)$.

При этом, если E_1, E_2 — нормированные конусы, то K–функционал $\varphi = [\underline{\varphi}; \overline{\varphi}]$ ограничен в том и только в том случае, когда $\underline{\varphi}$ полунепрерывен снизу, $\overline{\varphi}$ полунепрерывен сверху на $E_1 \times E_2$.

В разделе 3, помимо необходимого технического аппарата K–субдифференциалов отображений векторного аргумента, описан удобный для приложений новый класс субгладких отображений, которые заведомо K–субдифференцируемы.

Примененный подход позволяет дать индуктивное определение K–субдифференциалов второго и высших порядков, что позволяет построить K–субдифференциальное исчисление высшего порядка.

Глава состоит из введения и семи основных подразделов. В первом подразделе приведен краткий обзор теории K–субдифференциалов отображений скалярного аргумента, которая была построена и подробно изучена в работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина.

Далее $f : I = [a; b] \longrightarrow E$, где E – пространство Фреше. Введем вспомогательное определение K–предела.

Определение 3.1.1.[1] Пусть $\{B_\delta\}_{\delta > 0}$ — убывающая по вложению при $\delta \searrow +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств E с непустым *компактным* пересечением B. Множество B назовем *K–пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta > 0}$ при $\delta \to +0$:

$$B = K\text{-}\lim_{\delta \to +0} B_\delta,$$

если $\forall\, U(0) \subset E \;\exists\, \delta_U > 0 \; (0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow (B_\delta \subset B + U)$.

Определение 3.1.2.[2] *K–субдифференциал* отображения f в точке $x \in I$ есть K–предел замкнутых выпуклых оболочек разностных отношений:

$$\partial_K f(x) = K\text{-}\lim_{\delta \to +0} \overline{co} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \middle| \, 0 < |h| < \delta \right\}.$$

---

[1] И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин, Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты, Современная математика. Фундаментальные направления, 34 (2009), 121 – 138.

[2] Ф. С. Стонякин, Компактные характеристики отображений и их приложения к интегралу Бохнера в локально выпуклых пространствах, Дисс. к.ф.-м.н., Симферополь (2011).

Теорема 3.1.7.[3] Пусть E — пространство Фреше, $f : I \to E$. Если отображение f K–субдифференцируемо почти всюду на I, и при этом f *почти всюду сепарабельнозначно* на I, то f дифференцируемо в обычном смысле почти всюду на I.

В частности, утверждение теоремы справедливо, если f *непрерывно и почти всюду K–субдифференцируемо* на I (и тем более, если f *всюду K–субдифференцируемо* на I).

Во втором подразделе вводятся K–пределы (для нормированных конусов) убывающих систем замкнутых выпуклых подмножеств, посредством которых определяются в дальнейшем K–субдифференциалы. К известным свойствам добавлен новый "признак Вейерштрасса"для K–пределов, фундаментальный для дальнейшего.

Теорема 3.2.6. Пусть E — нормированный конус, $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложению при $\delta \searrow +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств E с непустым *компактным* пересечением B. K–предел $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta$ существует тогда и только тогда, когда найдется такой выпуклый компакт $\widetilde{B} \subset E$, что

$$\forall\, U(0) \subset E \quad \exists \delta_U > 0 : \quad (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset \widetilde{B} + U(0)).$$

При этом $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta \subset \widetilde{B}$.

В п 3.3. переходим к определению K–субдифференциалов отображений в банаховых конусах, следуя классической схеме гладкого анализа Фреше.

Всюду далее E, F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $h \in E$ — произвольное направление в E, $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества в F.

Определение 3.3.1. Назовем *K–субдифференциалом* отображения f в точке x следующий K–предел (если он существует):

$$\partial_K f(x,h) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} \overbrace{\overline{co}\,\{Y \in F \,|\, f(x+t\cdot h) = f(x) + t\cdot Y,\, 0<t<\delta\}}^{\partial_\delta f(x,h)}.$$

В случае, когда F — нормированное пространство, выражение под знаком K–предела можно выразить в более привычной форме, через разностные отношения:

$$\partial_K f(x,h) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co} \left\{ \left. \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \right| \, 0<t<\delta \right\}$$

---

[3] Ф. С. Стонякин, Аналог теоремы Данжуа-Юнг-Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрированияю, Труды ИПММ НАН Украины, 20 (2010), 168 – 176

Далее E и F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 3.3.9. Будем говорить, что отображение f *слабо K–субдифференцируемо* в точке x, если f K–субдифференцируемо в этой точке по любому направлению $h \in E$, и K–субдифференциал по направлению $\partial_K f(x,h)$ *сублинеен по h*. Примем в этом случае обозначение

$$\partial_K f(x)h = \partial_K f(x,h).$$

Здесь $\partial_K f(x) : E \to F_K$ — сублинейный K–оператор.

