МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.И.ВЕРНАДСКОГО

КУЗЬМЕНКО ЕКАТЕРИНА МИХАЙЛОВНА

УДК 517.98:517.972

КОМПАКТНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ И КОМПАКТНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НАД МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТЬЮ

01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Симферополь, 2014

Диссертация является рукописью.
Работа выполнена в Таврическом национальном университете
имени В.И. Вернадского
Министерства образования и науки Российской Федерации, г. Симферополь.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Орлов Игорь Владимирович**,
Таврический национальний университет
им. В.И. Вернадского, г. Симферополь,
заведующий кафедрой
алгебры и функционального анализа.

Официальные оппоненты:

доктор физико -математических наук, профессор
Руновский Константин Всеволодович
филиал Московского государственного университета
имени М.В.Ломоносова в г. Севастополе,
кафедра прикладной математики.

доктор физико -математических наук, профессор
Когут Петр Ильич,
Днепропетровский национальный университет
имени О.Гончара, г.Днепропетровск
кафедра дифференциальных уравнений

Защита состоится «28» ноября 2014 р. в 16^{00} на заседании специализированного ученого совета К 52.051.10 Таврического национального университета им. В.И. Вернадского по адресу: г. Симферополь, проспект Академика Вернадского,4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Таврического национального университета им. В.И. Вернадского по адресу:

г. Симферополь, проспект Академика Вернадского,4

на сайте Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

http://sciense.crimea.edu/zashita/kuzmen/index.html

Автореферат разослан «...» ...... 2014 р.

Учёный секретарь
специализированного учёного совета К 52.051.10 Ф.С. Стонякин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Начиная с 20–х годов прошлого века и вплоть до настоящего времени, основное внимание математиков, исследовавших чрезвычайно важные для современного нелинейного анализа и приложений вариационные задачи в пространствах Соболева, уделялось задачам на абсолютный экстремум и условный абсолютный экстремум. Здесь можно отметить работы таких авторов, как L. Tonelli, C. B. Morrey, В. М. Тихомиров, А. В. Фурсиков, B. Dacorogna, J. Ball, I. Fonseca, А. В. Дмитрук, М. И. Зеликин, П. И. Когут, Г. А. Курина и многих других.

Однако такой подход жестко ограничивает класс допустимых интегральных функционалов. Основную сложность в этом вопросе в случае пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной областью $D \subset \mathbb{R}^n$ представляет тот факт, что в них функционал Эйлера–Лагранжа обладает значительно худшими аналитическими свойствами, чем в банаховых пространствах типа C^k, что исключает применение классических методов сильного дифференциального исчисления и теории экстремумов. Анализ таких задач привел, в частности, к обобщению понятий локального экстремума, непрерывности, сильной дифференцируемости, повторной дифференцируемости и т.д., основанному на переходе к соответствующим свойствам в шкале подпространств, порожденных абсолютно выпуклыми компактами.

Построенное И. В. Орловым и Е. В. Божонок развитое вариационное исчисление в гильбертовых пространствах Соболева $W^{1,2}$ над отрезком, изучающее компактные экстремумы вариационных функционалов и их компактно–аналитические свойства, привело к возникновению актуальной и объемной задачи расширения формализма исследования компактно-аналитических свойств и вычисления компактных экстремумов на случай пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной областью $D \subset \mathbb{R}^n$.

В этой связи, существенный интерес представляет собой исследование компактно–аналитических свойств вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, получение достаточных условий корректной определенности, компактной непрерывности, компактной дифференцируемости, кратной компактной дифференцируемости функционала Эйлера–Лагранжа в терминах "K–псевдополиномиальных" интегрантов степени p сооответствующих классов гладкости. Это дает возможность для компактных экстремумов вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, расширить класс допустимых интегрантов и получить аналоги известных условий локального экстремума вариационных функционалов в банаховых пространствах типа C^k.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа выполнялась в рамках госбюджетных тем кафедры алгебры и функционального анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского "Проблемы функционального и бесконечномерного анализа" (2006–2010 гг., номер государственной регистрации 0106U003959), "Проблемы функционального и бесконечномерного анализа" (2011–2015 гг., номер гос. регистрации 0111U000916).

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является описание компактно–аналитических свойств вариационных функционалов и построение общей теории компактных экстремумов вариационных функционалов в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$ над многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей.

Непосредственными заданиями данной работы являются изучение условий корректной определенности, компактной непрерывности, компактной дифференцируемости и кратной компактной дифференцируемости вариационных функционалов в пространствах $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, получение обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского, обобщенного необходимого условия Лежандра, достаточного условия в терминах гессиана подынтегральной функции сильного компактного экстремума вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей, применение полученных результатов для вычисления компактных экстремумов вариационных функционалов в шкале пространств Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, классификация примеров нелокальных компактных экстремумов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$.

Объект исследования. Основной вариационный функционал в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$ над многомерной областью $D \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей.

Предмет исследования. Компактные экстремумы и компактно–аналитические свойства основного вариационного функционала в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$ над многомерной областью $D \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей.

Методы исследования. В данной работе применяются методы функционального анализа, вариационного исчисления, дифференциальных уравнений и бесконечномерного математического анализа.В частности, методы теории меры и интеграла Лебега, бесконечномерного дифференциального исчисления применялись при изучении компактно–аналитических свойств вариационного функционала в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$. Методы вариационного исчисления и теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах применялись при исследовании обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского, а также получении достаточных и необходимых условий компактного экстремума основного вариационного функционала в шкале $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Научная новизна полученных результатов. Научная новизна работы определяется следующими положениями:

1. Впервые введены классы компактных псевдополиномиальных отбражений $K_p(z)$ и вейерштрассовских псевдополиномиальных отображений $WK_p(z)$, $W^nK_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$. Показано, что принадлежность интегранта подходящему вейерштрассовскому классу гарантирует, соответственно, корректную определенность, степенную оценку порядка p по соболевской норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ на

любом компакте из данного пространства Соболева, компактную непрерывность (K–непрерывность), компактную дифференцируемость (K–дифференцируемость), кратную компактную дифференцируемость (n–кратную K–дифференцируемость) вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей.

