МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского

Сёмкина Екатерина Владимировна

УДК 517.968.22,   517.968.72

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,

динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Симферополь — 2014

Диссертацией является рукопись

Работа выполнена на кафедре математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского в г. Симферополь.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники Украины
Копачевский Николай Дмитриевич,
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
г. Симферополь,
заведующий кафедрой математического анализа

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор,
Власов Виктор Валентинович,
Московский государственный университет, г. Москва
профессор кафедры математического анализа

доктор физико-математических наук, профессор,
Орлов Владимир Петрович,
Воронежский государственный университет, г. Воронеж
профессор кафедры математического моделирования

Защита состоится «16» декабря 2014 г. в 14.00 ч на заседании специализированного ученого совета К 52.051.10 Таврического национального университета им. В. И. Вернадского по адресу: г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Таврического национального университета им. В. И. Вернадского по адресу, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4,
на сайте Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
http://science.crimea.edu/zashita/semkina/disert.pdf

Автореферат разослан «____» ноября 2014 г.

Ученый секретарь
специализированного учёного совета К 52.051.10 Ф. С. Стонякин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Широкий класс проблем, возникающих в приложениях, приводит к необходимости изучения абстрактных начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений. Такие проблемы возникают, как правило, на базе конкретных задач о малых движениях сплошных сред, то есть систем с бесконечным числом степеней свободы. К интегро-дифференциальным уравнениям первого и второго порядков приводят, соответственно, задачи о малых движениях вязкоупругой и идеальной релаксирующей жидкости в произвольной ограниченной области.

Изучение интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами привлекает внимание как отечественных, так и зарубежных ученых. Основные направления исследований состоят в доказательстве существования решений различных начально-краевых задач, изучении свойств нормальных колебаний и структуры спектров их частот, получении асимптотических формул. В настоящее время имеется значительное число работ, посвященных изучению вопросов разрешимости и асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных уравнений в банаховых и, в частности, в гильбертовых пространствах. Отметим, что изучение интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в этих пространствах является естественным развитием теории операторно-дифференциальных уравнений и тесно связано с теорией полугрупп, берущих свое начало с работ Т. Като, Э. Хилле, Р. Филлипса, С. Г. Крейна, С. Агмона и Л. Ниренберга, а также нашедших отражение в монографии К. Енгела и Р. Г. Найгела. В совместных исследованиях С. Г. Крейна и Н. Д. Копачевского, посвященных операторному подходу к линейным задачам гидродинамики, представлены функциональные и аналитические методы, применяемые для изучения малых движений и нормальных колебаний гидромеханических систем с полостями, заполненными идеальной либо вязкой жидкостью. Стоит также отметить недавно вышедшую монографию В. В. Власова с соавторами, где изучаются задачи Коши для интегро-дифференциальных и функциональных уравнений, а также сопутствующие спектральные задачи.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа выполнялась в рамках госбюджетных тем и плановых исследований кафедры математического анализа Таврического национального университета имени В. И. Вернадского «Операторные методы в шкалах пространств и их приложения в задачах гладкого и негладкого анализа и в проблемах механики сплошных сред» (номер государственной регистрации 0112U000453), «Применение операторных методов в задачах математической физики, механики сплошных сред и теории массового обслуживания» (номер государственной регистрации 0112U000643). Тема кандидатской диссертации утверждена на заседании Учёного совета Таврического национального университета имени В. И. Вернадского (протокол № 1 от 27.01.2011 г.).

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является изучение задач Коши, а также ассоциированных спектральных задач для некоторых классов вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядков с неограниченными операторными коэффициентами.

Задачи исследования:

- получить результаты о сильной разрешимости задач Коши для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве;

- провести спектральный анализ операторных пучков, ассоциированных с рассматриваемыми уравнениями. Исследовать асимптотику спектра в зависимости от свойств ядер рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений;

- доказать теоремы о полноте и базисности системы корневых (собственных и присоединенных) элементов. На этой основе получить результаты о структуре и асимптотических свойствах решений изучаемых интегро-дифференциальных уравнений.

Объект исследования. Полные линейные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра первого и второго порядков в гильбертовом пространстве, неразрешённые относительно старшей производной.

Предмет исследования. Сильная разрешимость задач Коши для вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядков, неразрешённых относительно старшей производной. Свойства решений соответствующих спектральных задач.

Методы исследования. В работе применяются несколько общих приемов функционального анализа и существенным образом — теория полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Рассматриваются такие случаи, когда интегро-дифференциальное уравнение на основе теории полугрупп заменяется равносильным интегральным уравнением Вольтерра второго рода и при определенных условиях устанавливается существование единственного решения этого уравнения в некоторых классах функций. Затем проверяется, что решение интегрального уравнения является также решением исходного интегро-дифференциального уравнения. Эти простые и хорошо известные приемы позволяют получить новые результаты о разрешимости абстрактных задач Коши и на этой основе установить существование и единственность решений некоторых задач, возникающих в приложениях.