Определение 3.3.10. Будем говорить, что отображение f *K–субдифференцируемо по Гато* в точке x, если f слабо K–субдифференцируемо в этой точке и слабый K–субдифференциал $\partial_K f(x)$ ограничен (или, что равносильно, равномерно полунепрерывен сверху на E).

В этом случае сублинейный ограниченный оператор $\partial_K f(x)$ назовем *K–субдифференциалом Гато* отображения f в точке x.

Определение 3.3.11. Будем говорить, что отображение f *K–субдифференцируемо по Фреше* (или *сильно K–субдифференцируемо*) в точке x, если f K–субдифференцируемо по Гато в этой точке, и сходимость в K–пределе

$$\partial_K f(x)h = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\{Y \in F | f(x+h) = f(x) + t\cdot Y,\ 0 < t < \delta\}$$

равномерна по всем направлениям h, $0 < \|h\| \leq 1$.

В этом случае K–оператор $\partial_K f(x)$ назовем *K–субдифференциалом Фреше* (или *сильным K–субдифференциалом*) отображения f в точке x.

В случае нормированного пространства F равенство выше принимает вид:

$$\partial_K f(x)h = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\left\{\frac{f(x+th)-f(x)}{t}\ \middle|\ 0 < t < \delta\right\}.$$

Следующие три пункта посвящены аналогам классических результатов: получена теорема о среднем для K–субдифференцируемых отображений. Рассмотрена связь K–субдифференцируемости на отрезке с обычной дифференцируемостью.

Теорема 3.4.4. Пусть E и F — нормированные конусы, отображение $f : E \supset U([x; x+h]) \to F$ непрерывно на $[a; b]$ и K–субдифференцируемо на $(a; b)$. Справедливы представление и оценка:

$$f(x+h) = f(x) + y,\ \text{где } \|y\| \leq \sup_{0<\theta<1} \|\partial_K f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|. \tag{1}$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (1) можно записать в виде:

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \sup_{0<\theta<1} \|\partial_K f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|.$$

Приведем определение C^1–субгладкости для случая функционалов.

Теорема 3.5.5. Пусть E — нормированный конус, $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Тогда

$$(f \in C^1_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\underline{\partial h}} \text{ полунепрерывен снизу в точке } x, \right.$$

$$\left. \frac{\overline{\partial f}}{\partial h} \text{ полунепрерывен сверху в точке } x \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f \ K\text{–субдифференцируем в точке } x).$$

Теорема 3.6.2. Пусть F — банахово пространство, $F : \mathbb{R} \supset [a; b] \to F$. Если отображение f *непрерывно K–субдифференцируемо* в некоторой точке $x \in [a; b]$, то f дифференцируемо в точке x в обычном смысле.

Примененный подход позволяет без труда дать индуктивное определение K–субдифференциалов второго и высших порядков.

Раздел 3.7 посвящен K–субдифференциальному исчислению высшего порядка. Получены аналоги основных результатов классического анализа Фреше, от теоремы Юнга до формулы Тейлора и теории экстремумов.

Всюду далее E, F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность $x \in E$, $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 3.7.1. Пусть отображение f (сильно) K–субдифференцируемо на множестве $U(x)$. Если отображение $\partial_K f : E \supset U(x) \to L_K(E; F)$ K–субдифференцируемо в точке x, то будем говорить, что f *дважды K–субдифференцируемо* в точке x, и введем *K–субдифференциал второго порядка* от f стандартным индуктивным образом: $\partial^2_K f(x) := \partial_K(\partial_K f)(x)$.

Определение 3.7.4. Для фиксированных $h, k \in E$ предположим, что существует следующий K–предел :

$$\widehat{\partial}^2_K f(x)(h, k) = K\text{-}\lim_{\delta \to +0} \overline{co}\Big\{ z \in F \Big| f(x + th + sk) + f(x) =$$

$$= f(x + th) + f(x + sk) + (st)z \Big| 0 < t, s < \delta \Big\},$$

который назовем *бисимметрическим вторым K–субдифференциалом* f в точке x по паре направлений (h, k).

Теорема 3.7.6. Пусть E и F — банаховы пространства, $f : E \supset U(x) \to F$. Если отображение f дважды K–субдифференцируемо в точке x, то f также бисимметрически K–субдифференцируемо в точке x, причем $\partial^2_K f(x)(h, k) = \widehat{\partial}^2_K f(x)(h, k)$.