2. Впервые получены аналоги обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского для K–экстремалей и необходимого условия Лежандра для компактного экстремума (K–экстремума) вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$.

3. Впервые получено достаточное условие K–экстремума вариационных функционалов в $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, в терминах гессиана интегранта.

4. Впервые получена связь компактных и обычных аналитических свойств вариационных функционалов на шкале пространств Соболева с компактными вложениями.

5. Как приложение, впервые выделены классы вариационных функционалов, имеющих нелокальный K–экстремум в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$.

Практическое значение полученных результатов. Результаты диссертации расширяют формализм вычисления компактных экстремумов вариационных функционалов на случай пространств Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей.

Результаты исследований могут быть использованы в актуальных задачах современного вариационного исчисления и оптимального управления, имеющих приложения в математической физике, в частности, для расчета компактных экстремумов в соответствующих задачах механики и физики.

Личный вклад соискателя. Работы [1], [2], [4], [6], [10], [11], [13] [14], опубликованные по теме диссертации, не имеют соавторов, работы [7], [8] вышли в соавторстве с научным руководителем И. В. Орловым, работы [3], [5],[9],[12] вышли в соавторстве с Е. В. Божонок.

Результаты, опубликованные в работах [5],[9],[12],[14], получены соискателем самостоятельно. В работах [1],[2],[6],[7],[8], И. В. Орлову принадлежит постановка задачи и общий план исследования, полученные результаты принадлежат соискателю. В работе [3],[14], Е.В.Божонок принадлежит постановка задачи и общий план исследования, полученные результаты принадлежат соискателю.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались на IV Международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я. Б. Лопатинского (Донецк, Украина, 14–17 ноября 2012 г.); International Conference "Analysis and mathematical physics" (Kharkiv, Ukraine, June 24–28, 2013); XXI–XXIII Крымских осенних математических школах–симпозиумах: КРОМШ–2010, КРОМШ–2011, КРОМШ–2012, (Ласпи, Крым, Украина, сентябрь 2010–2012 гг.); Крымской Международной Математической Конференции (Судак, Украина, 22 сентября–4 октября 2013 г.); XXV Крымская осенняя математическая школах–симпозиумах: КРОМШ–2014 (Судак, Крым, Россия, 20–30 сентябрь 2014 г.); семинарах кафедры алгебры и функционального анализа Таврического национального университета имени В. И. Вернадского; XXXIX–XXXXIII научных конференциях профессорско–преподавательского состава Таврического национального университета имени В. И. Вернадского (Симферополь, Украина, 2010–2013 гг.); XIV научной конференции профессорско–преподавательского состава Запорожского института экономики и информационных технологий (Мелитополь, Украина, март 2012 г.); VI Всеукраинской научной конференции Мелитопольского государственного педагогического университета им. Богдана Хмельницкого "Информационные технологии в образовании"(Мелитополь, Украина, апрель 2014 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, 9 из которых в изданиях, входящих в список специализированных научных изданий МОНУ ([1], [2], [3], [4], [5], [6],[7], [8], [9]), 5 публикаций в сборниках тезисов конференций ([10],[11],[12],[13],[14]).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В введении раскрывается суть и значимость научной проблемы. Приведен обзор полученных результатов, выделены основные положения, которые выносятся на защиту. Нумерация утверждений в диссертации и автореферате одинаковая.

В первом разделе приводится короткая историческая справка относительно круга вопросов, имеющих отношение к теме работы. Приведен обзор литературы по теме диссертации и сформулированы основные результаты, полученне в этом направлении.

Второй раздел состоит из введения, предварительных сведений и трех пунктов. В подразделе 2.1 приведен обзор результатов связанных с понятием компактного экстремума, приведены компакно-аналитические свойства вариационного функционала в гильбертовом пространстве над отрезком. В подразделе 2.2 введен класс K - псевдополиномов порядка p. Доказано, что K–псевдополиномиальность интегранта вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей, кроме корректной определенности функционала, гарантирует степенную оценку порядка p по соболевской норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ на любом компакте из данного пространства Соболева. С помощью дополнительного требования доминантной смешанной непрерывности для коэффициентов K–псевдополиномиального интегранта порядка p, получено условие компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. Показано на примере, что компактно непрерывный вариационный функционал может быть разрывным в обычном смысле. Введены общие классы Вейерштрасса $W^n K_p(z)$ для случая многомерной компактной области $D \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, произвольных $p \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказано, что попадание K–псевдополиномиального интегранта в подходящий класс Вейерштрасса $W^n K_p(z)$ гарантирует n–кратную K–дифференцируемость вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. Рассмотрен ряд примеров и частных случаев. Приведем необходимые для дальнейшего рассмотрения понятия. Напомним определение K–непрерывности, K–дифференцируемости и кратной K–дифференцируемости в произвольном вещественном полном локально выпуклом пространстве (ЛВП).

Определение 2.1.1 *Пусть E — полное вещественное ЛВП, $\Phi : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функционал Φ компактно непрерывен (K–непрерывен) (компактно дифференцируем (K–дифференцируем), дважды компактно дифференцируем (дважды K–дифференцируем) и т.д.) в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Φ на $(y + spanC)$, непрерывно (дифференцируемо по Фреше, дважды дифференцируемо по Фреше и т.д.) в точке y относительно нормы $\|\cdot\|_C$ в пространстве $E_C = spanC$, порожденном C.*

Базовым понятием для дальнейших выкладок является понятие K - псевдополинома порядка p. Далее, для произвольного вещественного банахова пространства Z обозначим через Z^*_k — банахово пространство всех k–линейных симметричных непрерывных вещественных форм, действующих в Z, $(z)^k = (\underbrace{z, \ldots, z}_{k})$, $k \in \mathbb{N}_0$, $Z^*_0 = \mathbb{R}$.