Для исследования ассоциированных спектральных задач используется спектральная теория операторных пучков, позволяющая осуществить переход от классической задачи на собственные значения для оператора, действующего в гильбертовом пространстве, к спектральной задаче для оператор-функции, являющейся полиномом либо даже аналитической функцией относительно спектрального параметра. Используется также теория пространств с индефинитной метрикой.

Научная новизна полученных результатов. 1) Впервые изучаются полные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра, неразрешённые относительно старшей производной. При этом операторный коэффициент при старшей производной является линейным ограниченным положительным оператором, который, вообще говоря, может иметь неограниченный обратный.

2) Впервые рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра с неограниченными и, вообще говоря, некоммутирующими операторными коэффициентами, заданными на своих областях определения, плотных в исходном гильбертовом пространстве. При этом считается, что эти операторы сравнимы по своим областям определения. Для полных уравнений второго порядка выделяются такие классы задач, для которых один из операторов можно назвать главным; он имеет область определения, наиболее узкую по сравнению с областями определения других операторных коэффициентов. В зависимости от взаимной подчинённости операторных коэффициентов для таких классов задач рассмотрены три основных типа уравнений.

3) Впервые для вышеописанных классов уравнений доказаны утверждения о существовании и единственности сильного решения задач Коши.

4) Проведен анализ спектральных задач, ассоциированных с исследуемыми интегро-дифференциальными уравнениями: установлена общая структура спектра, получены асимптотики вещественной и комплексной частей спектра указанных оператор-функций, доказаны свойства базисности собственных элементов.

Практическое значение полученных результатов. Для полных линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в гильбертовом пространстве доказаны теоремы о существовании и единственности решений задач Коши, исследованы собственные колебания, вопросы полноты и базисности системы корневых элементов; для уравнений первого порядка получены условия неустойчивости описываемой динамической системы. Результаты диссертации дополняют и развивают теорию интегро-дифференциальных и дифференциально-операторных уравнений.

Поскольку эксперименты, связанные с малыми движениями тел с полостями заполненными жидкостями, вызывают значительные технические сложности, то именно эти обстоятельства выдвигают на первый план математическое моделирование и дальнейший теоретический анализ поведения сплошных сред, то есть систем с бесконечным числом степеней свободы. Результаты работы могут быть полезны как специалистам, работающим в области интегро-дифференциальных уравнений и функционального анализа, так и в исследованиях прикладного характера.

Личный вклад соискателя. Постановка и математическая формулировка задач, а также общий план исследования рассмотренных в диссертации задач предложены научным руководителем соискателя Н.Д. Копачевским. Полученные результаты принадлежат соискателю. Частично материалы диссертации опубликованы в работах [2], [3], [10], [12], [16]. Результаты работ [3], [10], [12] получены соискателем самостоятельно. В работах [2], [16] соискателю принадлежит часть, связанная с исследованием проблемы в случае малой и большой интенсивности диссипации внутренней энергии исследуемой системы.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на: XI Белорусской математической конференции, Минск, Беларусь, 5-9 ноября 2012 г.; IV Международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я.Б. Лопатинского, Донецк, Украина, 15-17 ноября, 2012 г.; International Conference «Analysis and mathematical physics», Kharkiv, Ukraine, June 24-28, 2013; Международной математической конференции по случаю 75-летия со дня рождения академика А. М. Самойленко «Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения», Севастополь, Украина, 23-30 июня 2013 г.; International Conference «Nonlinear Partial Differential Equations NPDE-2013», Donetsk, Ukraine, September 9-14, 2013; «Крымской Международной Математической Конференции КММК-2013», Судак, Украина, 22 сентября-4 октября 2013г.; IV Международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV», г.Ростов-на-Дону, Россия, 27 апреля-1 мая 2014 г. XXII Международной конференции «МАТЕМАТИКА. ЭКОНОМИКА. ОБРАЗОВАНИЕ», VIII Международном симпозиуме «РЯДЫ ФУРЬЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ», VII Междисциплинарном семинаре «Математические модели и информационные технологии в науке и производстве», Дюрсо, Россия, 27 мая-3 июня 2014 г. семинарах кафедры математического анализа Таврического национального университета имени В.И. Вернадского (под руководством проф. Н. Д. Копачевского, Симферополь, 2011-2014 гг.); XXII-XXIV Крымских осенних математических школах-симпозиумах по спектральным и эволюционным задачам: КРОМШ-2011, КРОМШ-2012 (Ласпи-Батилиман, Крым, Украина, сентябрь 2011-2012 гг.), КРОМШ-2014 (Судак, Крым, Россия, сентябрь 2014 г.); научных конференциях профессорско-преподавательского состава Таврического национального университета имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина, 2011-2014 гг.).