В частности, $\partial^2_K f(x)(h, k) = \partial^2_K f(x)(k, h) \quad (\forall h, k \in E)$.

Определение 3.7.8. Пусть отображение f K–субдифференцируемо $(n-1)$ раз в $U(x)$. Если отображение:

$$\partial_K^{n-1} f : E \supset U(x) \longrightarrow L_K(\underbrace{E, ..., E}_{n-1}; F) =: L_K^{n-1}(E; F)$$

K–субдифференцируемо в точке x, то мы будем говорить, что f *n раз K–субдифференцируемо* в точке x и введем *K–субдифференциал n–го порядка* от f обычным индуктивным образом:

$$\partial_K^n f(x) := \partial_K(\partial_K^{n-1} f)(x).$$

Теорема 3.7.10. Пусть E, F — нормированные пространства. Если отображение $f : E \supset U(x) \to F$ n раз K–субдифференцируемо в точке x, то f дифференцируемо $(n-1)$ раз в обычном смысле в этой точке.

В частности, если f n раз K–субдифференцируемо в $U(x)$, то $\partial_K^n f(x) = \partial_K \Big(f^{(n-1)} \Big)(x)$.

Приведем определение C^n–субгладкости для функционалов.

Теорема 3.7.23. Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Тогда

$$(f \in C^n_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \Bigg(\text{все} \quad \frac{\partial}{\underline{\partial x_{i_n}}} \bigg(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}} \bigg) \text{ и } \frac{\overline{\partial}}{\partial x_{i_n}} \bigg(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}} \bigg)$$

$$\text{полунепрерывны в точке } x, \text{ соответственно, снизу и сверху} \Bigg) \Longleftrightarrow \Big(\exists\, \partial_K^n f(x) \Big).$$

Рассмотрим формулу Тейлора в форме Пеано лишь в случае отображений в нормированных пространствах.

Теорема 3.7.26. Пусть E, F – нормированные пространства, $f : E \supset U(x) \longrightarrow F$. Если f K–субдифференцируемо n раз в точке x, то:

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k \right] - \frac{1}{n!} \partial_K^n f(x) \cdot (h)^n = o(\|h\|^n).$$

Если при этом f K–субдифференцируемо n раз в окрестности x, то предыдущее равенство принимает вид:

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k \right] - \frac{1}{n!} \partial_K \Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1} \Big)(x) h = o(\|h\|^n).$$

Теорема 3.7.32. Пусть E — нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \longrightarrow \mathbb{R}$, функционал f дважды K–субдифференцируем в точке x, причем $f'(x) = 0$. Если выполнено условие: $\partial_K^2 f(x) \gg 0$, то f достигает строгого локального минимума в точке x.

Раздел 4 посвящен детальному рассмотрению приложения K–субдифференциального исчисления к исследованию экстремальных вариационных задач с негладким (а именно субгладким) интегрантом (одномерный случай).

Глава состоит из введения и двух подразделов.

Первый подраздел содержит вариационные приложения теории K–субдифференциалов первого порядка к экстремальным задачам с субгладким интегрантом. Приведем оценку K–субдифференциала основного вариационного функционала с субгладким интегрантом.

Теорема 4.1.1. Пусть для вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), u = f(x, y, z)),$$

интегрант f является *C^1–субгладким*: $f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3)$.

Тогда Φ сильно K–субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причём $\forall h \in C^1[a;b]$ справедлива оценка:

$$\partial_K \Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y')h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y')h'\right) dx;\right.$$

$$\left.\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y')h'\right) dx\right].$$

Приведем K–аналог основной вариационной леммы.

Теорема 4.1.7. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2[a;b]$. Если

$$0 \in \left[\int\limits_a^b \varphi_1(x)h(x)dx; \int\limits_a^b \varphi_2(x)h(x)dx\right] \quad (\forall h \in C[a;b]),$$

то $0 \in [\varphi_1; \varphi_2]$.

Перейдем теперь к субгладкому аналогу уравнения Эйлера–Лагранжа.

Теорема 4.1.8. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b).$$

Тогда условие $0 \in \partial_K \Phi(y)$ равносильно выполнению "*включения Эйлера–Лагранжа*":

$$0 \in \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')\right);\ \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')\right)\right] \qquad (2)$$

почти всюду на $[a;b]$.

В частности, если Φ достигает локального экстремума в точке y, то включение для y выполнено почти всюду на $[a;b]$.

На базе теории K–субдифференциалов высших порядков в п. 4.2 получена оценка второй вариации K–субдифференциала вариационного функционала.