Определение 2.2.1 *Пусть X, Y, Z — вещественные банаховы пространства; $D_x \subset X$, $D_y \subset Y$, $D_z \subset Z$ — открытые области. Функционал $f : D_x \times D_y \times D_z \to \mathbb{R}$ назовем K–*псевдополиномом порядка p, $p \in \mathbb{N}$, *если f допускает представление вида*

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x, y, z)(z)^k\,, \tag{1}$$

где коэффициенты $R_k : D_x \times D_y \times D_z \to Z^*_k$, $(k = \overline{0, p})$ — борелевские отображения, удовлетворяющие условию доминантной по x, y смешанной ограниченности: для любых компактов $C_x \subset D_x$, $C_y \subset D_y$ коэффициенты R_k ограничены на $C_x \times C_y \times D_z$ независимо от выбора $z \in D_z$. В этом случае примем обозначение: $f \in K_p(z)$.

В диссертации показано, что K–псевдополиномиальность порядка p интегранта f вариационного функционала в соответствующем пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, гарантирует корректную определенность функционала, а так же степенную оценку порядка p по соболевской норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ на любом компакте из данного пространства Соболева.

Теорема 2.2.6. *Если интегрант $f : D_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^N_z \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, где $D_x =: D$ — компактная область в $\mathbb{R}^N_x$, то вариационный* *функционал Эйлера–Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y)dx\,, \quad y(\cdot) \in W^{1,p}(D), p \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

корректно определен всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$,$p \in \mathbb{N}$ *. При этом для любого компакта* $C_\Delta \subset W^{1,p}(D)$ *справедлива следующая оценка по норме* $\|y\|$*:*

$$|\Phi(y)| \leq \alpha_{C_\Delta} + \beta_{C_\Delta} \cdot \|y\|^p_{W^{1,p}} \quad (y(\cdot) \in C_\Delta)\,, \tag{3}$$

где коэффициенты $\alpha_{C_\Delta} \geq 0$*,* $\beta_{C_\Delta} \geq 0$ *зависят только от выбора компакта* C_Δ*.*

Далее мы переходим к условиям K–непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$ над многомерной областью D. С этой целью был введен подходящий класс гладкости $WK_p(z)$ K–псевдополиномиальных интегрантов порядка p.

Определение 2.2.7. *Пусть, в обозначениях определения 2.2.1, функционал* f *непрерывен и принадлежит классу* $K_p(z)$*,* $p \in \mathbb{N}$*. Назовем* f *вейерштрассовским* K*–псевдополиномом порядка* p*,* $p \in \mathbb{N}$ $(f \in WK_p(z))$*, если коэффициенты* R_k *в* K*–псевдополиномиальном представлении* (1) *можно выбрать таким образом, что они будут удовлетворять условию доминантной (по* x*,* y*) смешанной непрерывности: при любом выборе компактов* $C_x \subset D_x$ *,* $C_y \subset D_y$ *коэффициенты* R_k $(k = \overline{0,p})$ *равномерно непрерывны и ограничены на* $C_x \times C_y \times D_z$ *(независимо от выбора* $z \in D_z$*).*

Приведем важную лемму на которую опираются доказательства последующих теорем о K–непрерывности и K–дифференцируемости вариационного функционала в $W^{1,p}$,$p \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.2.8. *Пусть заданы отображения* $\varphi : D_x \times F_1 \to \mathbb{R}$ *и* $\psi : D_x \to \mathbb{R}$ *(*$V = \varphi(x, u)$*,* $y = \psi(x)$*,* F_1 *— банахово пространство) такие, что:*
i) $\varphi(x, u) = o(\|u\|^k)$*,* $0 \leq k \leq p$*, при* $u \to 0$ *равномерно по* $x \in D_x$*;*
ii) $\psi \in L_1(D_x, \mathbb{R})$*;*
iii) отображение $\chi(\widetilde{h}) = \varphi(\cdot, \widetilde{h}) \cdot \psi$ *— непрерывное отображение компакта* $\widetilde{C} \subset L_p(D, F_1)$*,* $1 \leq p < \infty$*, в* $L_1(D, \mathbb{R})$*.*
Тогда

$$\int\limits_{D_x} \overbrace{\varphi(x, \widetilde{h}(x)) \cdot \psi(x)}^{\chi(\widetilde{h})(x)}\, dx = o\left(\|\widetilde{h}\|_{L_p}\right)^k \text{ при } \|\widetilde{h}\|_{L_p} \to 0, \text{ равномерно по } \widetilde{h} \in \widetilde{C}\,. \tag{4}$$

Теорема 2.2.9. *Если интегрант* $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^N_z \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $WK_p(z)$*,* $p \in \mathbb{N}$*, где* D *— компактная область в* $\mathbb{R}^N_x$*, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа* (2) K*–непрерывен всюду в пространстве* $W^{1,p}(D)$*,*$p \in \mathbb{N}$*.*

Рассмотрен пример интегрального функционала, который в пространстве $W^{1,2}(D,\mathbb{C})$, $D\subset\mathbb{R}^N$ является K–непрерывным, но при этом разрывен в нуле в обычном смысле.

Пример 2.2.14. Пусть $u=\varphi(t)$, $t\geq 0$ — произвольная непрерывная вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\varphi(0)=0;\ \varphi(t)>0 \text{ при } 0<t<6\pi;\ \varphi(t)<0 \quad \text{и убывает при } t>6\pi;$$

$$\varphi(t)=O(t^2) \text{ при } t\to+\infty. \tag{5}$$

Рассмотрим вариационный функционал:

$$\Phi(y)=\int\limits_D \varphi\left(\sum_{j=1}^N \left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\cdot\ln\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|^{1-\delta}\right)dx\,,$$

$$y(\cdot)\in W^{1,2}(D,\mathbb{C}),\ D=\prod_{j=1}^N[2\pi;4\pi]\subset\mathbb{R}^N\,. \tag{6}$$

Функционал (6) K–непрерывен на $W^{1,2}(D,\mathbb{C})$, однако не является непрерывным в обычном смысле в нуле.

