МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

На правах рукописи

СЁМКИНА ЕКАТЕРИНА ВЛАДИМИРОВНА

УДК 517.968.22, 517.968.72

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание научной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор,
Заслуженный деятель науки и техники Украины
Копачевский Николай Дмитриевич

Симферополь – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Широкий класс проблем, возникающих в приложениях, приводит к необходимости изучения абстрактных начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений. Такие проблемы возникают, как правило, на базе конкретных задач о малых движениях сплошных сред, то есть систем с бесконечным числом степеней свободы. Так, к интегро-дифференциальным уравнениям первого и второго порядков приводят соответственно задачи о малых движениях вязкоупругой и идеальной релаксирующей жидкости в произвольной ограниченной области. Эти задачи стали актуальными в связи с запросами авиационной, танкерной, ракетной и космической техники.

Изучение интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами привлекает внимание как отечественных, так и зарубежных ученых. Основные направления исследований состоят в доказательстве существования решений различных начально-краевых задач, изучении свойств нормальных колебаний и структуры спектров их частот, получении асимптотических формул. В настоящее время имеется значительное число работ, посвященных изучению вопросов разрешимости и асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных уравнений в банаховых и, в частности, в гильбертовых пространствах. Отметим, что изучение интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в этих пространствах является естественным развитием теории операторно-дифференциальных уравнений и тесно связано с теорией полугрупп, берущих свое начало с работ Т. Като, Э. Хилле, Р. Филлипса, С. Г. Крейна, С. Агмона и Л. Ниренберга, а также нашедших отражение в монографии К. Енгела и Р. Г. Найгела. В совместных исследованиях С. Г. Крейна и Н. Д. Копачевского, посвященных операторному подходу к линейным задачам гидродинамики, представлены функциональные и аналитические методы, применяемые для изучения малых движений и нормальных колебаний гидромеханических систем с полостями, заполненными идеальной либо вязкой жидкостью. Стоит также отметить недавно вышедшую монографию В. В. Власова с соавторами, где изучаются задачи Коши для интегро-дифференциальных и функциональных уравнений, а также сопутствующие спектральные задачи.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа выполнялась в рамках госбюджетных тем и плановых исследований кафедры математического анализа Таврического национального университета имени В. И. Вернадского "Операторные методы в шкалах пространств и их приложения в задачах гладкого и негладкого анализа и в проблемах механики сплошных сред"(номер государственной регистрации 0112U000453), "Применение операторных методов в задачах математической физики, механики сплошных сред и теории массового обслуживания"(номер государственной регистрации 0112U000643) . Тема кандидатской диссертации утверждена на заседании Учёного совета Таврического национального университета имени В. И. Вернадского (протокол № 1 от 27.01.2011 г.).

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является изучение задач Коши, а также ассоциированных спектральных задач для некоторых классов вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядков с неограниченными операторными коэффициентами.

Задачи исследования:

- получить результаты о сильной разрешимости задач Коши для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве;

- провести спектральный анализ операторных пучков, ассоциированных с рассматриваемыми уравнениями. Исследовать асимптотику спектра, в зависимости от свойств ядер рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений;

- доказать теоремы о полноте и базисности системы корневых (собственных и присоединенных) элементов, а также по возможности получить результаты о представлении сильных решений интегро-дифференциальных уравнений в виде сумм рядов по экспонентам, отвечающим точкам спектра указанных операторных пучков. На этой основе получить результаты о структуре и асимптотических свойствах решений изучаемых интегро-дифференциальных уравнений.

Несмотря на имеющиеся достижения в области механики сплошных сред и интегро-дифференциальных уравнений, и в определенной мере законченность некоторых полученных здесь математических результатов, остались еще задачи, которые не получили до настоящего времени детального математического исследования на основе применения современных методов функционального анализа, спектральной теории операторов, а также теории полугрупп операторов. Это и определило предмет исследования в данной диссертации.

Объект исследования. Полные линейные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра первого и второго порядков в гильбертовом пространстве, неразрешённые относительно старшей производной.

Предмет исследования. Сильная разрешимость задач Коши для вольтерровых интегро-диффернциальных уравнений первого и второго порядков, неразрешённых относительно старшей производной. Свойства решений соответствующих спектральных задач.

Методы исследования. В работе применяются несколько общих приемов функционального анализа и существенным образом — теория полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Рассматриваются такие случаи, когда интегро-дифференциальное уравнение на основе теории полугрупп заменяется равносильным интегральным уравнением Вольтерра второго рода и при определенных условиях устанавливается существование единственного решения этого уравнения в некоторых классах функций. Затем проверяется, что решение интегрального уравнения является также решением исходного интегро-дифференциального уравнения. Эти простые и хорошо известные приемы позволяют получить новые результаты о разрешимости абстрактных задач Коши и на этой основе установить теоремы о существовании и единственности решений некоторых задач, возникающих в приложениях.

Для исследования ассоциированных с исходными спектральных задач используется спектральная теория операторных пучков, позволяющая осуществить переход от классической задачи на собственные значения для оператора, действующего в гильбертовом пространстве, к исследованию спектральной задачи для оператор-функции, являющейся полиномом либо даже аналитической функцией относительно спектрального параметра, а также теория пространств с индефинитной метрикой.

Научная новизна полученных результатов. 1) Впервые изучаются полные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра, неразрешённые относительно старшей производной. При этом операторный коэффициент при старшей производной является линейным ограниченным положительным оператором, который, вообще говоря, может иметь неограниченный обратный.

2) Впервые рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра с неограниченными и, вообще говоря, некоммутирующими операторными коэффициентами, заданными на своих областях определения, плотных в исходном гильбертовом пространстве. При этом считается, что эти операторы сравнимы по своим областям определения. Для полных уравнений второго порядка выделяются такие классы задач, для которых один из операторов можно назвать главным; он имеет область определения, наиболее узкую по сравнению с областями определения других операторных коэффициентов. В зависимости от взаимной подчинённости операторных коэффициентов для таких классов задач рассмотрены три основных типа уравнений.

3) Впервые для вышеописанных классов уравнений доказаны утверждения о существовании и единственности сильного решения задач Коши.

4) Проведен анализ спектральных задач, ассоциированных с исследуемыми интегро-дифференциальными уравнениями: установлена общая структура спектра, получены асимптотики вещественной и комплексной частей спектра указанных оператор-функций, доказаны свойства базисности собственных элементов.

Практическое значение полученных результатов. Для полных линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в гильбертовом пространстве доказаны теоремы о существовании и единственности решений задач Коши, исследованы собственные колебания, вопросы полноты и базисности системы корневых элементов; для уравнений первого порядка получены условия неустойчивости описываемой динамической системы. Результаты диссертации дополняют и развивают теорию интегро-дифференциальных и дифференциально-операторных уравнений. Работа носит теоретический характер. Поскольку эксперименты, связанные с малыми движениями тел с полостями заполненными жидкостями, вызывают значительные технические сложности, то именно эти обстоятельства выдвигают на первый план математическое моделирование и дальнейший теоретический анализ поведения сплошных сред, то есть систем с бесконечным числом степеней свободы. Результаты работы могут быть полезны как специалистам, работающим в области интегро-дифференциальных уравнений и функционального анализа, так и в исследованиях прикладного характера.

Личный вклад соискателя. Постановка и математическая формулировка задач, а также общий план исследования рассмотренных в диссертации задач предложены научным руководителем соискателя Н. Д. Копачевским. Полученные результаты принадлежат соискателю. Материалы диссертации опубликованы в работах [40], [55], [62], [64], [93]. Результаты работ [55], [62], [64] получены соискателем самостоятельно. В работах [40], [93] соискателю принадлежит часть, связанная с исследованием проблемы в случае малой и большой интенсивности диссипации внутренней энергии исследуемой системы.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

XI Белорусской математической конференции, Минск, Беларусь, 5-9 ноября 2012 г.;

IV Международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я.Б. Лопатинского, Донецк, Украина, 15-17 ноября, 2012 г.;

International Conference «Analysis and mathematical physics», Kharkiv, Ukraine, June 24-28, 2013;

Международной математической конференции по случаю 75-летия со дня рождения академика А. М. Самойленко «Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения», Севастополь, Украина, 23-30 июня 2013 г.;

International Conference «Nonlinear Partial Differential Equations NPDE-2013», Donetsk, Ukraine, September 9-14, 2013;

«Крымской Международной Математической Конференции КММК-2013», Судак, Украина, 22 сентября-4 октября 2013г.;

IV Международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV», г.Ростов-на-Дону, Россия, 27 апреля-1 мая 2014 г.

XXII Международной конференции «МАТЕМАТИКА. ЭКОНОМИКА. ОБРАЗОВАНИЕ», VIII Международном симпозиуме «РЯДЫ ФУРЬЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ», VII Междисциплинарном семинаре «Математические модели и информационные технологии в науке и производстве», Дюрсо, Россия, 27 мая-3 июня 2014 г.

семинарах кафедры математического анализа Таврического национального университета имени В.И. Вернадского (под руководством проф. Н. Д. Копачевского, Симферополь, 2011-2014 гг.);

XXII, XXIII Крымских осенних математических школах-симпозиумах по спектральным и эволюционным задачам: КРОМШ-2011, КРОМШ-2012 (Ласпи-Батилиман, Крым, Украина, сентябрь 2011-2012 гг.);

научных конференциях профессорско-преподавательского состава Таврического национального университета имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина, 2011-2014 гг.).

Публикации. Результаты исследований опубликованы в 16 научных работах, 5 из которых принадлежат к перечню научных специализированных изданий [40], [55], [62], [64], [93], 11 публикаций в материалах и сборниках тезисов конференций [39], [56]-[61], [63], [65], [91], [92].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав, разделенных в общей сложности на 13 параграфов и списка литературы. Объем диссертации составляет 152 страницы. Список цитированной литературы включает 119 наименований.

ГЛАВА 1

Обзор литературы

Представляемая работа посвящена исследованию вопросов существования и единственности решений начальных задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра первого и второго порядка, а также ассоциированных спектральных задач. Специфика подобных объектов проявляется в их двойственной природе. Неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и, вместе с тем, фигурирует под знаком интеграла. Возникновение интегрального слагаемого в уравнении связано с необходимостью учитывать зависимость мгновенных значений характеристик описываемого объекта от их соответствующих предыдущих значений, т. е. влияние на текущее состояние системы ее предыстории. В современной литературе подобные технические и природные системы называют системами с последействием, наследственностью или динамической памятью. Математическое описание законов функционирования таких объектов было предложено В. Вольтерра (в серии статей 1909 года) на основе интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. В. Вольтерра предложил вариант сведения интегро-дифференциальных уравнений к интегральным и применил к их исследованию развитую к тому времени в его работах теорию интегральных уравнений. Им была предложена математическая модель конкурентного межвидового взаимодействия [20] на основе интегро-дифференциальных уравнений с переменным верхним пределом интегрирования, названных в дальнейшем уравнениями типа Вольтерра. Существенное внимание в его работах было уделено развитию реологической модели деформируемого тела с использованием интегральной зависимости между напряжением и деформацией. Предложенная таким образом модель "наследственного твердого тела" описывается системой интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Первоначально использованная линейная интегральная зависимость была обобщена и заменена на нелинейную в форме ряда Фреше [88] из кратных интегралов — аналога ряда Тейлора для непрерывного функционала. Обзор результатов по теории интегро-дифференциальных уравнений и их приложений, полученных как самим В. Вольтерра, так и его современниками, содержится в монографии [21], где имеется также подготовленная М. К. Керимовым к изданию книги обширная библиография последующих работ. Публикации, относящиеся к первой четверти 20-го века, отражены, кроме того, в обзоре к [84].

Обзоры литературы последних десятилетий по интегро-дифференциальным уравнениям и непосредственно связанным с ними интегральным уравнениям содержатся в [9], [76]. Отметим, что объем литературы по темам, примыкающим к теме диссертации, весьма велик, поэтому приводимый здесь обзор затрагивает в основном лишь минимально необходимую часть публикаций.

Отличительная особенность изучаемых в работе интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве состоит в наличии оператора при старшей производной, который вообще говоря может иметь неограниченный обратный. Такие уравнения мы называем неразрешёнными относительно старшей производной. Для таких объектов неприменимы теоремы, которые справедливы в случае, когда оператор при старшей производной единичный. Это порождает необходимость разработки аппарата, который, во-первых, позволил бы работать именно с интегро-дифференциальными уравнениями, во-вторых, был согласован с уже известными идеями, развитыми для неразрешённых дифференциальных уравнений.

С другой стороны, уравнение в абстрактных пространствах зачастую является краткой операторной записью какой-либо содержательной задачи математической физики или даже целого ряда задач. Неразрешенные относительно старшей производной по времени линейные интегро-дифференциальные уравнения возникают в математической теории термовязкоупругости [74], [77], [99], [105], гидродинамике [38], [49], физике плазмы [54] и многих других областях. Тем самым, помимо исключительно теоретического интереса, рассматриваемые задачи актуальны с точки зрения приложений.

Тематике интегро-дифференциальных уравнений посвящена обширная библиография. Не ставя перед собой задачи охватить целый отдел современной математической науки, приведем некоторые работы, касающиеся интегро-дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах.