Публикации. Результаты исследований опубликованы в 16 научных работах, 5 из которых принадлежат к перечню научных специализированных изданий [2], [3], [10], [12], [16], 11 публикаций в материалах и сборниках тезисов конференций [1], [4-9], [11], [13], [14], [15].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав, разделенных в общей сложности на 12 параграфов, и списка литературы. Объем диссертации составляет 152 страницы. Список цитированной литературы включает 119 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение раскрывает сущность и состояние проблемы, её значимость. Обосновывается актуальность темы, формулируются цель и задачи исследования, научная новизна и практическое значение полученных результатов. Нумерация утверждений в диссертации и автореферате одна и та же. В **главе 1** приведена короткая историческая справка относительно круга вопросов, которые имеют отношение к теме работы. Приведён обзор литературы по теме диссертации и сформулированы основные результаты, которые получены в этом направлении.

Глава 2 посвящена изучению задач, обобщающих проблему малых движений вязкоупругой жидкости в сосуде.

В параграфе 2.1 осуществляется переход от гидродинамической постановки задачи о малых движениях вязкоупругой жидкости в сосуде к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в операторной форме.

В произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассматривается задача Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра первого порядка, неразрешённого относительно производной:

$$A\frac{du}{dt} + Fu + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} C_k u(s) ds = f(t), \quad u(0) = u^0. \tag{1}$$

Здесь $u = u(t)$ — искомая функция со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) \in \mathcal{H}$, γ_k — положительные постоянные, $0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m < \infty$, $f(t)$ — заданная функция со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$, $u_0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2})$;

A — положительный компактный оператор, а F — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор. Через C_k, $k=\overline{1,m}$, обозначены неограниченные самосопряженные положительные операторы с областями определения $\mathcal{D}(C_k)$ такими, что $\mathcal{D}(C_k)\supset\mathcal{D}(F)$, $\quad k=\overline{1,m}$.

Говоря, что интегро-дифференциальное уравнение неразрешено относительно производной, мы подразумеваем, что коэффициент, стоящий при производной, не единичный, а положительный ограниченный оператор, который может иметь неограниченный обратный.

Замечание. *2.1.2. Будем считать, что оператор A действует не в $\mathcal{H}$, а в шкале пространств E^α, $\alpha\in\mathbb{R}$, построенной по A^{-1}, тогда будем иметь*

$$E^0=\mathcal{H},\quad \mathcal{D}(A^{-1})=E^1,\quad \mathcal{D}(A^{-1/2})=E^{1/2},$$

причём $A^{-1/2}:E^{\alpha/2}\to E^{(\alpha-1)/2}$ — ограниченный оператор. □

Определение. *2.1.3. Сильным решением интегро-дифференциального уравнения (1) на отрезке $[0,T]$ называется такая функция $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$, для которой выполнены следующие условия:*

а) $u(t)\in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))\cap C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}F))$;

б) все слагаемые в (1) принадлежат пространству $C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$, т.е. непрерывны по t и принимают значения в $\mathcal{D}(A^{-1/2})\subset\mathcal{H}$;

в) при любом $t\in[0,T]$ справедливо уравнение (1);

г) выполнено начальное условие $u(0)=u^0$. □

С учётом замечания 2.1.2 имеется возможность перейти от задачи для неразрешённого интегро-дифференциального уравнения к задаче для разрешённого дифференциального уравнения в сумме гильбертовых пространств. Полученная задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка в сумме гильбертовых пространств далее исследуется с помощью теории полугрупп операторов. Для этой задачи получена теорема о существовании и единственности сильного решения, а затем путём обратных замен искомых функций аналогичная теорема получена и для первоначальной задачи. В заключении этого параграфа формулируется спектральная задача, ассоциированная с уравнением (1), в виде задачи для операторного пучка

$$L(\lambda):=I-\lambda A^{1/2}F^{-1}A^{1/2}+\sum_{k=1}^{m}(\gamma_k-\lambda)^{-1}A^{1/2}F^{-1/2}Q_k^*Q_kF^{1/2}A^{-1/2}, \tag{2}$$

$$Q_k:=C_k^{1/2}F^{-1/2},\quad \mathcal{D}(Q_k):=\mathcal{H}_k=\mathcal{H},$$

Эта задача рассмотрена далее в параграфе 4.1.

Параграф 2.2 посвящён изучению задач, обобщающих проблему (1). Сперва теми же методами, что и в параграфе 2.1, получена теорема о существовании и единственности сильного решения со значениями в пространстве $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения вида

$$A\frac{du}{dt}+Fu+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}C_k u(s)ds-\sum_{j=1}^{n}\int_0^t e^{-\delta_j(t-s)}D_j u(s)ds=f(t),\quad u(0)=u^0, \tag{3}$$

$$0<A\in\mathfrak{S}_\infty,\quad \gamma_k>0,\ k=\overline{1,m},\quad \delta_j>0,\ j=\overline{1,n},$$

$$F=F^*\gg 0,\quad C_k=C_k^*>0,\ k=\overline{1,m},\quad D_j=D_j^*>0,\ j=\overline{1,n},$$

$$\mathcal{D}(F)\subset\mathcal{D}(C_k),\ k=\overline{1,m},\quad \mathcal{D}(F)\subset\mathcal{D}(D_j),\ j=\overline{1,n}.$$

Здесь первая сумма интегральных слагаемых учитывает диссипацию энергии системы, а вторая — подкачку энергии.