Далее мы переходим от введенного ранее начального класса Вейерштрасса $WK_p(z)$ к следующему классу $W^1K_p(z)$, попадание интегранта в который гарантирует K–дифференцируемость вариационного функционала в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$,$p\in\mathbb{N}$.

Определение 2.2.17. *Пусть, в обозначениях определения 2.2.1, функционал f непрерывен и принадлежит классу $K_p(z)$, $p\in\mathbb{N}$. Назовем f* вейерштрассовским K–псевдополиномом по z порядка p класса $W^1K_p(z)$*, если коэффициенты R_k в K–псевдополиномиальном представлении* (1) *можно выбрать таким образом, что они будут удовлетворять* условию доминантной (по x, y) смешанной гладкости первого порядка*: при любом выборе компактов $C_x\subset D_x$, $C_y\subset D_y$ отображения R_k вместе с градиентами $\nabla_{yz}R_k$ $(k=\overline{0,p})$ равномерно непрерывны и ограничены на $C_x\times C_y\times D_z$ (независимо от выбора $z\in D_z$).*

Соответствующий класс *доминантной смешанной гладкости первого порядка* обозначается $R_k\in W^1_K(z)$ $(k=\overline{0,p})$.

Теорема 2.2.22. *Если интегрант $f:D\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}^N_z\to\mathbb{R}$ принадлежит классу $W^1K_p(z)$, $p\in\mathbb{N}$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^N_x$, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа* (2) *K–дифференцируем всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$, $p\in\mathbb{N}$. При этом сохраняется классическая формула для первой K–вариации*

$$\Phi'_K(y)\cdot h=\int\limits_D\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\right]dx \quad \left(h\in W^{1,p}(D)\right). \tag{7}$$

В обозначениях K–псевдополиномиального представления (1) *интегранта* f *равенство* (7) *принимает вид*

$$\Phi'_K(y)\cdot h = \int_D \Biggl(\sum_{k=0}^{p}\Bigl[\nabla_{yz}R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k +$$

$$+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}\cdot\nabla h\Bigr]\Biggr)dx. \qquad (8)$$

Для перехода к K–производным высших порядков вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$,$p\in\mathbb{N}$ нам понадобится соответствующее обобщение классов Вейерштрасса.

Определение 2.2.23. *Пусть, в обозначениях определения 2.2.1, функционал* f *является* K*–псевдополиномом порядка* $p\in\mathbb{N}$ *и принадлежит классу* $C^n(D_x\times D_y\times D_z)$, $n\in\mathbb{N}_0$. *Скажем, что* f *принадлежит классу Вейерштрасса* $W^nK_p(z)$, *если коэффициенты* R_k *в* K*–псевдополиномиальном представлении* (1) *можно выбрать таким образом, что они будут удовлетворять* условию доминантной (по x, y) смешанной гладкости n–го порядка*: при любом выборе компактов* $C_x\subset D_x$, $C_y\subset D_y$ *джеты* n*–го порядка по* y, z

$$(R_k,\nabla_{yz}R_k,\ldots\nabla^n_{yz}R_k) \qquad (k=\overline{0,p}) \qquad (9)$$

равномерно непрерывны и ограничены на $C_x\times C_y\times D_z$ *(независимо от выбора* $z\in D_z$*), т.е. принадлежат классу* $W_K(z)$.В этом случае примем обозначение: $R_k\in W^n_K(z)$.

В диссертации показано, что попадание интегранта в класс Вейерштрасса $W^nK_p(z)$ гарантирует n–кратную K–дифференцируемость основного вариационного функционала.

Теорема 2.2.30. *Если интегрант* $f: D\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}^N_z\to\mathbb{R}$ *принадлежит классу* $W^nK_p(z)$, $p\in\mathbb{N}$, *где* D *— компактная область в* $\mathbb{R}^N_x$, *то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа* (2) n *раз* K*–дифференцируем всюду в пространстве* $W^{1,p}(D)$. *При этом справедлива следующая формула для* n*–ой* K*–вариации*

$$\Phi^{(n)}_K(y)\cdot(h_1,\ldots h_n) =$$

$$= \int_D\left[\sum_{l=0}^{n}\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\cdot\left(\sum_{i=(i_1,\ldots i_n):|i|=l}\Bigl(h_1^{(i_1)},h_2^{(i_2)},\ldots,h_n^{(i_n)}\Bigr)\right)\right]dx. \qquad (10)$$

В частности, на диагонали $h_1=h_2=\ldots=h_n=h$ K*–производная* $\Phi^{(n)}_K(y)$ *принимает вид*

$$\Phi^{(n)}_K(y)\cdot(h)^n = \int_D\left[\sum_{l=0}^{n}C^l_n\cdot\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-l}\partial z^l}(x,y,\nabla y)\cdot(h)^{n-l}\cdot(\nabla h)^l\right]dx. \qquad (11)$$

В заключении второго раздела, в подразделе 2.3, мы рассмотрели связь между K–свойствами и обычными локальными свойствами вариационного функционала, действующего в пространствах Соболева, связанных компактным вложением.

Основным результатом раздела 2 является исследование компактно аналитических свойств вариационных функционалов в пространстве Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$ над многомерной областью в терминах K - псевдополиномиальных интегрантов, условия корректной определенности функционала, компактной непрерывности, компактной дифференцируемости, n-кратной K - дифференцируемости, что дает возможность для компактных экстремумов вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, расширить класс допустимых интегрантов и получить аналоги известных условий локального экстремума вариационных функционалов в банаховых пространствах типа C^k.