На необходимость рассмотрения операторных уравнений Вольтерра впервые указал академик М. М. Лаврентьев в своем докладе [44] на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 году. Эти уравнения нашли широкое применение в теории обратных и некорректных задач математической физики и интегральной геометрии. Некоторые результаты исследований в этих областях изложены в монографии [45], в которой также рассмотрена задача Коши

$$\frac{d}{dt}u(t) = Bu(t) + \int\limits_0^t A(t,\tau)u(\tau)d\tau + f(t), \quad u(0) = 0;$$

где $u(t) \in C([0,T];U)$ — неизвестная функция, U — гильбертово пространство, $A(t,\tau)$ — непрерывное по совокупности переменных ограниченное семейство линейных непрерывных операторов с областями определения и значений в U, B — замкнутый (необязательно ограниченный) оператор, удовлетворяющий условию $B^*B - BB^* \geqslant 0$. При этих предположениях доказана единственность решения рассматриваемой задачи, его непрерывная зависимость от правой части $f(t)$. Аналогичные задачи в банаховых и гильбертовых пространствах с начальным условием $u(0) = u^0$ и ядром $A(t,\tau) \equiv A(t-\tau)$ при различных предположениях изучались в работах K. B. Hannsgen [90], R. K. Miller и R. L. Wheeler [98], G. Chen и R. C. Grimmer [78], G. Da Prato и M. Iannelli [81], W. Arendt и H. Kellermann [70].

В статье R. C. Grimmer [87] исследована начальная задача

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int\limits_0^t B(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \geqslant 0, \quad x(0) = x^0 \in X,$$

где X — банахово пространство, $A(t)$, $B(t,s)$ — замкнутые линейные операторы с областями определения, не зависящими от переменных t и s, причем $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ и $D(B) \subseteq D(A)$, функция $f : \mathbb{R}_+ \to X$ сильно непрерывна. Исходная задача сведена к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, решение которого строится с помощью операторной резольвенты. В качестве приложения полученных результатов проведено исследование системы интегро-дифференциальных уравнений сверточного типа в частных производных, которые в современной литературе [19], [102] носят названия уравнений Гуртина–Пипкина по фамилиям авторов статьи [89]. Аналогичная задача изучалась в гильбертовом пространстве G. Da Prato и M. Iannelli [80], когда $A(t)$ при каждом значении $t \geqslant 0$ является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы операторов, а интегральная часть имеет специальный сверточный вид. На основе "энергетического равенства" доказаны существование и единственность сильного и классического решений соответствующей начальной задачи. В работах M. G. Crandall, S.-O. Londen и J. A. Nohel [79], а также V. Barbu и M. A. Malik [73] исследован специальный класс интегро-дифференциальных уравнений вида

$$u'(t) + Bu(t) + \int\limits_0^t a(t-s)Au(s)ds + \int\limits_0^t b(t-s)u(s)ds = f(t), \quad t \geqslant 0,$$

где A — линейный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, B — нелинейный монотонный оператор, $a(t)$ и $b(t)$ — скалярные функции. Получены условия существования и единственности решения начальной задачи, изучено его поведение при $t \to +\infty$. Используется идея редукции к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Абстрактные результаты иллюстрируются примерами начально-краевых задач о тепловых потоках наследственного типа. Задача Коши вида

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + f(t), \text{ для } t \in [0,T], \\ u(0) = x \text{ и } u'(0) = y, \end{cases}$$

с замкнутым линейным оператором A, область определения которого не обязательно плотна в банаховом пространстве X, и сильно измеримым семейством ограниченных операторов $B(t)$, действующих из $\mathcal{D}(A)$ в X, изучена в работах H. Oka [100], [101]. Получены достаточные условия существования и единственности слабого и классического решений задачи на основе ее редукции к сверточному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. С помощью доказанных теорем решены две содержательные начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

В серии работ Н. Д. Копачевского [2], [35], [36], [38] объектами исследований выступают интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра

$$\frac{du}{dt} = A_0 u(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds + f(t), \quad u(0) = u^0,$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0 u(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds = f(t), \quad u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1,$$

в произвольном банаховом пространстве $\mathcal{E}$, где $A_0, A_1, \ldots, A_m$ — линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, действующие в $\mathcal{E}$, $G_k(t,s)$ — оператор-функции со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Также в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассматривается начальная задача

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds = f(t),$$
$$u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1,$$

с самосопряженными операторами B, F и G. Оператор A, называемый оператором кинетической энергии, предполагается тождественным, т. е. соответствующее интегро-дифференциальное уравнение является разрешенным относительно старшей производной. Средствами теории полугрупп операторов, операторных косинус- и синус-функций и теории операторных $(M-N)$-функций, примененных к соответствующим "укороченным" уравнениям (все $G_k(t,s) \equiv 0$), исходные начальные задачи сводятся к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода, а затем при определенных условиях доказывается существование и единственность их решений. Абстрактные результаты иллюстрируются на многочисленных примерах задач гидродинамики.

В работах коллектива авторов под руководством профессора В. В. Власова [13], [14], [16], [18], [19], рассматриваются абстрактные интегро-дифференциальные уравнения гиперболического типа, естественно возникающие при изучении математической модели распространения тепла в средах с памятью. При этом учитывается, что скорость распространения тепла конечна. В приведённых работах доказана корректная разрешимость начальных задач

$$\frac{dv}{dt} + \int\limits_0^t K(t-s)A^2 v(s)ds = q(t), \quad t > 0, \quad v(+0) = \psi_0,$$

и

$$\frac{d^2u}{dt^2} + K(0)A^2\frac{du}{dt} + \int\limits_0^t K'(t-s)A^2 u(s)ds = f(t),$$
$$t > 0, \quad u(+0) = \varphi_0; \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1.$$

в пространстве типа Соболева $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^n)$ с весом. Здесь A — самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и имеющий компактный обратный, скалярная функция $K(t)$ представляет собой ряд из экспонент, сходящийся при $t = 0$. Исследован спектр соответствующих интегро-дифференциальных операторов Вольтерра сверточного типа [11], [111]. На этой основе изучен вопрос существования, единственности и гладкости решений начально-краевых задач для уравнений Гуртина-Пипкина [89], которые отражают релаксационный закон распространения волн и являются реализациями рассматриваемых начальных задач. Главным отличием полученных результатов о разрешимости от уже известных результатов (см., например, [48], [82], [102]) состоит в том, что в работах В. В. Власова допускается наличие особенностей (интегрируемых) у ядер вольтерровых интегральных операторов. Кроме уравнений Гуртина-Пипкина, в работах того же коллектива авторов [15], [17] исследуются абстрактные интегро-дифференциальные уравнения со слагаемыми, соответствующими мгновенному трению Кельвина-Фойгхта. Для этих уравнений получены результаты о корректной разрешимости в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси.

Обратные задачи для абстрактных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра типа свертки исследовались в совместных работах профессоров А. И. Прилепко и A. Lorenzi [95], [96]. Задачи, называемые задачами "прогноз-управление", а дополнительные условия — данными переопределения или наблюдения, исследуются в работах [53], [66], [104]. Другим обратным задачам — задачам восстановления памяти (функциональной части ядра сверточного линейного интегро-дифференциального уравнения) посвящены работы А. Л. Бухгейма, Н. И. Калиткиной, В. Б. Кардакова [6], [7], [8].

Исследованию интегро-дифференциальных уравнений с нелокальными условиями посвящены работы международного коллектива авторов, возглавляемого профессором K. Balachandran [72]. Последние достижения коллектива в исследовании абстрактных интегро-дифференциальных уравнений см. в [106].

Почти во всех приведенных работах полученные результаты иллюстрируются примерами содержательных начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений, которые являются реализациями исходных абстрактных объектов. Однако в ряде случаев исследование таких начально-краевых задач осуществляется методами, не использующими редукцию к абстрактным операторным аналогам. Сюда следует отнести работы M. E. Gurtin и A. C. Pipkin [89], M. E. Lord [94], А. С. Калашников [34], F. Bloom [75], А. А. Ильюшин и Б. Е. Победря [33], в том числе по численным методам [50] и многие другие.

Из последних публикаций стоит отметить работы V. Poblete (2007) — рассматриваются задачи с одним операторным коэффициентом и интегрированием от $-\infty$ до t; R. Alikhani, F. Bahrami, A. Jabbari (2012) — изучаются общие нелинейные проблемы для функций из $\mathbb{R}^n$; S. Trostorff (2014) — исследуются уравнения первого и второго порядков специального вида с $\int_{-\infty}^{t}(\ldots)ds$; V. Vlasov, N. Rautian (2014) — рассматривается уравнение типа Гуртина-Пипкина с одним операторным коэффициентом; T. Diagana (2014) — изучаются задачи с двумя сравнимыми операторными коэффициентами и интегрированием от $-\infty$ до t.

В упоминаемых до сих пор работах отечественных и зарубежных авторов рассматривались абстрактные интегро-дифференциальные уравнения, когда операторный коэффициент при старшей производной дифференциальной части является тождественным оператором. Для исследования таких случаев доступны методы теории полугрупп операторов, теории интегральных уравнений, спектрального анализа линейных операторов и многие другие. При этом существование и единственность решений начальных задач в разных классах функций имеет место при очень естественных ограничениях на исходные данные: начальные условия Коши, свободную функцию, операторные коэффициенты и ядра интегральной части. Ситуация существенно усложняется, когда в главной части абстрактного уравнения появляется необратимый оператор, и оно становится неразрешенным относительно старшей производной. Тогда для однозначной разрешимости начальных задач требуются более жесткие ограничения. Интерес к таким дифференциально-операторным уравнениям, называемыми вырожденными (в иной терминологии сингулярными или соболевского типа) проявляется с середины прошлого века, им посвящена обширная библиография. Наиболее известными в этой области являются работы Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, А. В. Синицына и М. В. Фалалеева [107], A. Favini и A. Yagi [86], И. С. Егорова, С. Т. Пяткова и С. В. Попова [26], H. O. Fattorini [85], Г. В. Демиденко и С. В. Успенского [24], Ю. М. Далецкого и М. Г. Крейна [23] и др. Во всех приведенных работах большое внимание уделяется сингулярным дифференциальным уравнениям и существенно меньшее интегро-дифференциальным.

Наиболее близкими к настоящей работе, по мнению автора, являются статьи Д. А. Закоры, результаты которых иллюстрируются примерами содержательных начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений. Так, в [118] исследована эволюционная задача о малых движениях вязкой вращающейся релаксирующей жидкости в ограниченной области. Задача приведена к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве. А в серии работ [27]-[32], [117], [119] исследуются эволюционные и спектральные гидродинамические задачи о малых движениях и нормальных колебаниях жидкостей в ограниченной области. В каждой из работ с использованием операторных методов от начально-краевой задачи, отвечающей исследуемой модели, осуществлен переход к интегро-дифференциальному уравнению второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. На основе этого уравнения доказана теорема об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи или же, если речь идёт о спектральной задаче, получены свойства спектра и установлена базисность системы собственных элементов.

ГЛАВА 2

Эволюционная и спектральная задачи, обобщающие проблему малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в сосуде.

2.0 Введение. Предварительные сведения

В работе [4] исследована в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задача Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка вида

$$\frac{du}{dt} + Fu + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} C_k u(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{2.1}$$

где $u(t)$ — искомая функция со значениями в $\mathcal{H}$, γ_k — положительные постоянные, $0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m < \infty$, $f(t)$ — заданная функция со значениями в $\mathcal{H}$, $u^0 \in \mathcal{H}$, операторы F и C_k — неограниченные самосопряжённые положительно определённые операторы с областями определения $\mathcal{D}(C_k)$, $k = \overline{1, m}$, такими, что $\mathcal{D}(C_k) = \mathcal{D}(F)$, $0 < C_k^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, $k = \overline{1, m}$, а также ассоциированная с (2.1) спектральная задача.

Эта задача принадлежит классу интегро-дифференциальных уравнений, где под знаком интеграла стоят неограниченные операторы такой же силы, как основной оператор дифференциального выражения.

Как указано в [4], задача (2.1) порождена проблемой малых движений вязкоупругой жидкости в ограниченной области.

Приведём некоторые определения и факты из [4].

Определение 2.0.1. Функция $u(t) : [0, T] \to \mathcal{H}$ называется сильным решением задачи (2.1) на отрезке $[0, T]$, если она обладает следующими свойствами:

а) $u(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H})$, т.е. сильно непрерывно дифференцируема в $\mathcal{H}$;

б) $u(t) \in \mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(C_k)$, $k = \overline{1,m}$, $Fu(t)$, $C_k u(t) \in C([0,T];\mathcal{H})$, $k = \overline{1,m}$, при любом $t \in [0,T]$;

в) $u(t)$ обращает уравнение (2.1) в тождество, $u(0) = u^0$. $\square$

Теорема 2.0.2. *Пусть в задаче* (2.1) *выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(F), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}).$$

Тогда эта задача имеет (единственное) сильное решение на $[0,T]$. $\square$

В данной главе будут рассматриваться обобщения задачи (2.1) на случай, когда при производной стоит не единичный оператор, а положительный и, в частности, компактный оператор.

Необходимо заметить, что близкая тематика широко рассматривается в работах Власова В.В. с соавторами [13]-[19].

2.1 Гидродинамическое приложение.