Затем рассматривается задача Коши для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка более общего вида

$$A\frac{du}{dt}+Fu+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds=f(t),\quad u(0)=u^0. \tag{4}$$

Для этой задачи доказаны две теоремы существования и единственности сильного решения со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$, которые являются итоговыми утверждениями 2-й главы.

Теорема. *2.2.12. Пусть выполнены условия*

$$u^0\in\mathcal{D}(A^{-1/2}F),\quad f(t)\in C^1(([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{5}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})\subset\mathcal{D}(C_kA^{-1/2}),\quad k=\overline{1,m}, \tag{6}$$

$$G_k(t,s),\ \frac{\partial G_k}{\partial t}(t,s)\in C(\Delta_T,\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{D}(A^{-1/2}))),\ \Delta_T:=\{(t,s):0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}. \tag{7}$$

Пусть оператор F — максимальный равномерно аккретивный. Тогда задача (4) имеет единственное сильное решение $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ на отрезке $[0,T]$. $\square$

Теорема. *2.2.13. Пусть выполнены условия (5), а также условия*

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}F)\subset\mathcal{D}(A^{-1/2}C_k),\quad k=\overline{1,m}, \tag{8}$$

$$G_k(t,s),\ \frac{\partial G_k}{\partial t}(t,s)\in C(\Delta_T,\mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))),\quad k=\overline{1,m}. \tag{9}$$

Пусть оператор F — максимальный равномерно аккретивный. Тогда задача (4) имеет единственное сильное решение $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ на отрезке $[0,T]$. $\square$

В **главе 3** изучаются задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. Такие уравнения описывают, в частности, эволюцию динамических систем с бесконечным числом степеней свободы, причём учитываются эффекты релаксации.

Параграф 3.1 посвящён изучению задачи Коши для неполного интегро-дифференциального уравнения вида

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + Bu + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{10}$$

Здесь $u(t)$ — искомая функция, $f(t)$ — заданная функция, $A > 0$ — положительный ограниченный оператор, $B = B^* \gg 0$ — положительно определённый оператор, заданный на области определения $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}$, $G_k(t,s)$ — ограниченные оператор-функции, действующие в $\mathcal{H}$, C_k —, вообще говоря, неограниченные операторы, заданные на областях определения $\mathcal{D}(C_k) \subset \mathcal{H}$, $k = \overline{1,m}$.

Определение. ***3.1.1.*** *Назовём функцию* $u(t)$, $t \in [0,T]$, *сильным решением задачи Коши* (10) *на отрезке* $[0,T]$ *со значениями в* $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$, *если выполнены следующие условия:*

1°. $u(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}B))$;

2°. $u'(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(B^{1/2})), \quad u''(t) \in C([0,T]; \mathcal{E}^{-1/2})$;

3°. *все слагаемые в* (10) *принадлежат пространству* $C([0,T]; \mathcal{E}^{1/2})$;

4°. *при любом* $t \in [0,T]$ *справедливо уравнение* (10);

5°. *выполнены начальные условия* $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$. □

При рассмотрении задачи (10) применяется два подхода. Первый из них связан с переходом от исходной задачи к равносильной ей проблеме для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме пространств. Второй подход основан на применении к исходной задаче теории операторных косинус- и синус-функций. В результате обоих подходов получены теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для исходного интегро-дифференциального уравнения, однако второй подход позволяет получить более общие условия на операторные коэффициенты.

Теорема. ***3.1.6.*** *Пусть выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{11}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}), \tag{12}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}. \tag{13}$$

. Тогда задача (10) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ *на отрезке* $[0,T]$.

Теорема. ***3.1.8.*** *Пусть выполнены условия* (11), *а также условия*

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(C_k A^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}.$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}, \tag{14}$$

Тогда задача (10) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ *на отрезке* $[0,T]$.

В параграфе 3.2 изучаются задачи Коши для полных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1, \tag{15}$$

$$0 < A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad F = F^* \gg 0, \quad B = B^* \gg 0, \tag{16}$$

с неограниченными операторными коэффициентами в предположении, что операторные коэффициенты сравнимы, то есть можно указать один из них такой, что его область определения ýже остальных.

Определение. ***3.2.1.*** *Назовём сильным решением задачи Коши* (15) *на отрезке* $[0,T]$ *такую функцию* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$, *для которой выполнены следующие условия:*

1°. $u(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})B)$;

2°. $u'(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(B^{1/2})) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}F))$;

3°. $Au''(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4°. *все слагаемые в уравнении* (15) *непрерывны по* t *и принадлежат пространству* $C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

5°. *при любом* $t \in [0,T]$ *выполнено уравнение* (15);

6°. *выполнены начальные условия* $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$. □

Уравнение вида (15) называют полным, поскольку его главная часть, не содержащая интегральных членов, состоит из слагаемых, зависящих не только от $u(t)$ и d^2u/dt^2, но и от du/dt. Для полного уравнения в зависимости от того, какой операторный коэффициент является доминирующим, рассмотрены три основных случая, соответствующих абстрактному параболическому, гиперболическому и промежуточному типу соответствующего дифференциального уравнения. В каждом из трёх случаев исходное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка сводится сперва к задаче для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств, и, далее, эта задача исследуется с помощью теории полугрупп операторов. Для каждого из этих случаев получены теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши.