Раздел 3 посвящен необходимым условиям компактного экстремума основного вариационного функционала в шкале пространств Соболева над многомерной областью. Он состоит из введения, предварительных сведений и трех пунктов. Подраздел 3.1 посвящен обзору результатов связанных с уравнением Эйлера - Лагранжа для K - экстремалей и необходимым условием Лежандра компактного экстремума, вариационного функционала в гильбертовом пространстве над отрезком. Подраздел 3.2 посвящен обобщенному уравнению Эйлера - Остроградского для K–экстремалей в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной областью.

Рассмотрим вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y)dx, \quad y(\cdot) \in W^{1,p}(D), \ p \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} = y_0, \tag{13}$$

где $y_0 \in W^{1,p}(\partial D)$, D — компактная область в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей ∂D.

Для определения K–экстремалей вариационного функционала (12)–(13), мы вывели п.в.–аналог соответствующего классического (C^1) необходимого условия локального экстремума — уравнения Эйлера–Остроградского.

Теорема 3.2.1 *Пусть функция $u = f(x, y, z)$, $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^N_z \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $W^1K_p(z)$. Предположим, что*
(i) функционал (12) имеет K–экстремум в точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ при граничном условии (13);
(ii) отображение $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y)$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,1}(D)$.

Тогда выполнено обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x,y,\nabla y)\right) = 0 \quad \textit{п.в. на} \quad D\,. \tag{14}$$

В частности, условие (ii) заведомо выполнено, если

$$(\partial f/\partial z) \in C^1(D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^N), \quad y(\cdot) \in W^{2,p}(D)\,.$$

Решения уравнения (14), при выполнении условия (ii) теоремы, названы K – *экстремалями* функционала (12)–(13) в пространстве $W^{1,p}(D)$,$p \in \mathbb{N}$. Заметим, что в точках аппроксимативной непрерывности ∇y равенство в уравнении Эйлера–Остроградского заведомо выполнено. Далее мы показали, что решение обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского обладает дополнительными аналитическими свойствами. Тем не менее, вопрос о принадлежности K–экстремали к классу $W^{2,p}$, вообще говоря, решается отрицательно.

Теорема 3.2.3 *Пусть D — компактная область в $\mathbb{R}_x^N$ с липшицевой границей; $u = f(x,y,z)$, $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^N \to \mathbb{R}$, — функция класса C^2; функция $y(\cdot) : D \to \mathbb{R}$ всюду непрерывна и почти всюду дифференцируема на D. Предположим, что*
(i) градиент $(\partial f/\partial z)(x,y,\nabla y)$ дифференцируем почти всюду на D;
(ii) гессиан $(\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,\nabla y)$ невырожден почти всюду в D,

Тогда функция $y(\cdot)$ дважды аппроксимативно дифференцируема почти всюду на D, причем

$$\nabla_{ap}^2(y)(x)\cdot\Delta x = \nabla_{ap}(\nabla y)(\Delta x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left[\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\right)\cdot\Delta x - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,\nabla y)\cdot\Delta x - (\nabla y,\Delta x)\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,\nabla y)\right]. \tag{15}$$

Получен, как приложение теоремы 3.2.3 к уравнению Эйлера–Остроградского (14), результат об определенном усилении гладкости K–экстремали.

Следствие 3.2.4 *Пусть, в предположениях теоремы 3.2.3, функция $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$, $y\big|_{\partial D} = y_0$, — K–экстремаль функционала (12)–(13). Тогда, в тех точках $x \in D$, где градиент $\nabla y(x)$ аппроксимативно непрерывен (это выполнено почти всюду в D в силу теоремы о п.в. аппроксимативной непрерывности любой измеримой функции) и гессиан $(\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,\nabla y)$ невырожден, функция следа*

$$Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla_{ap}^2(y)(x)\right)$$

также аппроксимативно непрерывна, причем справедливо равенство

$$Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla^2_{ap}(y)(x)\right)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)-Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,\nabla y)+(\nabla y,\cdot)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,\nabla y)\right). \qquad (16)$$

Предыдущие результаты могут быть существенно улучшены в предложении п.в. непрерывности градиента K–экстремали. В частности, мы приходим уже к повторной дифференцируемости п.в. K–экстремали (т.е., к п.в. дифференцируемости обычного градиента K–экстремали).

Теорема 3.2.5 *Пусть, в предположениях теоремы 3.2.3, градиент* $\nabla y(x)$ *непрерывен п.в. на* D. *Тогда справедливы следующие утверждения:*
(i) $\nabla^2(y)(x)$ *существует п.в. на* D*; при этом*

$$\nabla^2(y)(x)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\right)-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,\nabla y)-(\nabla y,\cdot)\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,\nabla y)\right). \qquad (17)$$

(ii) Формула для функции следа $Tr\left((\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,\nabla y)\cdot\nabla^2(y)(x)\right)$ *имеет вид*

$$Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla^2(y)(x)\right)=$$

$$=Tr\left(\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\right)\right)-Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,\nabla y)+(\nabla y,\cdot)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,\nabla y))\right). \quad (18)$$

(iii) В частности, если $y(\cdot)$ *удовлетворяет уравнению Эйлера–Остроградского* (14), *то в тех точках из* D, *где* ∇y *непрерывен, функция* $Tr\left((\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,\nabla y)\cdot\nabla^2(y)(x)\right)$ *также непрерывна и формула* (16) *принимает вид (почти всюду в* D*):*

$$Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla^2(y)(x)\right)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)-Tr\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,\nabla y)+(\nabla y,\cdot)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,\nabla y)\right). \qquad (19)$$

Приведен пример показывающий, что в отличие от классического вариационного C^1–случая, существенного повышения гладкости для K–экстремали в соболевском случае не происходит.