Важным частным случаем задачи (2.1) является задача о малых движениях вязкоупругой жидкости (см., например, [67]), заполняющей произвольную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Эта задача состоит в нахождении поля скоростей $\vec{u}(t,x)$ и поля давлений $p(t,x)$ из системы уравнений, краевого и начального условий:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu I_0(t)(\triangle \vec{u}) + \vec{f}, \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega),$$

$$(I_0(t)\vec{v})(t,x) := \vec{v}(t,x) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int\limits_0^t e^{-\gamma_j(t-s)}\vec{v}(s,x)ds, \tag{2.2}$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S = \partial\Omega), \quad \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x),$$

где $\nu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, $\rho > 0$ — плотность жидкости, $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1,m}$, $0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m$, а $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ — плотность малого поля массовых сил, наложенного на гравитационное поле.

Для перехода от (2.2) к задаче вида (2.1) будем считать функции $\vec{u}(t,x)$ и $\nabla p(t,x)$ при каждом t элементами гильбертова пространства вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v})_\Omega := \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{3} \vec{u}_k(x)\overline{\vec{v}_k(x)}d\Omega.$$

Воспользуемся ортогональным разложением

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega), \quad \vec{G}(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) : \vec{v} = \nabla p\},$$

$$\vec{J}_0(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \mathrm{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad u_n := \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega)\},$$

где $\vec{n}$ — вектор единичной нормали к $\partial\Omega$, а $\mathrm{div}\vec{u}$ и u_n понимаются как обобщённые функции конечного порядка (см., например, [38]). В силу (2.2) имеем $\vec{u}(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega)$, $\nabla p(t,x) \in \vec{G}(\Omega)$.

Пусть P_0 — ортопроектор на $\vec{J}_0(\Omega)$, а P_G — на $\vec{G}(\Omega)$, $P_0 + P_G = I$. Считая функции $\vec{u}(t,x)$ и $\nabla p(t,x)$ классическим решением задачи (2.2), получим

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \nu I_0(t)(F\vec{u}) = \vec{f}_0(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \tag{2.3}$$

$$F\vec{u} := -P_0(\triangle\vec{u}), \quad \vec{f}_0 := P_0\vec{f}, \tag{2.4}$$

$$\rho^{-1}\nabla p = \nu I_0(t)P_G(\triangle\vec{u}) + P_G\vec{f}. \tag{2.5}$$

Формула (2.5) показывает, что поле давлений $\nabla p(t,x)$ находится непосредственно, если известно поле скоростей $\vec{u}(t,x)$ как функция t со значениями в $\vec{H}_0^2(\Omega) \cap \vec{J}_0(\Omega)$, где $\vec{H}_0^2(\Omega)$ — пространство вектор-функций с компонентами из $H_0^2(\Omega)$. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением задачи (2.3), где $\vec{u} = \vec{u}(t)$ — функция со значениями в $\vec{J}_0(\Omega)$, а оператор F — хорошо известный в задачах гидродинамики оператор Стокса (см. [41],[46]).

Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω является дважды непрерывно дифференцируемой ($\partial\Omega \in C^2$). Тогда, как известно из [46],

$$\mathcal{D}(F) = \vec{J}_0^2(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega) : \triangle\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } \partial\Omega)\}. \tag{2.6}$$

Отметим также, что оператор F положительно определён в $\vec{J}_0(\Omega)$, причём обратный оператор компактен: $0 < F^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$. Собственные значения $\{\lambda_j(F)\}_{j=1}^\infty$ оператора F образуют дискретный спектр и имеют асимптотическое поведение (см. [97]):

$$\lambda_j(F) = \left(\frac{\mathrm{mes}\Omega}{3\pi^2}\right)^{-2/3} j^{2/3}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty). \tag{2.7}$$

Очевидно, что уравнение (2.3) является частным случаем задачи (2.1) в пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega)$, при этом F следует заменить на νF, а C_k — на $\nu\alpha_k F$, $k = \overline{1,m}$, где оператор F — оператор Стокса (2.4), (2.6).

Замечание 2.1.1. Стоит заметить, что в задаче (2.1) роль оператора потенциальной энергии выполняет коэффициент при производной (единичный оператор I). В некоторых задачах этот оператор может быть не единичным, а, например, положительным компактным. □

2.2 Эволюционная задача для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения

$$A\frac{du}{dt} + Fu + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}C_k u(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0. \tag{2.8}$$

Здесь A — положительный самосопряжённый оператор, $u = u(t)$ — искомая функция со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) \subset \mathcal{H}$, γ_k — положительные постоянные, $0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m < \infty$, $f(t)$ — заданная функция со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$, а F — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор. Через C_k, $k = \overline{1,m}$, обозначены неограниченные самосопряженные положительные операторы с областями определения $\mathcal{D}(C_k)$ такими, что

$$\mathcal{D}(C_k) \supset \mathcal{D}(F), \quad k = \overline{1,m}. \tag{2.9}$$

Замечание 2.2.1. Будем считать, что оператор A действует не в $\mathcal{H}$, а в шкале пространств E^α, построенной по A^{-1}, тогда будем иметь

$$E^0 = \mathcal{H}, \quad \mathcal{D}(A^{-1}) = E^1, \quad \mathcal{D}(A^{-1/2}) = E^{1/2},$$

причём $A^{-1/2} : E^{\alpha/2} \to E^{(\alpha-1)/2}$ — ограниченный оператор. □

Дадим определение сильного решения задачи (2.8) со значениями в пространстве $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Определение 2.2.2. Сильным решением интегро-дифференциального уравнения (2.8) на отрезке $[0, T]$ называется такая функция $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$, для которой выполнены следующие условия:

а) $u(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}F))$;

б) все слагаемые в (2.8) непрерывны по t и принимают значения в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) \subset \mathcal{H}$, т.е. принадлежат пространству $C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

в) при любом $t \in [0, T]$ справедливо уравнение (2.8);

г) выполнено начальное условие $u(0) = u^0$. □

С учётом замечания 2.2.1 первое слагаемое в (2.8) можно переписать в эквивалентных формах:

$$A\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(Au) = A^{1/2}\frac{d}{dt}(A^{1/2}u) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Замечание 2.2.3. Для существования сильного решения $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ необходимо, чтобы выполнялись условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})).$$ □

Вид уравнения (2.8) и свойства его операторных коэффициентов позволяют привести эту проблему к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств.

Будем считать, что задача (2.8) имеет сильное решение со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ на отрезке $[0, T]$, и введём новые искомые функции согласно формулам

$$u_0(t) := u(t), \quad u_k(t) := \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} C_k^{1/2} u(s)ds + u_k(0), \quad k = \overline{1,m}.$$

Для сильного решения со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ функции $u_k(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{du_k}{dt} = C_k^{1/2}u_0(t) - \gamma_k(u_k(t) - u_k(0)), \quad k = \overline{1,m}. \tag{2.10}$$

Вместе с (2.8) уравнения (2.10) приводят к дифференциальному уравнению

$$\mathcal{A}\frac{d\widetilde{u}}{dt} + \mathcal{F}_0\widetilde{u} = \widetilde{f}(t), \quad \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}^0, \tag{2.11}$$

в гильбертовом пространстве

$$\widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H}_0 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_1, \quad \mathcal{H}_0 := \mathcal{H}, \quad \widehat{\mathcal{H}}_1 := \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{H}_k, \quad \mathcal{H}_k := \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m}. \quad (2.12)$$

При этом

$$\widetilde{u}(t) := (u_0(t); \widehat{u}_1(t))^\tau, \ \widehat{u}_1(t) := (u_1(t); \ldots; u_m(t))^\tau, \ \widetilde{u}(0) = (u^0; \widehat{u}_1(0))^\tau,$$

$$\widetilde{f}(t) := ((f(t) - \sum_{k=1}^{m} C_k^{1/2} u_k(0)); -\widehat{\gamma}\widehat{u}_1(0))^\tau, \quad \widehat{\gamma} := \mathrm{diag}(\gamma_k I)_{k=1}^m,$$

где символом $(\cdot;\cdot)^\tau$ обозначена операция транспонирования, в данном случае строки.

Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}_0$ в ортогональном разложении (2.12) имеют следующее матричное представление:

$$\mathcal{A} = \mathrm{diag}(A; \widehat{I}_1), \quad \widehat{I}_1 := \mathrm{diag}(\underbrace{I; \ldots; I}_{m \text{ раз}}),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 = (F_{ij})_{i,j=0}^{1}, \quad F_{00} := F, \quad F_{01} := (C_1^{1/2}; \ldots; C_m^{1/2}), \\ F_{10} = -(C_1^{1/2}; \ldots; C_m^{1/2})^\tau, \quad F_{11} := \widehat{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Дальнейшее исследование свойств решений задачи Коши (2.8) для интегро-дифференциального уравнения в пространстве $\mathcal{H}$ и дифференциального уравнения (2.11) в ортогональной сумме пространств $\mathcal{H}^{m+1}$ основано на изучении свойств операторных матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}_0$.

Так, очевидно, что операторная матрица $\mathcal{A}$ является положительным оператором в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Отметим теперь, что операторная матрица $\mathcal{F}_0$ возникла в [4] и обладает свойствами, установленными в леммах 1.2-1.4 и теореме 1.5 этой работы. Потому приведём ниже лишь соответствующие утверждения о свойствах $\mathcal{F}_0$ без их доказательств.

Предварительно напомним следующий факт.

Лемма 2.2.4. *(неравенство Гайнца, см., например, [43, с.254]). Пусть A и B — положительные самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, такие, что $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ и $\|Bu\| \leqslant \|Au\|$ $(u \in \mathcal{D}(A))$. Тогда $\|B^\alpha u\| \leqslant \|A^\alpha u\|$, $0 < \alpha < 1$.* $\square$

В исследуемой задаче в силу условий $\mathcal{D}(C_k) \supset \mathcal{D}(F)$, $k = \overline{1,m}$, имеем соотношения

$$\mathcal{D}(C_k^\alpha) \supset \mathcal{D}(F^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \quad k = \overline{1,m}, \tag{2.14}$$

и найдутся такие положительные константы $b_{k,\alpha}$ что

$$\|C_k^\alpha u\| / \|F^\alpha u\| \leqslant b_{k,\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad k = \overline{1,m}, \quad u \in \mathcal{D}(F^\alpha). \tag{2.15}$$

Неравенства (2.15) и соотношения (2.14) далее будут использованы при $\alpha = 1/2$.

Лемма 2.2.5. *(см. [4, с.9]) Оператор $\mathcal{F}_0$, заданный формулами* (2.13) *на плотном в $\widetilde{\mathcal{H}}$ множестве*

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_0) := \mathcal{D}(F) \oplus \widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2}, \tag{2.16}$$

$$\widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2} := \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{D}(C_k^{1/2}), \quad \mathcal{D}(C_k^{1/2}) \supset \mathcal{D}(F), \quad k = \overline{1,m}, \tag{2.17}$$

является равномерно аккретивным оператором, т.е.

$$\mathrm{Re}\,(\mathcal{F}_0 \widetilde{u}, \widetilde{u})_{\widetilde{\mathcal{H}}} \geqslant c \|\widetilde{u}\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}}, \quad c := \min(\lambda_1(F); \gamma_1) > 0, \tag{2.18}$$

где $\lambda_1(F)$ — нижняя грань самосопряжённого положительно определенного оператора F. (Если $F^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, то $\lambda_1(F)$ — минимальное собственное значение оператора F.) □

Лемма 2.2.6. *(см. [4, с.9]) Оператор $\mathcal{F}_0$ является в существенном максимальным равномерно аккретивным оператором, т.е. замыкание $\mathcal{F} := \overline{\mathcal{F}}_0$ — максимальный равномерно аккретивный оператор.* □

Введём далее по схеме статьи [4] вспомогательные операторы

$$Q_k := C_k^{1/2} F^{-1/2}, \quad \mathcal{D}(Q_k) := \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_0,$$

$$Q_k^+ := F^{-1/2} C_k^{1/2}, \quad \mathcal{D}(Q_k^+) := \mathcal{D}(C_k^{1/2}), \quad k = \overline{1,m},$$

а также операторные столбцы и строки

$$Q_{10} := (Q_1; \ldots; Q_m)^\tau, \quad \mathcal{D}(Q_{10}) = \mathcal{H}_0,$$

$$Q_{01}^+ := (Q_1^+; \ldots; Q_m^+), \quad \mathcal{D}(Q_{01}^+) = \widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2} \subset \widehat{\mathcal{H}}_1.$$

Как показано в [4], с помощью этих операторов можно произвести замыкание оператора $\mathcal{F}_0$.