1°. Малая интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}). \tag{17}$$

Теорема. ***3.2.5.*** *Пусть в задаче* (15) *выполнены условия* (16)*, а также условия*

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}, \tag{18}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}, \tag{19}$$

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})). \tag{20}$$

. Тогда эта задача имеет единственное сильное решение $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$ *на отрезке* $[0,T]$*.*

Теорема. ***3.2.6.*** *Пусть в задаче* (15) *выполнены условия* (16), (20)*, а также условия*

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(C_kA^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}, \tag{21}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}. \tag{22}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$ *на отрезке* $[0,T]$*.* $\square$

2°. Большая интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}). \tag{23}$$

Теорема. ***3.2.11.*** *Пусть в задаче* (15), (16) *выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{24}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}, \tag{25}$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}. \tag{26}$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ *единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$*.*

Теорема. ***3.2.13.*** *Пусть в задаче* (15), (16) *выполнены условия* (24), *а также условия*

$$\mathcal{D}(C_k A^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m},$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}.$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ *единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. □

3°. Средняя интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}). \tag{27}$$

В этом случае теоремы о разрешимости удаётся получить лишь для «ассоциированного» уравнения. Именно, назовём задачу Коши

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + FA^{-1/2}(A^{1/2}\frac{du}{dt} + Q^*B^{1/2}u) + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds = f(t), \quad u(0)=u^0, \quad u'(0)=u^1, \tag{28}$$

где $Q := B^{1/2}F^{-1}A^{1/2}$, задачей, ассоциированной с исходной задачей (15) в предположениях (16).

Определение. ***3.2.16.*** *Сильным решением ассоциированной задачи* (28) *на отрезке* $[0,T]$ *назовём функцию* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2}) \subset \mathcal{H}$, *для которой выполнены следующие условия:*

1°. $u(t) \in \mathcal{D}(B^{1/2})$ *и* $B^{1/2}u(t) \in C([0,T];\mathcal{H})$;

2°. $A^{1/2}du/dt + Q^*B^{1/2}u \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})$
и $FA^{-1/2}(A^{1/2}(du/dt) + Q^*B^{1/2}u(t)) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

3°. $Au(t) \in C^2([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4°. *для любого* $t \in [0,T]$ *выполнено уравнение* (28), *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$, *и начальные условия.* □

Лемма. ***3.2.17.*** *Если сильное решение* $u(t)$ *ассоциированной задачи* (28) *обладает дополнительными свойствами гладкости*

$$u(t) \in \mathcal{D}(B), \quad Bu(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{29}$$

то оно является сильным решением задачи (15), (16) *в смысле определения 3.2.1, то есть на отрезке* $[0,T]$ *и со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Для ассоциированного уравнения справедливы следующие результаты.

Теорема. *3.2.18. Пусть выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})); \tag{30}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m}; \tag{31}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}. \tag{32}$$

Тогда ассоциированная задача (28) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное (в смысле определения 3.2.16) решение со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Теорема. *3.2.19. Пусть выполнены условия* (30), *а также условия*

$$\mathcal{D}(C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m};$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}.$$

Тогда ассоциированная задача (28) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное (в смысле определения 3.2.16) решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. □

В параграфе 3.3 задача (15) изучается для случая, когда операторы F и B лишь ограничены снизу:

$$0 < A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad F \geqslant \gamma_F I, \quad B \geqslant \gamma_B I,\ \gamma_F, \gamma_B \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

т.е. в исследуемой динамической системе возможна подкачка энергии, причём система может быть статически неустойчива. Как и в 3.2, получены теоремы о существовании и единственности сильного решения для каждого из трёх основных случаев.

Глава 4 посвящена изучению нормальных колебаний, порождённых проблемой малых движений вязкоупругой, а также идеальной релаксирующей жидкостей в сосуде. Такие проблемы приводят к спектральным задачам, ассоциированным с соответствующими эволюционными задачами для интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Здесь в исходном интегро-дифференциальном уравнении подынтегральные оператор-функции имеют специальный вид $G_k(t,s) := e^{\gamma_k(t-s)}I$, позволяющий осуществить переход к спектральной задаче. В параграфе 4.1 изучается спектральная задача $L(\lambda)v = 0$, порождённая проблемой нормальных движений вязкоупругой жидкости (см. (2)). Сперва рассматривается ситуация, когда операторы F и C_k, $k=\overline{1,m}$, из уравнения (1), удовлетворяют условиям

$$F = F^* \gg 0, \quad C_k = \alpha_k F, \quad \alpha_k > 0, \quad k=\overline{1,m}. \tag{34}$$

Для этого случая найдены асимптотики ветвей собственных значений, а также установлены свойства базисности Рисса для собственных элементов. В диссертации эти результаты сформулированы в теореме 4.1.1. Затем изучается ситуация, когда вместо (34) выполнены близкие, но более общие условия

$$Q_k^* Q_k = \alpha_k I + N_k, \quad N_k = N_k^* \in \mathfrak{S}_\infty, \quad k = \overline{1,m}. \tag{35}$$

Структура спектра в этом случае не изменяется, а свойства базисности Рисса для собственных элементов удается получить лишь при дополнительных требованиях на ядра вспомогательных операторов. Соответствующие результаты сформулированы в теореме 4.1.2 диссертационной работы.