В подразделе 3.3 получен аналог классического необходимого условия Лежандра экстремума вариационного функционала в C^1 в случае K–экстремума в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, где $p \in \mathbb{N}$, D — компактная область в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей ∂D. Ранее И. В. Орловым и Е. В. Божонок данное условие было получено в пространстве $W^{1,2}([a;b])$. В ситуации многомерного K–вариационного исчисления, в отличие от одномерного случая, обобщенное условие Лежандра для K–минимума выполняется в видоизмененной форме. Дадим вначале определение полунеотрицательной квадратичной формы.

Определение 3.3.1 *Квадратичную форму φ на вещественном векторном пространстве E назовём полунеотрицательной ($\varphi \overset{semi}{\geq} 0$), если условие $\varphi < 0$ не выполняется, т.е. существует $h \in E$ $(h \neq 0)$ такое, что $\varphi(h) \geq 0$.*

Теорема 3.3.2 *Пусть вариационный функционал* (12)–(13) *достигает K–минимума в точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$. Кроме того, предположим, что*
(i) интегрант f вейерштрассовского класса $W^2K_p(z)$;
(ii) отображение $\left(\partial^2 f/\partial y \partial z\right)(x, y(x), \nabla y(x))$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,1}(D)$.
Тогда выполняется обобщенное необходимое условие Лежандра

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y(x), \nabla y(x)) \overset{semi}{\geq} 0 \tag{20}$$

вдоль K–экстремали $y(\cdot)$ почти всюду на D.

Рассмотрен пример двумерного вариационного функционала, имеющего негладкую K–экстремаль, но удовлетворяющего обобщенному условию Лежандра.

Основным результатом раздела 3 является получение аналога классического необходимого условия локального экстремума — обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для K–экстремалей в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей и получение аналога классического необходимого условия Лежандра локального экстремума вариационного функционала в C^1 — обобщенное необходимое условие Лежандра для K–минимума вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$.

В 4 разделе рассмотрены достаточные условия компактного экстремума вариационных функционалов в шкале пространств Соболева над многомерной областью. Подраздел 4.1 посвящен обзору результатов получения достаточных условий K–экстремума вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}$ над отрезком. Подраздел 4.2 посвящен получению многомерного аналога достаточного условия K–экстремума в терминах гессиана подынтегральной функции для вариационного функционала (15)-(16).

Отметим, что перенос условия Якоби на многомерный случай (а именно, переход к условию отсутствия сопряженной подобласти в D, в которой при нулевом граничном условии уравнение Якоби имеет ненулевое решение) оказался затруднительным. Эта задача в пространстве C^1 была окончательно решена только в 60-х–70-х годах XX века усилиями ряда выдающихся математиков. При этом, в отличие от одномерного случая, многомерное условие Якоби приняло неалгоритмическую форму, делающую его практическое применение крайне затруднительным.

Поэтому мы рассмотрели достаточное условие "типа гессиана ", впервые в одномерном случае рассмотренное в диссертаии Е.В. Божонок, в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$ для $p \geq 2$.

Теорема 4.2.5 *Пусть* $y(\cdot)$ *—* K*–экстремаль функционала* (12) *в* $W^{1,p}(D)$ $(p \geq 2)$ *при граничном условии* (13). *Предположим, что*
(i) *интегрант* f *принадлежит вейерштрассовскому классу* $W^2K_p(z)$*;*
(ii) $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) \in W^{1,1}(D)$.
Если на K*–экстремали* $y(\cdot)$ *при всех* $x \in D$ *выполнены условия*
1)$\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x, y, \nabla y) > 0$*;*
2) $\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x, y, \nabla y) \gg 0$*;*
3) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x, y, \nabla y) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)(x, y, \nabla y) \cdot \left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x, y, \nabla y)\right)^{-1} \cdot$
$\cdot\, (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) > 0$;
4) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x, y, \nabla y) \cdot \left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x, y, \nabla y) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) \cdot$
$\cdot\, (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)(x, y, \nabla y) \gg 0,$
то вариационный функционал (12)–(13) *имеет строгий* K*–минимум в точке* $y(\cdot)$.

В разделе 4.3 мы переходим к рассмотрению классов вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью с липшицевой границей $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, которые будут иметь нелокальный компактный экстремум в нуле.

Разработана следующая схема исследования вариационного функционала на нелокальный K–экстремум. Сначала мы проверяем тот факт, что $y_0(\cdot) \equiv 0$ является K–экстремалью соответствующего функционала, т.е. удовлетворяет обобщенному уравнению Эйлера–Остроградского (14). Далее на K–экстремали $y_0(\cdot) \equiv 0$ мы проверяем достаточное условие компактного минимума в терминах гессиана подынтегральной функции. На последнем этапе мы проводим исследование найденного K–минимума $y_0(\cdot) \equiv 0$ на нелокальность.

Теорема 4.3.2 *Рассмотрим вариационный функционал ("соболевскую квазинорму")*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx, \;\; y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T],$$

где $\varphi(\cdot) \in W_K^2(z)$*, при дополнительном граничном условии* $y\big|_{\partial D} \equiv 0$. *Тогда, в предположении* $\varphi(0) > 0$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Простейшим примером соболевской квазинормы может быть

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \cos(div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx,\ y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ D = \prod_{i=1}^N [0;T]\,.$$

Здесь функция $\varphi(z) = \cos(z_1 + \ldots + z_N)$, $\varphi \in W_K^2(z)$ в силу периодичности и гладкости, $\varphi(0) = \cos(0 + \ldots + 0) = 1 > 0$, $\varphi(z_0) = -1 < 0$ для $z_0 = ((\pi/N), \ldots, (\pi/N))$.