Лемма 2.2.7. *(см. [4, с.11]) Справедливы соотношения*

$$Q_k^+ = Q_k^*|_{\mathcal{D}(C_k^{1/2})} \quad (k=\overline{1,m}), \quad Q_{01}^+ = Q_{10}^*|_{\widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2}}, \tag{2.19}$$

причём замыкание по непрерывности оператора Q_k^+ совпадает с Q_k^*, а оператора Q_{01}^+ — с Q_{10}^*. □

Следствием приведенной леммы является

Теорема 2.2.8. *(о факторизации операторной матрицы и её замыкании (см. [4, с.11])). Оператор $\mathcal{F}_0$, введённый формулами* (2.13) *на множестве* (2.16)-(2.17)*, допускает следующие факторизации:*

а) в форме Шура-Фробениуса:

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ -Q_{10}F^{-1/2} & \widehat{I}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F_{11}+Q_{10}Q_{01}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & F^{-1/2}Q_{01}^+ \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

б) с симметричным окаймлением:

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} F^{1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & Q_{01}^+ \\ -Q_{10} & F_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

Замыкание $\mathcal{F}$ оператора $\mathcal{F}_0$ допускает представления:

а) в форме Шура-Фробениуса:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ -Q_{10}F^{-1/2} & \widehat{I}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F_{11}+Q_{10}Q_{10}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & F^{-1/2}Q_{10}^* \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

б) с симметричным окаймлением:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F^{1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & Q_{10}^* \\ -Q_{10} & F_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Оператор $\mathcal{F}$ задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \{\widetilde{u} = (u_0; \widehat{u}_1)^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} : \quad (u_0 + F^{-1/2}Q_{10}^*\widehat{u}_1) \in \mathcal{D}(F)\} \tag{2.24}$$

посредством формулы

$$\mathcal{F}\widetilde{u} = \begin{pmatrix} F(u_0 + F^{-1/2}Q_{10}^*\widehat{u}_1) \\ -Q_{10}F^{1/2}u_0 + F_{11}\widehat{u}_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{F}). \tag{2.25}$$

□

Опираясь на приведенные свойства матричного оператора $\mathcal{F}$, перейдём к рассмотрению задачи с замкнутым оператором:

$$\mathcal{A}\frac{d\widetilde{u}}{dt} + \mathcal{F}\widetilde{u} = \widetilde{f}(t), \quad \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}^0. \tag{2.26}$$

Принимая во внимание замечание 2.2.1, перепишем это уравнение в виде

$$\mathcal{A}^{1/2}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{A}^{1/2}\widetilde{u}\right) + \mathcal{F}\widetilde{u} = \widetilde{f}(t), \quad \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}^0,$$

а затем применим к обеим частям уравнения оператор $\mathcal{A}^{-1/2}$ и осуществим замену

$$\mathcal{A}^{1/2}\widetilde{u} = \widetilde{v}.$$

Получим следующую задачу:

$$\frac{d\widetilde{v}}{dt} + \mathcal{F}_{\mathcal{A}}\widetilde{v} = \widehat{f}(t), \quad \widetilde{v}(0) = \widetilde{v}^0, \tag{2.27}$$

где $\widehat{f}(t) = \mathcal{A}^{-1/2}\widetilde{f}(t) = (A^{-1/2}(f(t) - \sum_{k=1}^{m} C_k u_k(0)); -\widehat{\gamma}\widehat{u}_1(0))^{\tau}$,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}{:=}\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{F}\mathcal{A}^{-1/2},\ \mathcal{D}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}){:=}\mathcal{R}(\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}^{1/2}),\ \widetilde{v}^0{:=}(A^{1/2}u^0; \widehat{u}_1(0))^{\tau}. \tag{2.28}$$

Область значений замкнутого оператора $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ совпадает со всем пространством $\widetilde{\mathcal{H}}$. Действительно, $\mathcal{R}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}^{1/2}) = \widetilde{\mathcal{H}}$. Учитывая, что $\mathcal{A}^{-1/2}\widetilde{v} = (A^{-1/2}v_0; \widehat{v}_1)^{\tau}$, убеждаемся, что оператор $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ действует следующим образом:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}\widetilde{v} = \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2}(v_0 + A^{1/2}F^{-1/2}Q_{10}^*\widehat{v}_1) \\ -Q_{10}F^{1/2}A^{-1/2}v_0 + F_{11}\widehat{v}_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}),$$

на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}) = \{\widetilde{v} = (v_0; \widehat{v}_1)^{\tau} \in \widetilde{\mathcal{H}} :\ (v_0 + A^{1/2}F^{-1/2}Q_{10}^*\widehat{v}_1) \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}),$$

$$v_0 \in \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2})\}.$$

Для $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ сохраняется условие равномерной аккретивности. Из приведенных рассуждений следует, что оператор $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ является максимальным равномерно аккретивным, то есть $-\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Тогда по теореме Филлипса (см. [42, с.166]) задача Коши (2.27) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, если выполнены следующие условия

$$\widetilde{v}^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}), \quad \widehat{f}(t) \in C^1([0,T];\widetilde{\mathcal{H}}). \tag{2.29}$$

Из условий (2.29) получим соответствующие условия на начальные данные исходной задачи (2.8).

Так, из принадлежности элемента $\widetilde{v}^0$ области определения оператора $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ следует, что

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F) \subset \mathcal{D}(F^{1/2}), \ \ \widehat{u}_1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}C_{10}), \ \ C_{10} := (C_1^{1/2}, \ldots, C_m^{1/2}).$$

Аналогично получим условие для $f(t)$:

$$f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Сформулируем теперь теорему существования и единственности сильного решения со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ задачи (2.8).

Теорема 2.2.9. *Пусть выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})); \tag{2.30}$$

тогда каждая из задач (2.8), (2.11),(2.26),(2.27) *имеет единственное сильное решение со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ *(для задач* (2.11),(2.26) *решение в* $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$*, а для* (2.27) *— в* $\widetilde{\mathcal{H}}$*) на* $[0;T]$*, и из существования такого решения любой из них следует существование решения остальных.*

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства теоремы 2.0.2. Новым в доказательстве является факт установления соответствия между задачами (2.27) и (2.26). Убедимся в его справедливости. Так, если выполнены условия (2.30), то для задачи (2.27) выполнены условия (2.29) и потому, как уже упоминалось выше, задача (2.27) имеет на отрезке $[0,T]$ сильное решение $\widetilde{v}(t)$ со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}$. Как показывают построения, связанные с переходом от (2.26) к (2.27), задача (2.26) также имеет единственное сильное решение $\widetilde{u}(t) = \mathcal{A}^{-1/2}\widetilde{v}(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$ на отрезке $[0,T]$, причём для этой задачи выполнены условия

$$\widetilde{u}^0 = (A^{-1/2}v_0; \widehat{v}_1(0))^{\tau} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{F}), \quad \widetilde{f}(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})).$$

При этих же условиях из существования сильного решения со значениями в $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$ задачи (2.26) следует существование сильного решения задачи (2.27). $\square$

2.2.1 Нормальные движения динамической системы. Назовём нормальными колебаниями решения однородной задачи (2.27), зависящие от t по закону

$$\widetilde{v}(t) = \widetilde{v}e^{-\lambda t}, \quad \widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{H}}. \tag{2.31}$$

Подставляя функцию (2.31) в однородное уравнение (2.27), для определения амплитудных элементов $\widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ и собственных значений $\lambda \in \mathbb{C}$ приходим к спектральной задаче

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}\widetilde{v} = \lambda\widetilde{v}, \quad \widetilde{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}), \tag{2.32}$$

где $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ — операторная матрица, определяемая формулой (2.28). Далее задачу (2.32) будем называть задачей, ассоциированной с исходной эволюционной задачей (2.8).

Выделим два очевидных свойства решений задачи (2.32).

1°. Спектр задачи (2.32) расположен в полуплоскости

$$\mathrm{Re}\lambda \geqslant \widetilde{c}.$$

2°. Оператор $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ имеет ограниченный обратный оператор ${\mathcal{F}_{\mathcal{A}}}^{-1}$, для которого

$$||{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}}^{-1}|| \leqslant \widetilde{c}^{\,-1}.$$

Здесь $\widetilde{c} > 0$ — постоянная из условия равномерной аккретивности оператора $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$.

Для дальнейшего исследования полезно осуществить переход от задачи (2.32) к равносильной задаче

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{A}})^{-1}\widetilde{v} = \mu\widetilde{v}, \quad \mu := \lambda^{-1}, \quad \widetilde{v} = (v_0; \widehat{v}_1)^{\tau} \in \widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_1,$$

с ограниченным оператором

$${\mathcal{F}_{\mathcal{A}}}^{-1} := \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{11}:=A^{1/2}F^{-1/2}(I_0+Q_{10}^*F_{11}^{-1}Q_{10})^{-1}F^{-1/2}A^{1/2},\\
&\mathcal{F}_{21}:=(Q_{10}Q_{10}^*+F_{11})^{-1}Q_{10}F^{-1/2}A^{1/2},\\
&\mathcal{F}_{12}:=-A^{1/2}F^{-1/2}Q_{10}^*(Q_{10}Q_{10}^*+F_{11})^{-1},\\
&\mathcal{F}_{22}:=(Q_{10}Q_{10}^*+F_{11})^{-1}.
\end{aligned}$$

В работе [4] (т.е. при $A = I$) была исследована спектральная задача $\mathcal{F}\widetilde{u} = \lambda\widetilde{u}$, $\widetilde{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$, ассоциированная с задачей (2.1). При этом были использованы методы теории операторов, самосопряжённых в пространстве с индефинитной метрикой (см. [1]). Подход, развитый в [4], можно применить и для задачи (2.32). Поэтому далее сформулируем без доказательства результаты рассмотрения задачи (2.32), полученные на основе этого подхода.

Теорема 2.2.10. *Операторные матрицы $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}^{-1}$ являются $\mathcal{J}$-самосопряжёнными операторами с оператором канонической симметрии*

$$\mathcal{J} := (I_0, -\widehat{I}_1).$$

Спектр задачи (2.32) положителен, за исключением не более конечного числа (с учётом кратности) невещественных собственных значений. □

Теорема 2.2.11. *Пусть $B := F_{11} + Q_{10}Q_{10}^*$. Тогда существенный спектр $\sigma_{ess}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}})$ оператора $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ совпадает с множеством $\{\infty\} \cup \sigma_{ess}(B)$.* □

Дальнейшим результатам предпошлём следующее

Определение 2.2.12. Базис $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ называется базисом Рисса, если $\psi_n = T\varphi_n$, где $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, а T, $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Базис Рисса называется p-базисом (см. [52]), если $T = I + T_1$, $T_1 \in \mathfrak{S}_p$. □

Теорема 2.2.13. *Задача (2.32) имеет счётное множество положительных собственных значений $\{\lambda_n^{(\infty)}\}_{n=1}^{\infty}$ с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$ и собственными элементами $\{\widetilde{u}_n^{(\infty)}\}_{n=1}^{\infty}$, $\widetilde{u}_n^{(\infty)} = (u_{0n}^{(\infty)}; \widehat{u}_{1n}^{(\infty)})^{\tau} \in \widetilde{\mathcal{H}}$, проекции $\{u_{0n}^{(\infty)}\}_{n=1}^{\infty}$ которых на $\mathcal{H}$ образуют базис Рисса с конечным дефектом в пространстве $E^{-1/2}$. Если выполнено условие*

$$F^{-1} \in \mathfrak{S}_{p_0}, \tag{2.33}$$

то указанный базис Рисса является p_0-базисом (с конечным дефектом) в $E^{-1/2}$.

Здесь и далее пространство $E^{-1/2} := A^{-1/2}\mathcal{H}$ принадлежит шкале пространств E^{α} (см. замечание 2.2.1). $\square$

Замечание 2.2.14. Отметим, что в теореме 2.2.13 для задачи (2.32) условие (2.33) можно заменить на одно из условий

$$A \in \mathfrak{S}_{p_0}$$

или

$$A \in \mathfrak{S}_{p_A}, \quad F^{-1} \in \mathfrak{S}_{p_F}, \quad p_0^{-1} = p_A^{-1} + p_F^{-1}. \qquad \square$$

Запишем спектральную задачу (2.32), т.е.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}\widetilde{v} = \lambda\widetilde{v}, \quad \widetilde{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_{\mathcal{A}}), \tag{2.34}$$

в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} A^{-1/2}FA^{-1/2}(v_0 + A^{1/2}F^{-1/2}Q_{10}^{*}\widehat{v}_1) = \lambda v_0, \\ -Q_{10}F^{1/2}A^{-1/2}v_0 + F_{11}\widehat{v}_1 = \lambda\widehat{v}_1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} A^{-1/2}FA^{-1/2}(v_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} A^{1/2}F^{-1/2}Q_k^{*}v_k) = \lambda v_0, \\ -Q_kF^{1/2}A^{-1/2}v_0 + \gamma_k v_k = \lambda v_k, \quad k = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Отсюда

$$v_k = (\gamma_k - \lambda)^{-1}Q_kF^{1/2}A^{-1/2}v_0, \quad \lambda \neq \gamma_k, \quad k = \overline{1,m}. \tag{2.36}$$

Подставляя (2.36) в первое соотношение системы (2.35), получим вместо (2.34) спектральную задачу для операторного пучка:

$$L(\lambda)v_0 := \left(I - \lambda A^{1/2}F^{-1}A^{1/2} + \sum_{k=1}^{m}(\gamma_k - \lambda)^{-1}A^{1/2}F^{-1/2}Q_k^{*}Q_kF^{1/2}A^{-1/2}\right)v_0 = 0. \tag{2.37}$$

Таким образом, исследование спектральной задачи (2.34), ассоциированной с эволюционной задачей (2.27), приводит к задаче (2.37) о спектре пучка $L(\lambda)$, связанного с исходной задачей (2.8).

Задача будет изучена ниже в п.4.4.1.

2.3 Вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешённые относительно производной.

2.3.1 Уравнения с диссипацией и подкачкой энергии.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения вида

$$A\frac{du}{dt}+Fu+\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}Cu(s)ds-\int\limits_0^t e^{-\rho(t-s)}Vu(s)ds = f(t),\ u(0)=u^0, \quad (2.38)$$

$$0<A=A^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad F=F^*\gg 0, \quad C=C^*>0, \quad V=V^*>0, \quad (2.39)$$

$$\mathcal{D}(F)\subset\mathcal{D}(C), \quad \mathcal{D}(F)\subset\mathcal{D}(V), \quad \gamma>0, \quad \rho>0. \quad (2.40)$$

Первое интегральное слагаемое здесь соответствует диссипации, а второе — подкачке энергии.