Далее изучается задача, когда в исходном интегро-дифференциальном уравнении отсутствуют интегральные слагаемые, отвечающие диссипации энергии динамической системы:

$$A\frac{du}{dt} + Fu - \int_0^t e^{-\rho(t-s)} V u(s) ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{36}$$

$$0 < A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad F = F^* \gg 0, \quad V = V^* > 0, \quad \rho > 0.$$

В этом случае имеем спектральную задачу

$$\mathcal{L}(\lambda)\varphi := (I - \lambda L + (\lambda - \rho)^{-1} M)\varphi = 0, \tag{37}$$

$$0 < L := F^{-1/2} A F^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \ker L = \ker A = \{0\}, \tag{38}$$

$$M := Q^* Q, \quad Q := V^{1/2} F^{-1/2}, \quad \ker(Q^* Q) = \{0\}. \tag{39}$$

Установлено, что у пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ имеется две ветви собственных значений с предельными точками ρ и $+\infty$. Найдены асимптотики этих ветвей, доказаны свойства базисности Рисса, и даже p-базисности собственных элементов, отвечающих этим ветвям. Установлено также, что неравенство $\rho > ||Q^* Q||$ является достаточным условием асимптотической устойчивости решений задачи. Соответствующее утверждение приведено в теореме 4.1.18 диссертационной работы.

В параграфе 4.2 рассматривается спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши для полного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве, то есть для уравнения (15), когда $C_k \equiv 0$, $k = \overline{1,m}$. Изучен тот частный случай, когда операторы кинетической энергии A и диссипации F являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии B:

$$A := B^{-\alpha}, \quad F := 2\rho B^\beta, \quad \alpha > 0, \quad \rho, \beta \geqslant 0, \quad 0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{40}$$

Установлено, что спектр задачи существенно зависит от соотношения параметров α и β, а его детальная структура от коэффициента ρ. При этом во всём диапазоне изменения параметров α, β, ρ собственные элементы образуют базис Рисса. Параграф 4.3 посвящён изучению спектральной задачи, ассоциированной с неполным интегро-дифференциальным уравнением (10). Сформулирована соответствующая спектральная задача для операторного пучка, которая, как выясняется, подробно исследовалась в работе [1][1]. Поэтому дальнейшее исследование полученного пучка повторяет исследование, проведённое в [1].

В параграфе 4.4 изучены спектральные проблемы, ассоциированные с задачей Коши для полного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, неразрешённого относительно старшей производной, когда операторы кинетической энергии и диссипации являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии. Подробно изучены случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы и промежуточные между ними варианты. В каждом из случаев получены свойства спектра, найдены асимптотики.

В параграфе 4.5 исследована спектральная задача, ассоциированная с интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра второго порядка в гильбертовом пространстве. К таким уравнениям сводятся задачи о малых движениях вязкоупругого стержня. В задаче осуществлён переход от исходного уравнения к дифференциальному уравнению первого порядка в сумме гильбертовых пространств. На этой основе изучена ассоциированная спектральная задача. Доказано, что система собственных векторов этой задачи образует базис.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю профессору Николаю Дмитриевичу Копачевскому за постановку задач, постоянное внимание к работе, многочисленные обсуждения и ценные рекомендации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра первого порядка, неразрешённого относительно производной, в гильбертовом пространстве для случая, когда подынтегральные оператор-функции имеют специальный вид $G_k(t,s) := e^{-\gamma_k(t-s)}I$. Такой вид позволяет исследовать ассоциированную спектральную задачу. При некоторых дополнительных условиях на операторные коэффициенты

[1]Закора Д. А., Копачевский Н.Д. О спектральной задаче, связанной с интегродифференциальным уравнением второго порядка // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — 2004. — Т. 17(56), № 1. — С. 10-26.

доказаны теоремы, уточняющие свойства собственных значений, а также получены свойства базисности Рисса для соответствующей системы собственных элементов.

Также доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра первого порядка в гильбертовом пространстве для случая, когда в уравнении кроме интегральных слагаемых, отвечающих диссипации энергии системы, имеются также слагаемые, отвечающие за её подкачку. Кроме того, доказана теорема о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра первого порядка, неразрешённого относительно производной в случае, когда подынтегральные оператор-функции имеют достаточно общий вид.

2. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для неполного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка, неразрешённого относительно старшей производной. Применены два подхода: связанный с переходом к системе двух уравнений первого порядка и второй, связанный с использованием теории операторных косинус- и синус- функций.