Теорема 4.2.1. Рассмотрим вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b]).$$

Функционал $\Phi(y)$ дважды K–субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причём справедлива оценка:

$$\partial^2_K \Phi(y)(h)^2 \subset \Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh'\right)dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh'\right)dx\Bigg] +$$

$$+\Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right)dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right)dx\Bigg].$$

Сформулируем необходимое условие второго порядка для минимума вариационного функционала с интегрантом из класса $C^2_{sub}(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 4.2.6. (*"Верхнее" условие Лежандра*) Рассмотрим вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b).$$

Если функционал $\Phi(y)$ достигает локального минимума в точке $y \in C^1[a;b]$, то
$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') \geq 0 \ \text{ всюду на [a;b].}$$

Центральным результатом является субгладкий аналог условий Лежандра–Якоби.

Теорема 4.2.12. Рассмотрим вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b).$$

Предположим, что y — субэкстремаль функционала $\Phi(y)$, т. е. почти всюду удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа. Пусть вдоль субэкстремали y выполнены следующие условия:

(i) $\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') > 0$ при $a \leq x \leq b$ ("нижнее" усиленное условие Лежандра);

(ii) для каждого из *четырёх уравнений Якоби*, соответствующих вершинам двумерного матричного отрезка $[\underline{J}^2 f(x);\, \overline{J}^2 f(x)]$:

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0;$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0;$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0;$$

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0;$$

$$(h(a) = 0,\ h'(a) = 1)$$

выполнено условие Якоби отсутствия сопряжённых точек.

Тогда функционал $\Phi(y)$ достигает строгого локального минимума в точке y.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертации построена, в основных чертах, замкнутая теория K-субдифференциального исчисления первого и высших порядков и исследованы ее приложения к вариационным экстремальным задачам. Получены следующие основные результаты.

1. Введены и исследованы нормированные и банаховы выпуклые конусы. Исследованы общие свойства сублинейных и бисублинейных операторов, действующих в нормированных конусах.

2. Введены и исследованы сублинейные и бисублинейные K–операторы, действующие в банаховых конусах. В частности, исследованы сублинейные и бисублинейные K-функционалы.

3. Для отображений в банаховых конусах построено развитое K–субдифференциальное исчисление первого порядка. В частности, получен K–аналог теоремы о среднем и установлена связь K–субдифференциала и субгладкости.

4. Построено замкнутое K–субдифференциальное исчисление высших порядков. В частности, получены K–аналоги теоремы Юнга, формулы Тейлора, построена K–теория экстремумов.

5. Для вариационных функционалов с субгладким интегрантом первого порядка получены K–аналоги основной вариационной леммы и уравнения Эйлера–Лагранжа. Рассмотрены примеры.

6. Для вариационных функционалов с субгладким интегрантом второго порядка получены K–аналоги условия Лежандра и условий Лежандра–Якоби. Рассмотрены примеры.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Халилова З. И. K–сублинейные многозначные операторы и их свойства / З. И. Халилова // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки". – 2011. – Т. 24(63), № 3. – С. 110–122.

2. Халилова З. И. Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам / З. И. Халилова // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки". — 2012. – Т. 25(64), № 2. — С. 140–160.

3. Орлов И. В. Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам / И. В. Орлов, З. И. Халилова // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2013. – Т. 49. – С. 99–131.

4. Орлов И. В. Компактные субдифференциалы в банаховых конусах / И. В. Орлов, З. И. Халилова // Украинский математический вестник. – 2013. – Т. 10, № 4. – С. 532—558.

5. Халилова З. И. Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам / З. И. Халилова // Динамические системы. — 2013. – Т. 3(31), № 1–2. — С. 115 – 134.

6. Халилова З. И. Экстремальные вариационные задачи с субгладким интегрантом. / З. И. Халилова // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки". – 2014. – Т. 27(66), № 1. – С. 125–153.

7. Orlov I. V. Compact Subdifferentials in Banach Cones / I. V. Orlov, Z. I. Khalilova // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. – Volume 198, Issue 4. – P. 438–456.

8. Орлов И. В. Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах: очерк общей теории / И. В. Орлов, З. И. Халилова // XXII международная научная конференция KROMSH-2011 (Крым, Ласпи-Батилиман, 17–29 сентября 2011 г.): тез. докл. – 2011. – С. 40–41.

9. Халилова З. И. Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам / З. И. Халилова // XXIII международная научная конференция KROMSH-2012 (Крым, Ласпи-Батилиман, 17–29 сентября 2012 г.): тез. докл. – 2012. — С. 70.

10. Халилова З. И. Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам / З. И. Халилова // Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii (November 14 – 17, 2012, Donetsk, Ukraine): book of abstract. – 2012. – P. 87.