Эту задачу для интегро-дифференциального уравнения можно привести к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств по схеме, использованной в пункте 2.2

Будем считать, что задача (2.38) имеет на отрезке $[0,T]$ сильное решение со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ (см. определение 3.1.1). Введём новые неизвестные функции согласно формулам

$$v(t):=\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}C^{1/2}u(s)ds+v(0),\ w(t):=\int\limits_0^t e^{-\rho(t-s)}V^{1/2}u(s)ds+w(0). \quad (2.41)$$

Если $u=u(t)$ сильное решение задачи (2.38), то $v(t)$ и $w(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{dv}{dt}=C^{1/2}u-\gamma(v-v(0)), \quad \frac{dw}{dt}=V^{1/2}u-\rho(w-w(0)).$$

С учётом (2.41) приходим взамен (2.38) к задаче Коши

$$\mathcal{A}\frac{dy}{dt}+\mathcal{F}_0 y=f_0(t), \quad y(0)=y^0, \quad (2.42)$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^3 := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. При этом $y := (u; v; w)^\tau$, $y^0 := (u^0; v(0); w(0))^\tau$,

$$f_0(t) := (f(t) - C^{1/2}v(0) + V^{1/2}w(0); \gamma v(0); \rho w(0))^\tau.$$

Здесь операторная матрица $\mathcal{A} := \mathrm{diag}(A; I; I)$ положительна.

Что касается операторной матрицы

$$\mathcal{F}_0 := \begin{pmatrix} F & C^{1/2} & -V^{1/2} \\ -C^{1/2} & \gamma I & 0 \\ -V^{1/2} & 0 & \rho I \end{pmatrix},$$

то она задана на плотной в ортогональной сумме гильбертовых пространств $\mathcal{H}^3$ области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_0) := \mathcal{D}(F) \oplus \mathcal{D}(C^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(V^{1/2}) \subset \mathcal{H}^3 \tag{2.43}$$

и является, вообще говоря, неограниченным оператором в $\mathcal{H}^3$. Отметим ещё, что оператор $\mathcal{F}_0$ определён корректно на $\mathcal{D}(\mathcal{F}_0)$, так как из (2.40) следует, что

$$\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(C) \subset \mathcal{D}(C^{1/2}), \quad \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(V) \subset \mathcal{D}(V^{1/2}), \quad \overline{\mathcal{D}(F)} = \mathcal{H},$$

и поэтому $\mathcal{F}_0 y \in \mathcal{H}^3$ при любом $y \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_0)$.

Перейдём к изучению свойств операторной матрицы $\mathcal{F}_0$.

Лемма 2.3.1. *Существует такая константа $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, что*

$$\mathrm{Re}\,(\mathcal{F}_0 y, y) \geqslant \alpha_0 ||y||^2, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_0). \tag{2.44}$$

Доказательство. Действительно,

$$(\mathcal{F}_0 y, y) = ||F^{1/2}u||^2 + \gamma||v||^2 + \rho||w||^2 - 2i\mathrm{Im}(C^{1/2}u, v) - 2\mathrm{Re}(V^{1/2}u, w).$$

Учитывая (при любом $\varepsilon > 0$) оценку

$$|2\mathrm{Re}(V^{1/2}u, w)| \leqslant 2||V^{1/2}u|| \cdot ||w|| \leqslant \varepsilon||V^{1/2}u||^2 + \varepsilon^{-1}||w||^2,$$

получим

$$\mathrm{Re}(\mathcal{F}_0 y, y) \geqslant ||F^{1/2}u||^2 - \varepsilon||V^{1/2}u||^2 + \gamma||v||^2 + (\rho - \varepsilon^{-1})||w||^2.$$

Далее, принимая во внимание (2.40), используя неравенство Гайнца (лемма 2.2.4) и свойство положительной определённости оператора F (см. (2.39)), имеем оценки

$$||V^{1/2}u||^2 \leqslant b||F^{1/2}u||^2,\ b \geqslant 0, \quad ||F^{1/2}u||^2 \geqslant \beta||u||^2,\ \beta > 0.$$

Окончательно для $\mathrm{Re}(\mathcal{F}_0 y, y)$ получаем

$$\mathrm{Re}(\mathcal{F}_0 y, y) \geqslant \min\left\{(1-\varepsilon b)\beta, \gamma, \rho - \varepsilon^{-1}\right\}||y||^2.$$

Здесь при выборе ε взято условие $(1-\varepsilon b) \geqslant 0$, и тогда в качестве α_0 в (2.44) можно взять $\alpha_0 := \min\left\{(1-\varepsilon b)\beta, \gamma, \rho - \varepsilon^{-1} : (1-\varepsilon b) \geqslant 0\right\}$. □

Учитывая неравенство (2.44), осуществим в (2.42) замену (сдвижку на $\alpha > |\alpha_0|$, поскольку α_0 может быть неположительным):

$$y(t) = e^{\alpha t} z(t).$$

Тогда вместо (2.42) приходим к задаче

$$\mathcal{A}\frac{dz}{dt} + \mathcal{F}_\alpha z = g(t), \quad z(0) = z^0, \tag{2.45}$$

где

$$\mathcal{F}_\alpha := \mathcal{F}_0 + \alpha\mathcal{A},\ \ g(t) = e^{-\alpha t} f_0(t),\ \ z^0 = y^0,\ \ z(t) = e^{-\alpha t}(u; v; w)^\tau.$$

Действуя далее по схеме пункта 2.2, введём вспомогательные операторы

$$Q_C := C^{1/2}F^{-1/2},\ \mathcal{D}(Q_C) := \mathcal{H}, \quad Q_C^+ := F^{-1/2}C^{1/2},\ \mathcal{D}(Q_C^+) := \mathcal{D}(C^{1/2}), \tag{2.46}$$

$$Q_V := V^{1/2}F^{-1/2},\ \mathcal{D}(Q_V) := \mathcal{H}, \quad Q_V^+ := F^{-1/2}V^{1/2},\ \mathcal{D}(Q_V^+) := \mathcal{D}(V^{1/2}). \tag{2.47}$$

Лемма 2.3.2. *Операторы Q_C, Q_C^+, Q_V и Q_V^+ обладают свойствами*

$$Q_C^+ = Q_C^*|_{\mathcal{D}(C^{1/2})}, \quad \overline{Q_C^+} = Q_C^*, \qquad Q_V^+ = Q_V^*|_{\mathcal{D}(V^{1/2})}, \quad \overline{Q_V^+} = Q_V^*.$$

Доказательство. Оно такое же, как в лемме 2.2.7 пункта 2.2. □

Теорема 2.3.3. *Оператор $\mathcal{F}_\alpha$ допускает факторизацию с симметричным окаймлением*

$$\mathcal{F}_\alpha = \begin{pmatrix} F^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + \alpha F^{-1/2}AF^{-1/2} & Q_C^+ & -Q_V^+ \\ -Q_C & (\alpha+\gamma)I & 0 \\ -Q_V & 0 & (\alpha+\rho)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Замыкание $\mathcal{F}$ оператора $\mathcal{F}_\alpha$ допускает представление в форме

$$\mathcal{F}=\begin{pmatrix} F^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I+\alpha F^{-1/2}AF^{-1/2} & Q_C^* & -Q_V^* \\ -Q_C & (\alpha+\gamma)I & 0 \\ -Q_V & 0 & (\alpha+\rho)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

Оператор $\mathcal{F}$ задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \left\{(u;v;w)^\tau \in \mathcal{H}^3 : \quad u,\ (F^{1/2}u + Q_C^*v - Q_V^*w) \in \mathcal{D}(F^{1/2})\right\} \tag{2.49}$$

посредством формулы

$$\mathcal{F}z = \begin{pmatrix} F^{1/2}(F^{1/2}u + Q_C^*v - Q_V^*w) + \alpha Au \\ -Q_C F^{1/2}u + (\alpha+\gamma)v \\ -Q_V F^{1/2}u + (\alpha+\rho)w \end{pmatrix}, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{F}). \quad \square \tag{2.50}$$

Замечание 2.3.4. Доказательство теоремы 2.3.3 проводится так же, как доказательство теоремы 2.2.8, и потому здесь не приводится. $\square$

Таким образом, оператор $\mathcal{F}$, представленный в виде (2.48), является максимальным равномерно аккретивным оператором. Можно непосредственно проверить, что он задан на области определения (2.49) и определен формулой (2.50).

Опираясь на установленные свойства матричного оператора $\mathcal{F}$, перейдём к рассмотрению задачи с замкнутым оператором

$$\mathcal{A}\frac{dz}{dt} + \mathcal{F}z = g(t), \quad z(0) = y^0. \tag{2.51}$$

Дальнейшее рассмотрение задачи (2.51) проводится точно так же, как исследование задачи (2.26).

Применяя к обеим частям (2.51) оператор $\mathcal{A}^{-1/2}$ и осуществляя замену $\mathcal{A}^{1/2}z = x$, получим следующую задачу

$$\frac{dx}{dt} + \mathcal{F}_\mathcal{A}x = h(t), \quad x(0) = x^0, \tag{2.52}$$

где

$$h(t) = \mathcal{A}^{-1/2}g(t), \quad x^0 = \mathcal{A}^{1/2}z^0, \quad x(t) = (A^{1/2}u;v;w)^\tau,$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_\mathcal{A}) := \left\{(u;v;w)^\tau \in \mathcal{H}^3 : u,\ (F^{1/2}A^{-1/2}u + Q_C^*v - Q_V^*w) \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F^{1/2})\right\} \tag{2.53}$$

Отметим, что для оператора $\mathcal{F}_\mathcal{A}$ выполнено неравенство равномерной аккретивности:

$$\mathrm{Re}(\mathcal{F}_\mathcal{A} z, z) \geqslant \widetilde{\alpha}||z||^2, \tag{2.54}$$

где $\widetilde{\alpha} := \alpha + \alpha_0 > 0$ в силу выбора ε и α, а значит $-\mathcal{F}_\mathcal{A}$ является генератором C_0-полугруппы. Тогда по теореме Филлипса (см. [42], с.166) задача Коши (2.52) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, если выполнены следующие условия

$$x^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_\mathcal{A}), \quad h(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}^3). \tag{2.55}$$

Из условий (2.55) получим следующие (достаточные) условия на начальные данные исходной задачи (2.38):

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F) \subset \mathcal{D}(F^{1/2}),$$
$$v(0) = v^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}C^{1/2}), \quad w(0) = w^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}V^{1/2}),$$

из которых следует, что $x^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{F}_\alpha\mathcal{A}^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{F}_\mathcal{A})$. Аналогично получим условие для $f(t)$:

$$f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Опираясь на эти факты, сформулируем теперь теорему существования и единственности сильного решения задачи (2.38) в предположении, что $v(0) = w(0) = 0$.

Теорема 2.3.5. *Пусть выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C^1(([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})); \tag{2.56}$$

тогда каждая из задач (2.38), (2.42),(2.45),(2.51),(2.52) *имеет единственное сильное решение на* $[0,T]$, *и из существования такого решения любой из них следует существование решения остальных. Для задачи* (2.38) *это сильное решение со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$, *для* (2.42),(2.45),(2.51) *— со значениями в* $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$, *а для задачи* (2.52) *— в пространстве* $\mathcal{H}^3$.

Доказательство. Оно проходит по схеме доказательства теоремы 2.2.9 с соответствующими изменениями. Убедимся лишь в существовании связи между задачами (2.42) и (2.45). Действительно, если задача (2.42) имеет единственное сильное решение $y(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$ при условиях

$$y^0 := (u^0; 0; 0)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{F}_0), \quad f_0(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})),$$

то задача (2.45) имеет единственное сильное решение $z(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$ при тех же условиях:

$$z^0 = y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{F}_0), \quad g(t) = e^{\alpha t} f_0(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})). \qquad \square$$

2.3.2 Обобщения. Опираясь, на доказанные утверждения, рассмотрим проблему более общую, чем (2.38):

$$A\frac{du}{dt} + Fu + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} C_k u(s)ds - \sum_{j=1}^{n} \int_0^t e^{-\delta_j(t-s)} D_j u(s)ds = f(t), \ u(0) = u^0, \tag{2.57}$$

$$0 < A \in \mathfrak{S}_\infty, \quad \gamma_k > 0, \ k = \overline{1,m}, \quad \delta_j > 0, \ j = \overline{1,n},$$

$$F = F^* \gg 0, \quad C_k = C_k^* > 0, \ k = \overline{1,m}, \quad D_j = D_j^* > 0, \ j = \overline{1,n},$$

$$\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(C_k), \ k = \overline{1,m}, \quad \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(D_j), \ j = \overline{1,n}.$$

Преобразованиями, аналогичными (2.41), (3.6), её можно привести к задаче Коши вида (2.42). Полагая

$$v_k(t) := \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} C_k^{1/2} u(s)ds + v_k(0), \quad k = \overline{1,m}, \tag{2.58}$$

$$w_j(t) := \int_0^t e^{-\delta_j(t-s)} D_j^{1/2} u(s)ds + w_j(0), \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.59}$$

приходим к задаче, которая в векторно-матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{I}_m & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I}_n \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \widehat{v} \\ \widehat{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F & \widehat{C}^{1/2} & -\widehat{D}^{1/2} \\ -(\widehat{C}^{1/2})^\tau & \widehat{\gamma}\widehat{I}_m & 0 \\ -(\widehat{D}^{1/2})^\tau & 0 & \widehat{\delta}\widehat{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \widehat{v} \\ \widehat{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{f} \\ \widehat{\gamma}\widehat{v}(0) \\ \widehat{\delta}\widehat{w}(0) \end{pmatrix},$$