Исследован класс полных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами, неразрешённых относительно старшей производной, когда один из операторов имеет область определения, наиболее узкую по сравнению с областями определения других операторных коэффициентов. Применён метод факторизации, позволяющей разделить исследуемые уравнения на три основных типа. Для каждого типа уравнений доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши.

Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задач Коши для полных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами, неразрешённых относительно старшей производной, когда имеет место подкачка энергии системы (оператор диссипации энергии ограничен снизу), а система может быть неустойчива (оператор потенциальной энергии ограничен снизу).

3. Изучены спектральные задачи, ассоциированные с задачами Коши для полных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка для случаев, когда сперва в уравнении имеются лишь интегральные слагаемые, отвечающие диссипации энергии, затем — лишь подкачке энергии. В каждом из случаев для задачи получен соответствующий операторный пучок и установлены свойства базисности Рисса для системы собственных элементов.

4. Изучена спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши для дифференциально-

го (а затем и для интегро-дифференциального) уравнения второго порядка, неразрешённого относительно старшей производной, когда операторы кинетической энергии и диссипации являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии. Подробно изучены случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы и промежуточные между ними варианты. В каждом из случаев получены свойства спектра, найдены асимптотики, а для задачи, связанной с дифференциальным уравнением, также доказаны свойства базисности Рисса для собственных векторов.

5. Исследована спектральная задача, ассоциированная с интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. К таким уравнениям сводятся задачи о малых движениях вязкоупругого стержня. В задаче осуществлён переход от исходного уравнения к дифференциальному уравнению первого порядка в сумме гильбертовых пространств. На этой основе изучена ассоциированная спектральная задача. Доказано, что система собственных векторов этой задачи образует базис.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Копачевский Н. Д. Некоторые классы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной / Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина // Сб. тезисов международной научной конференции «Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения», Севастополь, Украина, 23-30 июня 2013г. — С. 298-299.

2. Копачевский Н. Д. Об интегро-дифференциальных уравнениииях Вольтерра второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной / Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». — 2013. — Т. 26(65), № 1. — С. 52-79.

3. Сёмкина Е. В. Вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве и ассоциированные спектральные задачи / Е. В. Сёмкина // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». — 2012. — Т. 25(64), № 2. — С. 79-111.

4. Сёмкина Е. В. Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра первого порядка, неразрешённые относительно производной, и ассоциированные спектральные задачи / Е. В. Сёмкина // «БМК-2012» («XI Белорусская математическая конференция», г.Минск) (4-9 ноября 2012г.).

Тезисы докладов. Часть 1. Вещественный и комплексный анализ. Функциональный анализ и операторные уравнения. Геометрия и топология. — С. 56-57.

5. Сёмкина Е. В. Некоторые классы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной / Е. В. Сёмкина // "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV", г.Ростов-на-Дону, Россия, 27 апреля - 1 мая 2014 г. Тезисы докладов. — С. 114-115.

6. Сёмкина Е. В. Некоторые классы интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной / Е. В. Сёмкина // «Четвёртая международная конференция молодых учёных по дифференциальным уравнениям и их приложениям им. Я. Б. Лопатинского» (14-17 ноября 2012г., г.Донецк). Сборник тезисов. — С. 73.

7. Сёмкина Е. В. О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях первого порядка, неразрешённых относительно производной / Е. В. Сёмкина // «Крымская Осенняя Математическая Школа КРОМШ — 2011». Ласпи, Батилиман, Украина (17-29 сентября 2011г.). Сборник тезисов. — С. 48.

8. Сёмкина Е. В. О некоторых классах интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра второго порядка, неразрешённых относительно производной / Е. В. Сёмкина // Сборник тезисов «Крымская Международная Математическая Конференция КММК — 2013», Судак, Украина, 22 сентября – 4 октября 2013. — Т. 2. — С. 14-15.

9. Сёмкина Е. В. О некоторых классах интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной / Е. В. Сёмкина // «Крымская Осенняя Математическая Школа КРОМШ — 2012». Ласпи, Батилиман, Украина (17-29 сентября 2012г.). Сборник тезисов. — С. 60.

10. Сёмкина Е.В. Спектральная задача, ассоциированная с проблемой малых движений вязкоупругого стержня / Е. В. Сёмкина // Динамические системы. — 2014. — Т. 4(32), № 1-2 — С. 19-26.

11. Сёмкина Е. В. Спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши о малых движениях диссипативной динамической системы / Е. В. Сёмкина // XXII Международная конференции «Математика. Экономика. Образование». VIII Международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения». VII Междисциплинарный семинар «Математические модели и информационные технологии в науке и производстве». Пансионат «Моряк» Новороссийского морского пароходства вблизи пос. Дюрсо, Россия, 27 мая – 3 июня 2014 г. Тезисы докладов. — С. 63.

12. Сёмкина Е. В. Спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши о малых движениях диссипативной динамической системы / Е. В. Сёмкина // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». — 2014. — Т. 27(66), № 1. — С. 75-89.