Теорема 4.3.12 *Рассмотрим вариационный функционал ("квазигармонический осциллятор")*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 + \psi(y) - y^2\right] dx,\ \ y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ \ D = \prod_{i=1}^N [0;T],$$

где $\varphi(\cdot) \in W_K^2(z)$, $\psi(\cdot) \in C^2$, $\psi(0) = 0$, *при дополнительном граничном условии* $y\big|_{\partial D} \equiv 0$. *Тогда, в предположения* $\varphi(0) > 0$, $\psi'(0) = 0$ *и* $\psi''(0) > 2$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Простейшим примером квазигармонического осцилятора может служить функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\cos(div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2 + 2\sin^2 y - y^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ D = \prod_{i=1}^N [0;T].$$

Вариационный функционал $\Phi(y)$ в нуле достигает строгого нелокального K–минимума.

В рассмотренных выше примерах никаких ограничений на меру области D не налагается. Далее в диссертации рассмотрен пример вариационного функционала, для которого наличие K–экстремума возможно только при некотором ограничении на меру D.

Теорема 4.3.15 *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 + \psi(x, y, \nabla y) - y^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ \ D = \prod_{i=1}^N [0;T],$$

где $\varphi(\cdot) \in W^2_K(z)$, $\psi \in W^2K_1(z)$, $\psi(x,0,0) = 0$, *при дополнительном граничном условии* $y\Big|_{\partial D} \equiv 0$. *Введем следующие обозначения*

$$r = \min_{x \in D} \max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \geq \gamma^2 \cdot \|z\|^2 \ (\forall z \in \mathbb{R}^N_z)\},$$

где

$$R(x) = \begin{pmatrix} 2\varphi(0) + \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n \partial z_1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1 \partial z_n} & \cdots & 2\varphi(0) + \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n^2} \end{pmatrix};$$

$$s = \min_{x \in D} \left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y^2} - 2 \right);$$

$$q = \min_{x \in D} \left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y^2} - 2 - div_x \left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y \partial z} \right) \right).$$

Тогда, в предположении $\varphi(0) > 0$, $r > 0$, $s > 0$ *и* $q < 0$, *и при условии перемены знака для* φ:

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \ldots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле при дополнительном ограничении на меру области* D

$$mes_N(D) < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 r}{|q|}} \right)^N.$$

Наконец рассмотрены обобщения приведенных выше примеров на широкий класс псевдополиномиальных интегрантов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Основные результаты, полученные в диссертации и выносимые на защиту, можно сформулировать следующим образом.

1. Введены классы K–псевдополиномов порядка p, $p \in \mathbb{N}$. Доказано, что K–псевдополиномиальность интегрантов вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей, кроме корректной определенности функционала, гарантирует степенную оценку порядка p по соболевской норме $\|y\|_{W^{1,p}}$ на любом компакте из данного пространства Соболева.

2. С помощью дополнительного требования доминантной смешанной непрерывности для коэффициентов K–псевдополиномиального интегранта порядка p, получено условие компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$,. Показано на примере, что компактно непрерывный вариационный функционал может быть разрывным в обычном смысле.

3. Введены общие классы Вейерштрасса $W^nK_p(z)$ для случая многомерной компактной области D с липшицевой границей, произвольных $p \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказано, что попадание K–псевдополиномиального интегранта в подходящий класс Вейерштрасса $W^nK_p(z)$ гарантирует n–кратную K–дифференцируемость вариационного функционала в соответствующем пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. Рассмотрен ряд примеров и частных случаев.

4. Получен аналог классического необходимого условия локального экстремума — обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для K–экстремалей в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^N$ с липшицевой границей.

5. Доказано, что решение обобщенного вариационного уравнения Эйлера–Остроградского в пространствах $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, обладает дополнительными аналитическими свойствами. Тем не менее, в отличие от классического вариационного C^1–случая, существенного повышения гладкости для K–экстремалей не происходит.

6. Получен аналог классического необходимого условия Лежандра локального экстремума вариационного функционала в C^1 - обобщенное необходимое условие Лежандра для K –минимума вариационного функционала в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$. Рассмотрен ряд примеров.

7. Получены достаточные условия компактного экстремума вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью D с липшицевой границей в терминах гессиана подинтегральной функции.

8. Разработана схема исследования вариационного функционала на нелокальный K–экстремум в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$. Приведен ряд классов вариационных функционалов, имеющих нелокальных K–экстремум.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Кузьменко Е.М. Условия корректной определенности и компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$ / Е.М. Кузьменко // Ученые записки ТНУ, серия "Физико-математические науки". — 2011. — Т. 24(63), № 1. — С.76–89.

2. Кузьменко Е.М. Условия K–дифференцируемости и повторной K–дифференцируемости вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных / Е.М. Кузьменко // Ученые записки ТНУ, серия "Физико–математические науки". — 2011. — Т. 24(63), № 3. — С. 39–60.

3. Божонок Е.В. Обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для K–экстремалей в $W^{1,p}(D)$ / Е.В. Божонок, Е.М. Кузьменко // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, серия "Физико–математические науки". — 2012. — Т. 25(64), №2. — С. 15–27.

4. Кузьменко Е.М. Компактно–аналитические свойства вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных / Е.М. Кузьменко // Динамические системы (межвед. сб.). — 2012. — Т.2(30), №1–2. — С. 89–120.

5. Божонок Е.В. Условия компактного экстремума основного вариационного функционала в шкале пространств Соболева над многомерной областью / Е.В. Божонок, Е.М. Кузьменко // Нелинейные граничные задачи. — 2012. — Т. 21. — С. 9–26.

6. Кузьменко Е.М. Компакно - аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева над многомерной областью / Е.В. Божонок, Е.М. Кузьменко // Нелинейные граничные задачи. — 2012. — Т. 21. — С. 98–108.

7. Orlov I. V.Necessary conditions for K–extrema of variational functionals in Sobolev spaces on multi–dimentional domains / I.V. Orlov, E.V. Bozhonok, K.M. Kuzmenko // Динамические системы (межвед. сб.). — 2013. — Т. 3(31), №1–2. — С. 69–85.