то есть к задаче

$$\widetilde{\mathcal{A}}\frac{d\widetilde{y}}{dt} + \widetilde{\mathcal{F}}_0\widetilde{y} = \widetilde{f}_0(t), \quad \widetilde{y}(0) = \widetilde{y}^0. \tag{2.60}$$

Здесь

$$\widetilde{y}(t) := (u, \widehat{v}, \widehat{w})^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{H}_k \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{H}_j, \quad \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_j = \mathcal{H},$$

$$\widehat{v} := (v_1, \ldots, v_m)^\tau, \ \widehat{w} := (w_1, \ldots, w_n)^\tau, \quad \widetilde{y}^0 := (u^0, \widehat{v}(0), \widehat{w}(0))^\tau,$$

$$\widetilde{f}_0(t)=\left(\left(f(t)-\sum_{k=1}^{m}C_k^{1/2}v_k(0)+\sum_{j=1}^{n}D_j^{1/2}w(0)\right),\widehat{\gamma}\widehat{v}(0),\widehat{\delta}\widehat{w}(0)\right)^{\tau},$$

$$\widehat{I}_m:=\mathrm{diag}(\underbrace{I,\ldots,I}_{m\text{ раз}}),\quad \widehat{I}_n:=\mathrm{diag}(\underbrace{I,\ldots,I}_{n\text{ раз}}),$$

$$\widehat{C}^{1/2}:=(C_1^{1/2},\ldots,C_m^{1/2})^{\tau},\quad k=\overline{1,m},\quad \widehat{D}^{1/2}:=(D_1^{1/2},\ldots,D_n^{1/2})^{\tau},\quad j=\overline{1,n},$$

$$\widehat{\gamma}\widehat{I}_m:=\mathrm{diag}(\gamma_k I)_{k=1}^{m},\quad \widehat{\delta}\widehat{I}_n:=\mathrm{diag}(\delta_j I)_{j=1}^{n}.$$

В задаче (2.60) для оператора $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ справедливы свойства оператора $\mathcal{F}_0$ из (2.42) с соответствующими изменениями. Поэтому наряду с задачей (2.60) можем рассмотреть задачу с замкнутым оператором, аналогичную (2.52):

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt}+\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{A}}\widetilde{x}=\widetilde{h}(t),\quad \widetilde{x}(0)=\widetilde{x}^0. \tag{2.61}$$

Теорема 2.3.6. *Пусть выполнены условия*

$$u^0\in\mathcal{D}(A^{-1/2}F),\quad f(t)\in C^1(([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})) \tag{2.62}$$

тогда каждая из задач (2.57), (2.60), (2.61) *имеет единственное сильное решение (для задачи* (2.57) *это решение со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$, *а для задачи* (2.60) *— в* $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2})$*) на* $[0;T]$ *и из существования такого решения любой из них следует существование решения двух других.* □

Замечание 2.3.7. Доказательство теоремы 2.3.6 проводится точно по схеме доказательства теоремы 2.3.5. □

2.3.3 Общий случай.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим задачу Коши для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка следующего вида

$$A\frac{du}{dt}+Fu+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)C_ku(s)ds=f(t),\quad u(0)=u^0. \tag{2.63}$$

Здесь $A>0$ — компактный оператор, $u(t)$ — искомая функция со значениями в $\mathcal{H}$, $f(t)$ — заданная функция, $G_k(t,s)$ — ограниченные оператор-функции, действующие в $\mathcal{H}$, C_k — операторы, действующие в $\mathcal{H}$, $k=\overline{1,m}$.

Наша цель — выяснить ограничения на операторы F, C_k и оператор-функции $G_k(t,s)$, $k=\overline{1,m}$, при которых имеет место теорема о существовании и единственности сильного решения задачи (2.63).

Приведём сначала известные факты (см. [4]) о разрешимости задачи (2.63) для случая, когда $A=I$:

$$\frac{du}{dt}+Fu+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds=f(t),\quad u(0)=u^0. \tag{2.64}$$

Определение 2.3.8. Сильным решением интегро-дифференциального уравнения (2.64) на отрезке $[0,T]$ называется такая функция $u(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия:

а) $u(t)\in C^1([0,T];\mathcal{H})\cap C([0,T];\mathcal{D}(F))$;

б) все слагаемые в (2.64) непрерывны по t, т.е. принадлежат пространству $C([0,T];\mathcal{H})$;

в) при любом $t\in[0,T]$ справедливо уравнение (2.64);

г) $u(0)=u^0$. □

Замечание 2.3.9. Для существования сильного решения необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\text{а) } u^0\in\mathcal{D}(F),\quad \text{б) } f(t)\in C([0,T];\mathcal{H}).$$ □

Теорема 2.3.10. *(см. [4]) Пусть выполнены условия*

$$\mathcal{D}(C_k)\supset\mathcal{D}(F),\quad k=\overline{1,m},$$

$$G_k(t,s),\ \frac{\partial G_k}{\partial t}(t,s)\in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H})),\ \Delta_T:=\{(t,s):0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}, \tag{2.65}$$

а также условие

$$u^0\in\mathcal{D}(F). \tag{2.66}$$

Пусть, далее, оператор $-F$ является генератором C_0-полугруппы, а $f(t)$ удовлетворяет условию

$$f(t)\in C^1([0,T];\mathcal{H}). \tag{2.67}$$

Тогда задача (2.64) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

□

Возвращаясь к рассмотрению задачи (2.63), дадим определение её сильного решения.

Определение 2.3.11. Сильным решением интегро-дифференциального уравнения (2.63) на отрезке $[0,T]$ называется такая функция $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{1/2})$, для которой выполнены следующие условия:

а) $u(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})) \cap C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}F))$;

б) все слагаемые в (2.63) принадлежат пространству $C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$, т.е. непрерывны по t и принимают значения в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) \subset \mathcal{H}$;

в) при любом $t \in [0,T]$ справедливо уравнение (2.63);

г) $u(0) = u^0$. $\square$

Осуществим в (2.63) замену $A^{1/2}u = v$ и применим к обеим частям уравнения оператор $A^{-1/2}$. Получим

$$\frac{dv}{dt} + \widetilde{F}v + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t \widetilde{G}_k(t,s)\widetilde{C}_k v(s)ds = \widetilde{f}(t), \quad v(0) = v^0, \tag{2.68}$$

где $\widetilde{F} := A^{-1/2}FA^{-1/2}$, $\quad \widetilde{f}(t) := A^{-1/2}f(t)$, $\quad v^0 := A^{1/2}u^0$.

Что касается операторов $\widetilde{G}_k(t,s)$ и $\widetilde{C}_k$, $k=\overline{1,m}$, то их можно определить двумя способами:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \ \widetilde{G}_k(t,s) := A^{-1/2}G_k(t,s), \qquad \widetilde{C}_k := C_kA^{-1/2}; \\ &\text{б)}\ \ \widetilde{G}_k(t,s) := A^{-1/2}G_k(t,s)A^{1/2},\ \ \widetilde{C}_k := A^{-1/2}C_kA^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Тогда если для (2.68) справедлива теорема 2.3.10, то есть если выполнены условия

1° $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k) \supset \mathcal{D}(\widetilde{F})$, $\quad k=\overline{1,m}$,

2° $\widetilde{G}_k(t,s),\ \partial\widetilde{G}_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H}))$,

3° $-\widetilde{F}$ является генератором C_0-полугруппы,

4° $v^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{F})$,

5° $\widetilde{f}(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H})$,

то существует единственное сильное решение задачи (2.68) на отрезке $[0,T]$.

Получим теперь из условий 1°-5° разрешимости задачи (2.68) достаточные условия разрешимости задачи (2.63).

Так, условие 3° будет выполнено, если считать оператор F максимальным равномерно аккретивным, и тогда $-F$ будет генератором сжимающей C_0-полугруппы. Действительно, если для F выполняется условие равномерной аккретивности

$$\mathrm{Re}(Fu,u) \geqslant c||u||^2, \quad c>0,$$

то для $\widetilde{F}$ получаем

$$\mathrm{Re}(\widetilde{F}v,v) = \mathrm{Re}(A^{-1/2}FA^{-1/2}v,v) = \mathrm{Re}(FA^{-1/2}v, A^{-1/2}v) \geqslant c||A^{-1/2}v||^2 \geqslant$$
$$\geqslant \widetilde{c}||v||^2, \quad \widetilde{c}>0,$$

кроме того

$$\mathcal{D}(\widetilde{F}) = \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) = \mathcal{R}(A^{1/2}F^{-1}A^{1/2}),$$
$$\mathcal{R}(\widetilde{F}) = \mathcal{R}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) = \mathcal{D}(A^{1/2}F^{-1}A^{1/2}) = \mathcal{H},$$

откуда непосредственно следует, что $-\widetilde{F}$ — генератор сжимающей C_0-полугруппы.

Из условия 4° принадлежности $v^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{F})$ получаем, что

$$\widetilde{F}v^0 = A^{-1/2}FA^{-1/2}v^0 = A^{-1/2}Fu^0 \in \mathcal{H},$$

то есть

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F). \tag{2.70}$$

Аналогичным образом из условия 5° принадлежности $\widetilde{f}(t)$ пространству $C^1([0,T];\mathcal{H})$ следует, что

$$A^{-1/2}f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}),$$

откуда получаем, что

$$f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})). \tag{2.71}$$

Рассмотрим теперь условия 1°-2°, считая, что операторы $\widetilde{C}_k$, $\widetilde{G}_k(t,s)$, $k=\overline{1,m}$, имеют вид (2.69), вариант а). Тогда из условия 1° получаем, что

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) = \mathcal{D}(\widetilde{F}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) = \mathcal{D}(C_kA^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m},$$

то есть

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(C_kA^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m}. \tag{2.72}$$

Далее, из условия 2° получим, что

$$A^{-1/2}G_k(t,s),\ A^{-1/2}\frac{\partial G_k}{\partial t}(t,s) \in C(\Delta_T, \mathcal{L}(\mathcal{H})), \quad k=\overline{1,m},$$

а значит

$$G_k(t,s),\ \frac{\partial G_k}{\partial t}(t,s) \in C(\Delta_T, \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A^{-1/2}))). \tag{2.73}$$

Аналогичными рассуждениями в случае, когда операторы $\widetilde{C}_k$, $\widetilde{G}_k(t,s)$, $k=\overline{1,m}$, имеют вид (2.69), вариант б), вместо (2.72) и (2.73) получим

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}F) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_k), \quad k=\overline{1,m}, \tag{2.74}$$

$$G_k(t,s),\ \frac{\partial G_k}{\partial t}(t,s) \in C(\Delta_T, \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}. \tag{2.75}$$

Подытоживая изложенные рассуждения, сформулируем две теоремы существования и единственности решения задачи (2.63) со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Теорема 2.3.12. *Пусть выполнены условия* (2.70), (2.72),(2.73), *а операторы* $\widetilde{C}_k$, $\widetilde{G}_k(t,s)$, $k=\overline{1,m}$, *обозначены способом а)(см.* (2.69)*). Пусть оператор* F *— максимальный равномерно аккретивный, а* $f(t)$ *удовлетворяет условию* (2.71)*. Тогда задача* (2.63) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ *на отрезке* $[0,T]$. □

Теорема 2.3.13. *Пусть выполнены условия* (2.70), (2.74),(2.75), *а операторы* $\widetilde{C}_k$, $\widetilde{G}_k(t,s)$, $k=\overline{1,m}$, *обозначены способом б)(см.* (2.69)*). Пусть оператор* F *— максимальный равномерно аккретивный, а* $f(t)$ *удовлетворяет условию* (2.71)*. Тогда задача* (2.63) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ *на отрезке* $[0,T]$. □

Выводы.

Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра первого порядка, неразрешённого относительно производной, в гильбертовом пространстве для случая, когда подынтегральные оператор-функции имеют специальный вид $G_k(t,s) := e^{-\gamma_k(t-s)}I$. Такой вид позволяет исследовать ассоциированную спектральную задачу.

Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра первого порядка в гильбертовом пространстве для случая, когда в уравнении кроме интегральных слагаемых, отвечающих диссипации энергии системы, имеются также слагаемые, отвечающие за её подкачку. Кроме того, доказана теорема о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра первого порядка, неразрешённого относительно производной в случае, когда подынтегральные оператор-функции имеют достаточно общий вид.

ГЛАВА 3

Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра второго порядка, неразрешённые относительно старшей производной.

3.0 Введение

В этой главе изучается в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задача Коши для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$A\frac{d^2u}{dt^2}+(F+iG)\frac{du}{dt}+Bu+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t G_k(t,s)C_ku(s)ds = f(t),\ u(0)=u^0,\ u'(0)=u^1. \tag{3.1}$$

Такие уравнения описывают, в частности, эволюцию динамических систем с бесконечным числом степеней свободы, причём учитываются эффекты релаксации.

Искомая функция $u = u(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ задаёт поле смещений системы относительно состояния равновесия, а операторные коэффициенты в (3.1) имеют отчётливый физический смысл. Так, A является оператором кинетической энергии и потому $A = A^* > 0$. Далее, B есть оператор потенциальной энергии; если состояние равновесия системы статически устойчиво по линейному приближению, то $B = B^* \geqslant 0$. Оператор $F = F^* \geqslant 0$ учитывает диссипацию энергии, а оператор $G = G^*$ учитывает действие кориолисовых (гироскопических) сил. Наконец, интегральные слагаемые учитывают явления релаксации.