13. Сёмкина Е.В. Спектральные задачи, порождённые проблемами малых движений вязкоупругих и релаксирующих сред / Е. В. Сёмкина // «Таврическая научная конференция студентов и молодых специалистов по информатике и математике» (20-23 апреля 2010г., КНЦ НАНУ, г. Симферополь), С.36-40.

14. Kopachevsky N. D. Complete Volterra integro-differential second-order equations / N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina // Book of abstracts «Analysis and mathematical physics», Kharkiv, Ukraine, June 24-28, 2013. — P. 26-27.

15. Kopachevsky N. D. Complete Volterra integro-differential second-order equations / N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina // Book of abstracts «Nonlinear Partial Differential Equations NPDE-2013», Donetsk, Ukraine, September 9-14, 2013. — P. 34-35.

16. Kopachevsky N. D. Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative / N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina // Eurasian Mathematical Journal ISSN 2077-9879. — 2013. — Vol. 4, no. 4. — P. 64-87.

АННОТАЦИЯ

Сёмкина Е.В. О некоторых классах интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в гильбертовом пространстве. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. — Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского Министерства образования и науки Российской федерации, Симферополь, 2014 г.

Диссертация посвящена исследованию полных линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра первого и второго порядков, неразрешённых относительно старшей производной.

Основным методом, который используется при исследовании задачи Коши для уравнений первого и второго порядка, является переход от исходной задачи в гильбертовом пространстве к эквивалентной задаче для дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Для интегро-дифференциальных уравнений первого порядка сперва исследуется случай, когда подынтегральные оператор-функции имеют специальный вид, а затем

проводится обобщение полученных результатов. Кроме того, изучены спектральные задачи, ассоциированные с задачами Коши для интегро-дифференциальных уравнений первого порядка для случаев, когда сперва в уравнении имеются лишь интегральные слагаемые, отвечающие диссипации энергии, затем – лишь подкачке энергии. В каждом из случаев с помощью теории линейных самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве, теории пространств с индефинитной метрикой, а также спектральной теории операторных пучков выведен соответствующий операторный пучок, выявлены ветви собственных значений и установлены свойства базисности Рисса для системы собственных элементов.

При исследовании полных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами, неразрешённых относительно старшей производной, изучен класс задач, когда один из операторов имеет область определения, наиболее узкую по сравнению с областями определения других операторных коэффициентов. После перехода от исходной задачи к задаче для дифференциального уравнения второго порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств применяется метод факторизации, позволяющей разделить уравнение на три основных типа. Для каждого типа уравнений доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши. Изучены спектральные проблемы, ассоциированные с задачами Коши для дифференциальных, а также для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной, когда операторы кинетической энергии и диссипации являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии. Получены свойства спектра, найдены асимптотики, а также доказаны свойства базисности Рисса для собственных векторов.

Результаты диссертации дополняют и развивают теорию интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с неограниченными операторными коэффициентами на случай, когда операторный коэффициент при старшей производной может иметь неограниченный обратный.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, полугруппа, пространство Крейна, операторный пучок, самосопряжённый оператор, гильбертово пространство, спектральная задача, дискретный спектр, асимптотика собственных значений, базис Рисса, индефинитная метрика.

ABSTRACT

Syomkina K.V. On some classes of Volterra integro-differential equations in Hilbert space. — Manuscript. The dissertation for obtaining scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control. — National Tavrida V.I. Vernadsky University of Ministry of Education, Science of Russian Federation, Simferopol, 2014. The dissertation is devoted to research of Cauchy problems for Volterra integro-differential first- and second-order equations in Hilbert spaces.

We consider the linear Cauchy problems for Volterra integro-differential first- and second-order equations when derivative held operator is not identity but positive and specially compact. The form of this problem and properties of the operator coefficients allow to pass from the integro-differential equation in the Hilbert space to a differential equation of the first-order in the orthogonal sum of some copies of this Hilbert space. The existence and uniqueness theorems of strong solutions for this equation are obtained by using a theory of semigroups. The associated spectral problems generated by the problem on normal oscillations are studied. Properties of eigenvalues and eigenvectors of spectral problems are obtained by using theory of linear operators that are self adjoint in a Hilbert space with an indefinite metric and spectral theory of operator pencils.

We consider a Cauchy problem for complete Volterra integro-differential second-order equation. Such equations describe an evolution of dynamical systems with infinite number of freedom degrees with taking into account of relaxation effects. Three classes of complete equations are considered subject to comparison of operator coefficient domains of definition. The existence theorems of strong solutions for described classes of complete integro-differential second-order equations are obtained.

The spectral problems associated with Cauchy problem for differential and also integro-differential second-order equations are studied. We investigate a special case of problems when a kinetic energy operator and energy dissipation operator are powers of potential energy operator. Properties of eigenvalues and eigenvectors of spectral problems are obtained.

Key words: Volterra integro-differential equation, semigroup, Krein space, operator pencil, Hilbert space, spectral problem, discrete spectrum, asymptotic of eigenvalues, Riesz basis, indefinite metric, self-adjoint operator.