11. Халилова З. И. Компактные субдифференциалы и их применение к вариационным задачам / З. И. Халилова // VIII международная научная конференция для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харьков, 17-28 апреля 2013 г.): тез. докл. — 2013. – С. 77.

12. Халилова З. И. Компактные субдифференциалы и их приложения / З. И. Халилова // XLII научная конференция профессорско-преподавательского состава, аспирантов и студентов ТНУ им. В. И. Вернадского (Симферополь, 2013 г.): материалы конференции. – 2013. – С. 299 — 300.

13. Khalilova Z. The second order K–subdifferentials and their application to variational extreme problems / Z. Khalilova // International Conference Analysis and mathematical physics (24-28 June, Kharkiv): book of abstracts — 2013. – P. 25.

14. Orlov I. V. K–subdifferentials theory and its application to variational problems / I. V. Orlov, Z. I. Khalilova // International Conference Nonlinear partial differential equations (September 9-14, Donetsk): book of abstracts — 2013. –

P. 48 – 49.

15. Халилова З. И. Теория K–субдифференциалов второго порядка и ее применение к вариационным задачам / З. И. Халилова // Крымская международная математическая конференция (Крым, Судак, 22 сентября – 4 октября 2013г.): тез. докл. – 2013. – С. 16–17.

АННОТАЦИЯ

Халилова З. И. Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их приложения в вариационном исчислении. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ. – Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь, 2014.

Субдифференциалы, как инструмент негладкого анализа, достаточно давно получили признание в математике. Исходя из определения компактного субдифференциала (или K-субдифференциала) для отображений скалярного аргумента в вещественном ЛВП, введенного в работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина с целью исследования проблем векторного интегрирования, K-субдифференциал есть некоторое компактное выпуклое множество.

Данное понятие было перенесено в диссертации на случай векторного аргумента. Такой переход к бесконечномерной области определения позволяет исследовать, в частности, вариационные задачи с негладким интегрантом. Данный подход оказался нетривиальным и потребовал на первом этапе работы исследовать новый тип многозначных операторов (K-операторов), служащих далее значениями K-субдифференциалов.

При этом происходит еще один важный переход – от банахова пространства линейных ограниченных операторов в классическом исчислении Гато - Фреше к банахову конусу ограниченных K-операторов.

Настоящая работа посвящена детальному построению K–субдифференциального исчисления в банаховых конусах и его исследованию приложений к экстремальным вариационным задачам с субгладким интегрантом. Получены негладкие аналоги основной вариационной леммы, уравнения Эйлера-Лагранжа, простого и усиленного условий Лежандра.

Получена оценка второго K-субдифференциала основного вариационного функционала. Получены аналоги классических условий Лежандра, а также центральный результат - это условия Лежандра - Якоби. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: субгладкий интегрант, компактный субдифференциал, включение Эйлера – Лагранжа, обобщенные условия Лежандра – Якоби

ABSTRACT

Khalilova Z. I. Compact subdifferentials in Banach cones and their applications in calculus of variations. — Manuscript.

The thesis for obtaining scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.01 – real, complex and functional analysis. – Taurida National V.I.Vernadsky University, Simferopol, 2014.

Subdifferentials as a tool of subsmooth analysis, have been recognized for a long time in mathematics. We start from the definition of compact subdifferential (or K–subdifferential) for maps of the real scalar argument introduced in the works of Orlov I.V. and Stonyakin F.S. This concept was applied to investigate the problems of vector integration, here K–subdifferential is a compact convex set.

This concept is generalized to the case of vector argument in the thesis. The transit the infinite-dimensional case enable us to investigate, in particular, the variational problems with nonsmooth integrand. This approach is nontrivial and requires in the first step of the work to research a new type of multi-valued operators (K-operators), because the K-subdifferentials, in the case under consideration, are K–operators precisely.

Here there is another important transition to a new object: from the Banach space of bounded linear operators in classical Gateaux – Frechet calculus to the Banach cone of bounded K–operators.

The present work is devoted to detail construction of K–subdifferential calculus in the Banach cones and to research of its applications to the extremal variational problems with subsmooth integrand. The nonsmooth analogs of the main variational lemma, Euler-Lagrange equations, simple and strengthened Legendre conditions are obtained. The estimate of the second K-subdifferential of the basic variational functional are obtained. The analogs of classical Legendre conditions and the Legendre - Jacobi conditions are obtained. The examples are considered.

Keywords: subsmooth integrand, compact subdifferential, the Euler – Lagrange inclusion, the generalized Legendre – Jacobi conditions.