Далее предполагается, что A — ограниченный оператор ($A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$), а коэффициенты F, G, B, C_k — неограниченные и, вообще говоря, некоммутирующие операторы, заданные на своих областях определения, плотных в $\mathcal{H}$. При этом считается, что эти операторы сравнимы по своим областям определения. Именно, выделяются такие классы уравнений, для которых один из операторов можно назвать главным; он имеет область определения, наиболее узкую по сравнению с областями определения других операторных коэффициентов.

Данная глава основана на подходах, изложенных в [36] и отвечающих случаю $A = I$, где I — единичный оператор. Отметим недавно вышедшую монографию [14], где изучаются задачи Коши для интегро-дифференциальных и функциональных уравнений, а также сопутствующие спектральные задачи, в случае когда один из коэффициентов является главным, а остальные — степени этого главного оператора.

Отметим ещё, что при доказательстве основных утверждений в этой главе используются следующие факты.

Теорема 3.0.14. *Пусть в интегральном уравнении Вольтерра второго рода*

$$u(t) - \int_0^t V(t,s)u(s)ds = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.2}$$

выполнены следующие условия:

1°. *заданная функция* $f(t)$ *непрерывна по* t *со значениями в банаховом пространстве* $\mathcal{E}$, *то есть*

$$f(t) \in C([0,T];\mathcal{E});$$

2°. *оператор-функция* $V(t,s)$, *заданная в треугольнике* $\Delta_T := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$, *сильно непрерывна (strong continiuous) по своим переменным и принимает значения из* $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, *обозначение*

$$V(t,s) \in SC(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E})).$$

Тогда задача (3.2) *имеет единственное решение* $u(t) \in C([0,T];\mathcal{E})$, *и это решение может быть найдено методом последовательных приближений.*

□

Теорема 3.0.15. *(см. [36, с.16-25]). Пусть в задаче Коши для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка*

$$\frac{du}{dt} + Fu + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{3.3}$$

выполнены следующие условия

1°. *оператор* $(-F)$ *является генератором* C_0*-полугруппы;*

2°. $f(t)$ *удовлетворяет условию* $f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{E})$*;*

3°. $u^0 \in \mathcal{D}(F)$*;*

4°. $\mathcal{D}(C_k) \supset \mathcal{D}(F), \quad k = \overline{1,m},$

5°. $G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E})),\ k = \overline{1,m}.$

Тогда задача (3.3) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное решение, то есть такую функцию* $u(t)$*, для которой все слагаемые в* (3.3) *являются элементами из* $C([0,T];\mathcal{E})$ *и выполнено начальное условие* $u(0) = u^0$*.* □

3.1 Неполные Вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения второго порядка, неразрешённые относительно старшей производной.

3.1.1 Задача Коши. Первый подход. Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное гильбертово пространство. Рассмотрим сначала случай неполного интегро-дифференциального уравнения вида (3.1), когда $F = G = 0$:

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + Bu + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{3.4}$$

Здесь $u(t)$ — искомая функция, $f(t)$ — заданная функция, $A > 0$ — положительный ограниченный оператор, $B = B^* \gg 0$ — положительно определённый оператор, заданный на области определения $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}$, $G_k(t,s)$ — ограниченные оператор-функции, действующие в $\mathcal{H}$, C_k —, вообще говоря, неограниченные операторы, заданные на областях определения $\mathcal{D}(C_k) \subset \mathcal{H}$, $k = \overline{1,m}$.

С учётом замечания 2.2.1 дадим определение сильного решения задачи (3.4) со значениями в пространстве $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Определение 3.1.1. Назовём функцию $u(t)$, $t \in [0,T]$, сильным решением задачи Коши (3.4) на отрезке $[0,T]$ со значениями в $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$, если выполнены следующие условия:

1°. $u(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}B))$;

2°. $u'(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(B^{1/2}))$, $\quad u''(t) \in C([0,T]; \mathcal{E}^{-1/2})$;

3°. все слагаемые в (3.4) принадлежат пространству $C([0,T]; \mathcal{E}^{1/2})$;

4°. при любом $t \in [0,T]$ справедливо уравнение (3.4);

5°. выполнены начальные условия $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$. □

Отметим, что необходимыми условиями существования сильного решения задачи (3.4) на отрезке $[0,T]$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ являются условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Если уравнение (3.4) имеет сильное решение $u(t)$ со значениями в $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$, то первое слагаемое в (3.4) можно, с учётом замечания 2.2.1, переписать в эквивалентных формах:

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(Au) = A^{1/2}\frac{d^2}{dt^2}(A^{1/2}u) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Наша цель — выяснить ограничения на операторы B и C_k и оператор-функции $G_k(t,s)$, $k = \overline{1,m}$, при которых имеет место теорема о существовании сильного решения задачи (3.4) со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Переходя к непосредственному рассмотрению задачи (3.4), заметим, что эта проблема может быть заменена равносильной ей проблемой для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме пространств $\mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Идя по этому пути, будем считать, что задача (3.4) имеет сильное решение $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. Осуществим в (3.4) замену искомой функции согласно соотношению $A^{1/2}u(t) =: v(t)$ и применим к обеим частям (3.4) оператор $A^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}), \mathcal{H})$. Тогда возникает задача Коши

$$\frac{d^2v}{dt^2} + A^{-1/2}BA^{-1/2}v + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}v(s)ds = A^{-1/2}f(t), \qquad (3.5)$$
$$v(0) = A^{1/2}u^0, \quad v'(0) = A^{1/2}u^1,$$

причём в этом уравнении все слагаемые принадлежат $C([0,T]; \mathcal{H})$.

Введём далее новую искомую функцию $w(t)$ соотношениями:

$$-iB^{1/2}A^{-1/2}v(t) =: \frac{dw}{dt}, \quad w(0) = 0. \qquad (3.6)$$

Из условия 2° определения 3.1.1 следует, что $w(t) \in C^2([0,T];\mathcal{H})$, и тогда

$$\frac{d^2w}{dt^2} + iB^{1/2}A^{-1/2}\frac{dv}{dt} = 0, \quad w'(0) = -iB^{1/2}u^0. \tag{3.7}$$

Преобразуем ещё интегральные слагаемые в (3.5), воспользовавшись формулой

$$v(s) = \int\limits_0^s v'(\xi)d\xi + v(0)$$

и осуществив замену порядка интегрирования. Будем иметь

$$\int\limits_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}\left(\int\limits_0^s v'(\xi)d\xi + v(0)\right)ds =$$

$$= \int\limits_0^t \left(\int\limits_\xi^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}ds\right)v'(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}v(0)ds, \ k = \overline{1,m}.$$

Введём здесь обозначения:

$$\text{а) } \hat{G}_k(t,s) := A^{-1/2}G_k(t,s)A^{1/2},\ \hat{C}_k := A^{-1/2}C_kA^{-1/2},\quad \hat{G}_k(t,s)\hat{C}_k = A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}, \tag{3.8}$$

$$\text{б) } \check{G}_k(t,s) := A^{-1/2}G_k(t,s),\ \check{C}_k := C_kA^{-1/2},\quad \check{G}_k(t,s)\check{C}_k = A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}, \tag{3.9}$$

и рассмотрим в дальнейшем два варианта, отвечающих случаям (3.8) и (3.9).

В варианте (3.8) задача (3.5) с учётом (3.6), (3.7) равносильна задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка следующего вида:

$$\frac{dz}{dt} + i\mathcal{B}z + \sum_{k=1}^m \int\limits_0^t \widetilde{V}_k(t,\xi)\widetilde{C}_kz(\xi)d\xi = \widetilde{f}(t), \tag{3.10}$$

$$z(0) = z^0 := (A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau,$$

$$z(t) := (v'(t); w'(t))^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H},$$

$$\widetilde{f}(t) := (A^{-1/2}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\int_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_k u^0 ds; 0)^\tau, \qquad (3.11)$$

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2}B^{1/2} \\ B^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{B}) &:= \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}) = \\ &= \mathcal{R}(A^{1/2}B^{-1/2}) \oplus \mathcal{R}(B^{-1/2}A^{1/2}), \end{aligned} \qquad (3.12)$$

а операторы $\widetilde{V}_k(t,\xi)$ и $\widetilde{C}_k$ заданы формулами

$$\widetilde{V}_k(t,\xi) := \operatorname{diag}(\hat{V}_k(t,\xi); 0), \quad \hat{V}_k(t,\xi) := \int_\xi^t \hat{G}_k(t,s)ds = \int_\xi^t A^{-1/2}G_k(t,s)A^{1/2}ds, \qquad (3.13)$$

$$\widetilde{C}_k := \operatorname{diag}(\hat{C}_k; 0), \quad \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) := \mathcal{D}(\hat{C}_k) \oplus \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m}. \qquad (3.14)$$

(Здесь, как и выше, символом $(\cdot;\cdot)^\tau$ обозначена операция транспонирования, в данном случае вектор-строки.)

Заметим теперь, что в (3.10) оператор $\mathcal{B}$ является самосопряжённым и потому оператор $-i\mathcal{B}$ является генератором унитарной группы операторов, в частности, генератором C_0-полугруппы. Поэтому для задачи (3.10)-(3.14) справедливы утверждения теоремы 3.0.15, если выполнены следующие условия:

1°. $\widetilde{f}(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}^2)$;

2°. $z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$;

3°. $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k) \supset \mathcal{D}(\mathcal{B})$, $\quad k = \overline{1,m}$;

4°. $\widetilde{V}_k(t,s)$, $\partial\widetilde{V}_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}^2))$.

Можно непосредственно убедиться, что для выполнения этих условий достаточно в исходной задаче (3.4) потребовать выполнения условий

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})), \qquad (3.15)$$

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}), \qquad (3.16)$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}. \qquad (3.17)$$

Здесь следует лишь проверить (см. выражение для $\widetilde{f}(t)$ из (3.11), а также условие (3.16)), что $A^{-1/2}C_k u^0 \in \mathcal{H}$, если $u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B)$. Однако этот факт следует из соотношения

$$A^{-1/2}C_k u^0 = (A^{-1/2}C_kA^{-1/2})(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{-1}(A^{-1/2}Bu^0),$$

если заметить, что

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}),$$

и потому оператор $(A^{-1/2}C_kA^{-1/2})(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{-1}$ ограничен.

Таким образом, при выполнении условий (3.15)-(3.17) задача (3.10)-(3.14) имеет сильное решение $z(t) \in C([0,T];\mathcal{H}^2)$, а потому и задача (3.5) при этих же условиях имеет сильное решение $v(t)$, то есть такое, для которого все слагаемые в (3.5) будут функциями из $C([0,T];\mathcal{H})$.

Проведённые рассуждения позволяют установить следующий результат.

Теорема 3.1.2. *Пусть выполнены условия* (3.15)-(3.17)*. Тогда задача* (3.4) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$*,* $0 \leqslant t \leqslant T$*, со значениями в* $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$*.*

Доказательство. После проведённых рассуждений осталось лишь заметить, что утверждение теоремы получается путём обратной замены $v(t) = A^{1/2}u(t)$ в уравнении (3.5) и применения к обеим частям полученного соотношения оператора $A^{1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A^{-1/2}))$. □

Рассмотрим теперь вариант (3.9). Тогда задача (3.5) равносильна задаче (3.10)-(3.14), где теперь

$$\widetilde{V}_k(t,\xi) := \mathrm{diag}(\check{V}_k(t,\xi);0), \quad \check{V}_k(t,\xi) := \int\limits_{\xi}^{t} \check{G}_k(t,s)ds = \int\limits_{\xi}^{t} A^{-1/2}G_k(t,s)ds, \tag{3.18}$$

$$\widetilde{C}_k := \mathrm{diag}(\check{C}_k;0), \quad \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) := \mathcal{D}(\check{C}_k) \oplus \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.19}$$

Теорема 3.1.3. *Пусть выполнены условия* (3.15)*, а также условия*

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(C_kA^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}; \tag{3.20}$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{D}(A^{-1/2}))), k = \overline{1,m}. \tag{3.21}$$

Тогда задача (3.4) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ *на отрезке* $[0,T]$*.*

Доказательство. Здесь, как и выше, сначала доказываем существование сильного решения новой задачи (3.10)-(3.12), (3.18),(3.19). Оно проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.0.15 (см. [36]), однако теперь с учётом соотношений (3.18), (3.19). Затем переходим от (3.10)-(3.12), (3.18),(3.19) к задаче (3.5), которая имеет сильное решение $v(t) \in C([0,T];\mathcal{H})$, и возвращаемся к задаче (3.4). $\square$

Замечание 3.1.4. Если оператор $B = B^* \gg 0$ зафиксирован, то условия (3.20) для операторов C_k являются более общими, чем (3.16); соответственно условия (3.17) для оператор-функций $G_k(t,s)$ — менее общие, чем (3.21). $\square$

3.1.2 Задача Коши. Второй подход При исследовании задачи (3.4) можно применить и второй подход, не связанный с переходом к системе двух уравнений первого порядка, а связанный с использованием теории операторных косинус- и синус-функций (см., например, [108]). Здесь при $A = I$ имеет место следующее утверждение (см. [36, с.67-71]).