8. Орлов И.В. Необходимые условия компактного экстремума вариационного функционала в пространствах Соболева над многомерной областью / И.В. Орлов, Е.В. Божонок, Е.М. Кузьменко // Доповіді НАНУ. — 2014. — №4. — С. 19–24.

9. Божонок Е.В. Классы вариационных функционалов, имеющих нелокальный компактный экстремум в $W^{1,p}$ над многомерной областью / Е.В. Божонок, Е.М. Кузьменко // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, серия "Физико–математические науки". — 2014. — Т. 27(66), №.1 — С. 31 – 44.

10. Кузьменко Е.М. Псевдоквадратичные и псевдоp-адичные интегранты вариационных функционалов в пространствах Соболева. / Е.М. Кузьменко // XXI международная научная конференция KROMSH–2010 (Крым, Ласпи–Батилиман, 17–29 сентября 2010 г.): тез. докл. — 2010. — С. 26.

11. Кузьменко Е.М. Условия компактной непрерывности, K – дифференцируемости и повторной K – дифференцируемости вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$ функций многих переменных. / Е.М. Кузьменко // XXII международная научная конференция KROMSH–2011 (Крым, Ласпи–Батилиман, 17–29 сентября 2011 г.): тез. докл. — 2011. — С. 32.

12. Божонок Е.В. Необходимые условия для K–экстремумов вариационных функционалов в пространствах Соболева над многомерной областью / Е.В. Божонок, Е.М. Кузьменко // XXIII международная научная конференция KROMSH–2012 (Крым, Ласпи–Батилиман, 17–29 сентября 2012 г.): тез. докл. — 2012. — С. 11–12.

13. Kuzmenko K.M. The classes of examples non-local compact extrema of variational functional in Sobolev spaices $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$ on multidimensional domain / K.M. Kuzmenko // International Conference Analysis and Mathematical Physics 2013 (Kharkiv,Ukraine, 24–28 June 2013 .): Book of Abstracts. — B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Science of Ukraine, 2013. — P. 38.

14. Кузьменко Е.М. Классы примеров нелокальных K-экстремумов вариационных функционалов вшкале пространств Соболева над многомерной областью / Е.М. Кузьменко // XXIII международная научная конференция KROMSH-2013 (Крым, Судак, 22 сентября–4 октября 2013 г.): тез. докл. — 2013. — Т. 3. — С. 98.

АННОТАЦИЯ

Кузьменко К.М. Компактные экстремумы и компактно аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева над многомерной областью.—Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01—Действительный, комплексный и функциональный анализ.—Таврический национальный университет им.В.И.Вернадского, Симферополь, 2014.

Диссертация посвящена описанию компактно-аналитических свойств вариационного функционала и построению, в основных чертах, общей теории компактных экстремумов вариационных функционалов $\Phi(y) = \int_D f(x, y, \nabla y)dx\,, \quad y(\cdot) \in W^{1,p}(D)\,, p \in \mathbb{N}$ в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$ над многомерной областью D.

Получены условия корректной определенности, компактной непрерывности (K–непрерывности), компактной дифференцируемости (K–дифференцируемости) и кратной компактной дифференцируемости (n-я K–дифференцируемости) основного вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$ над многомерной областью. Показано, что соответствующие компактно-аналитические свойства гарантируются принадлежностью интегранта подходящему вейерштрассовскому классу $WK_p(z)$, $W^1K_p(z)$, $W^nK_p(z)$.

Получено обобщенное уравнение Эйлера-Остроградского для K–экстремалей основного вариационного функционала в $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$. Исследована задача о повышении гладкости решений обобщенного уравнения Эйлера-Остроградского в соболевском случае. Получено обобщенное необходимое условие Лежандра и достаточное условие в терминах гессиана подынтегральной функции для сильного K–экстремума вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ над многомерной областью. Выделены классы вариационных функционалов, имеющих нелокальный K–экстремум в нуле в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$. Получена связь компактных и обычных аналитических свойств вариационного функционала на шкале пространств Соболева с компактными вложениями.

Ключевые слова: вариационный функционал, пространство Соболева, компактный экстремум, компактно-аналитические свойства, уравнение Эйлера-Остроградского, необходимое условие Лежандра.

ABSTRACT

Kuzmenko E.M. Compact extremum and compact analytical properties of basic variational functional in Sobolev spaces $W^{1,p}$ over multi–dimensional domain.—Manuscript.

The thesis for obtaining scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.01— Real,complex and functional analysis.—Taurida V.Vernadsky National University,Simferopol , 2014.

Thesis is devoted to the construction, on the whole, of the general theory of compact extremums (K–extremums) and also to the description of compact-analytical (K–analytical) properties of the basic variational functional $\Phi(y) = \int_D f(x, y, \nabla y)dx\,, \quad y(\cdot) \in W^{1,p}(D)\,, p \in \mathbb{N}$, in Sobolev space $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$ over multi–dimensional domain $D \subset \mathbb{R}^n$.

The theorems on well-posedness, compact continuity, compact differentiability and n-times compact differentiability of the variational functional in Sobolev space $W^{1,p}$ on multi–dimensional domain D are obtained.

The Euler-Ostrogradsky equation for K–extremal of the variational functionals in $W^{1,p}$ is considered. The Legendre necessary condition for K–extremum of the variational functionals in $W^{1,p}$ over multi–dimensional domain D are stated. The sufficient condition of K–extremum of variational functionals in $W^{1,p}$ in the terms of Hessian of integrand function is generalized to the case of several variables.

The extensive classes of the examples of nonlocal K–extremums of variational functionals in $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$ over multi–dimensional domain D are studied.

Key words and phrases : variational functional, Sobolev space, compact extremum, compact-analytical properties, Euler-Ostrogradsky equation, Legendre necessary condition.