Теорема 3.1.5. *Пусть в задаче* (3.4) $A = I$ *и выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}), \tag{3.22}$$

$$\mathcal{D}(C_k) \supset \mathcal{D}(B), \tag{3.23}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H})), \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.24}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, *то есть такую функцию*

$$u(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(B)) \cap C^1([0,T];\mathcal{D}(B^{1/2})) \cap C^2([0,T];\mathcal{H}),$$

для которой выполнено уравнение (3.4) *(при* $A = I$*) для любого* $t \in [0,T]$ *и начальные условия.* $\square$

Перейдём, как и выше, от задачи (3.4) к задаче Коши (3.5) и воспользуемся для этой задачи условиями и утверждениями теоремы 3.1.5. Тогда условия (3.22)-(3.24) приводят к соотношениям

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{3.25}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}), \tag{3.26}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.27}$$

Здесь при выводе второго условия (3.25) использованы следующие факты. Введём оператор $\hat{B} := A^{-1/2}BA^{-1/2}$, который задан на $\mathcal{D}(\hat{B}) = \mathcal{R}(A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}) \subset \mathcal{H}$ и является (в силу свойств $B \gg 0$, $A^{-1} \gg 0$) положительно определённым и самосопряжённым. Тогда существует оператор $\hat{B}^{1/2} = (\hat{B}^{1/2})^* \gg 0$, а оператор $B^{1/2}A^{-1/2}$ допускает полярное представление (см. [68, с.280-285])

$$B^{1/2}A^{-1/2} = U\hat{B}^{1/2} = U(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2},$$

где U, в силу свойств $B^{1/2}$ и $A^{-1/2}$ — не только частично изометрический, но и унитарный оператор, действующий в $\mathcal{H}$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{D}(\hat{B}^{1/2}) = \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}), \tag{3.28}$$

и так как в задаче (3.5) должно выполняться условие $v'(0) = A^{1/2}u^1 \in \mathcal{D}(\hat{B}^{1/2})$, то в силу (3.28) приходим к условию $u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2})$.

Теорема 3.1.6. *Пусть выполнены условия* (3.25)-(3.27)*. Тогда задача* (3.4) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ *на отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Как следует из проведённых выше рассуждений, при выполнении условий (3.25)-(3.27) задача Коши (3.5) имеет единственное сильное решение $v(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ на отрезке $[0, T]$. Поэтому после обратной замены $v(t) = A^{1/2}u(t)$ в (3.5) и применения слева оператора $A^{1/2}$ приходим к утверждению данной теоремы. □

Замечание 3.1.7. Условия (3.25)-(3.27), при которых справедливо утверждение теоремы 3.1.6, являются более общими, чем условия (3.15)-(3.17), когда справедлива теорема 3.1.2. В самом деле, очевидно, что при выполнении условия (3.16) имеем

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}),$$

и из (3.16) следует (3.26). В то же время из (3.26) не следует (3.16). □

Аналогом теоремы 3.1.3 при данном подходе, основанном на применении теории операторных косинус- и синус-функций, является следующее утверждение.

Теорема 3.1.8. *Пусть выполнены условия* (3.25), (3.21), *а также условия*

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(C_k A^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}.$$

Тогда задача (3.4) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ *на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Оно осуществляется по тому же плану, что и доказательство теоремы 3.1.5, с учётом условий данной теоремы. Именно, при этих условиях существует единственное сильное решение $v(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ для задачи (3.5), а потому и сильное решение $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ для задачи (3.4). □

Замечание 3.1.9. Требование $f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$ в теоремах 3.1.2-3.1.3, 3.1.6-3.1.8 можно ослабить, заменив его условием

$$A^{-1/2}f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \quad p > 1,$$

$$||f(t)||_{W_p^1([0,T];\mathcal{H})} := \sum_{k=0}^{1} \left(\int_0^T ||f^{(k)}(t)||_{\mathcal{H}}^p dt \right)^{1/p}.$$

В самом деле, как показано С.Я. Якубовым в [68], при $f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H})$ задача Коши (3.3) для дифференциального (а не интегро-дифференциального) уравнения имеет сильное решение $u_0(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$. Именно это свойство использовано при доказательстве упомянутых теорем. □

3.2 Полные Вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения второго порядка, неразрешённые относительно старшей производной.

3.2.1 К постановке задачи. Рассмотрим задачу Коши (3.1) в предположениях параграфа 3.0, т.е. будем считать, что

$$0 < A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad F = F^* \gg 0, \quad B = B^* \gg 0, \quad G = 0, \qquad (3.29)$$

а ограничения на $G_k(t,s)$ и C_k сформулируем ниже. Уравнение вида (3.1) называют полным, поскольку его главная часть, не содержащая интегральных членов, состоит из слагаемых, зависящих не только от $u(t)$ и d^2u/dt^2, но и от du/dt.

Определение 3.2.1. Назовём сильным решением задачи Коши (3.1) (при $G = 0$) на отрезке $[0,T]$ такую функцию $u(t)$ со значениями в $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$, для которой выполнены следующие условия:

1°. $u(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}B))$;

2°. $u'(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(B^{1/2})) \cap C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}F))$;

3°. $Au''(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4°. все слагаемые в уравнении (3.1) непрерывны по t и принадлежат пространству $C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

5°. при любом $t \in [0,T]$ выполнено уравнение (3.1);

6°. выполнены начальные условия $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$. □

Необходимыми условиями существования сильного решения задачи (3.1), (3.29) являются, очевидно, условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \cap \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Здесь снова наша цель — выяснить ограничения на операторы F, B, C_k и оператор-функции $G_k(t,s)$, $k = \overline{1,m}$, при которых имеет место утверждение о существовании сильного решения задачи (3.1) со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$.

Будем считать, что задача (3.1) имеет сильное решение $u(t)$ в смысле определения 3.2.1, и осуществим, как и в пункте 3.1.1, переход от этой задачи к задаче Коши для системы двух интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. Осуществляя в (3.1) замену $A^{1/2}u =: v$ и применяя слева оператор $A^{-1/2}$ (это можно сделать для сильного решения), приходим к задаче, аналогичной задаче (3.5):

$$\frac{d^2v}{dt^2} + A^{-1/2}FA^{-1/2}\frac{dv}{dt} + A^{-1/2}BA^{-1/2}v + \\ + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}v(s)ds = A^{-1/2}f(t), \quad (3.30)$$

$$v(0) = A^{1/2}u^0, \quad v'(0) = A^{1/2}u^1.$$

Здесь все слагаемые в уравнении являются элементами из $C([0,T];\mathcal{H})$.

Введём далее, новую искомую функцию:

$$-iB^{1/2}A^{-1/2}v(t) =: \frac{dw}{dt}, \quad w(0) = 0. \quad (3.31)$$

В силу свойства 2° из определения 3.2.1 получаем, что $d^2w/dt^2 \in C([0,T];\mathcal{H})$ и потому

$$\frac{d^2w}{dt^2} + iB^{1/2}A^{-1/2}\frac{dv}{dt} = 0, \quad w'(0) = -iB^{1/2}A^{-1/2}v(0) = -iB^{1/2}u^0. \qquad (3.32)$$

Отсюда аналогично рассмотрениям пункта 3.1.1 приходим к выводу, что задача (3.1) равносильна задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{F}_0 z + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t \widetilde{V}_k(t,\xi)\widetilde{C}_k z(\xi)d\xi = \widetilde{f}_0(t), \qquad (3.33)$$

$$z(0) = z^0 := (A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau, \qquad (3.34)$$

$$z(t) := (v'(t); w'(t))^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H},$$

$$\widetilde{f}_0(t) := (A^{-1/2}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_k u^0 ds; 0)^\tau, \qquad (3.35)$$

$$\mathcal{F}_0 := \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & iA^{-1/2}B^{1/2} \\ iB^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.36)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_0) := (\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \cap \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2})) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}), \qquad (3.37)$$

а операторы $\widetilde{V}_k(t,\xi)$ и $\widetilde{C}_k$ заданы формулами (3.13), (3.14) в случае (3.8) и формулами (3.18), (3.19) в случае (3.9).

Дальнейшее изучение задачи (3.33)-(3.37) связано с уточнением взаимосвязей областей определения операторов $B^{1/2}A^{-1/2}$ и $A^{-1/2}FA^{-1/2}$. В данном параграфе будут рассмотрены следующие три случая (три класса уравнений).

1°. Малая интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}). \qquad (3.38)$$

2°. Средняя интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}). \qquad (3.39)$$

3°. Большая интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}). \qquad (3.40)$$

Каждому из этих вариантов посвящён отдельный пункт данного параграфа.

Замечание 3.2.2. Правое включение в (3.40) очевидно, а для доказательства правого включения в (3.39) используется известное неравенство Гайнца (см., например [43, с.254]) и полярное представление неограниченного оператора (см. [68, с.280-285]).

Доказательство. В самом деле, операторы $\widetilde{B} := A^{-1/2}BA^{-1/2}$ и $\widetilde{F} := A^{-1/2}FA^{-1/2}$, заданные на областях определения

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) = \mathcal{R}(A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}), \quad \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) = \mathcal{R}(A^{1/2}F^{-1}A^{1/2}),$$

являются самосопряжёнными и положительно определёнными, причём в силу (3.39) $\mathcal{D}(\widetilde{B}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{F})$, откуда по неравенству Гайнца следует, что

$$\mathcal{D}(\widetilde{B}^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{F}^{1/2}).$$

Отсюда, с использованием полярных представлений для этих операторов, т.е. формул

$$\widetilde{B}^{1/2} = U_B B^{1/2}A^{-1/2}, \quad \widetilde{F}^{1/2} = U_F F^{1/2}A^{-1/2},$$

где U_B и U_F — унитарные операторы, приходим к выводу, что

$$\mathcal{D}(\widetilde{B}^{1/2}) = \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}), \quad \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}),$$

и правое включение (3.39) доказано. $\square$

3.2.2 Случай малой интенсивности внутренней диссипации.

При условии (3.38) операторная матрица $\mathcal{F}_0$ из (3.36) корректно задана на области определения (см.(3.37))

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_0) := \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}) = \mathcal{R}(A^{1/2}B^{-1/2}) \oplus \mathcal{R}(B^{-1/2}A^{1/2}). \quad (3.41)$$

Лемма 3.2.3. *Пусть выполнено условие* (3.38). *Тогда оператор* $\mathcal{F}_0$, *заданный на области определения* (3.41), *является неограниченным максимальным аккретивным оператором:*

$$\mathrm{Re}(\mathcal{F}_0 z, z)_{\mathcal{H}^2} = (A^{-1/2}FA^{-1/2}v', v')_{\mathcal{H}} = ||F^{1/2}A^{-1/2}v'||^2_{\mathcal{H}} \geqslant 0, \ \forall z = (v'; w')^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_0). \quad (3.42)$$

Он допускает факторизацию вида

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & iA^{-1/2}B^{1/2} \\ iB^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} I & -iA^{-1/2}FB^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2}B^{1/2} \\ B^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

где $A^{-1/2}FB^{-1/2}$ *— ограниченный оператор, действующий в* $\mathcal{H}$.

Доказательство. Свойство (3.43) проверяется непосредственно. Ограниченность оператора $A^{-1/2}FB^{-1/2}$ следует из представления

$$A^{-1/2}FB^{-1/2} = (A^{-1/2}FA^{-1/2})(A^{1/2}B^{-1/2}) = (A^{-1/2}FA^{-1/2})(B^{1/2}A^{-1/2})^{-1}$$

и из (3.38). Далее, свойство максимальности $\mathcal{F}_0$ следует из того факта, что обратный оператор

$$\mathcal{F}_0^{-1} = -i\begin{pmatrix} 0 & A^{1/2}B^{-1/2} \\ B^{-1/2}A^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & iA^{-1/2}FB^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

задан на всём пространстве $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^2$. □

Следствие 3.2.4. *Оператор* $(-\mathcal{F}_0)$ *является генератором сжимающей* C_0-*полугруппы.* □

Опираясь на установленные факты, применим к задаче (3.33)-(3.36), (3.41) утверждение теоремы 3.0.15. По этой теореме получаем, что если выполнены условия

1°. $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k) \supset \mathcal{D}(\mathcal{F}_0)$, $k = \overline{1,m}$,

2°. $\widetilde{V}_k(t,s)$, $\partial\widetilde{V}_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}^2))$,

3°. $z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_0)$,

4°. $\widetilde{f}(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}^2)$,

то задача (3.33)-(3.36), (3.41) имеет единственное сильное решение $z(t)$ на отрезке $[0,T]$.

Будем считать сначала, что операторы $\widetilde{C}_k$ и оператор-функции $\widetilde{V}_k(t,s)$ заданы формулами (3.13), (3.14), (3.8), и выявим условия, обеспечивающие выполнение свойств 1°-4°.

Условие 1° приводит к свойству

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}) \oplus \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m},$$

которое выполняется, если

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.44}$$

Далее, из требования 2° и формул (3.13) приходим к свойствам

$$\hat{V}_k(t,\xi) = \int\limits_{\xi}^{t} A^{-1/2} G_k(t,s) A^{1/2} ds, \quad \partial\hat{V}_k(t,\xi)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H})), \quad k = \overline{1,m},$$

которые выполняются, если имеют место условия

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.45}$$

Легко проверить также, что требование 3° равносильно условиям

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}). \tag{3.46}$$

Наконец, можно установить, что условие 4° выполнено, если

$$f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})). \tag{3.47}$$

В самом деле, в этом случае $A^{-1/2}f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H})$, и осталось лишь проверить, что остальные слагаемые в (3.35) также обладают этим свойством. Чтобы в этом убедиться, представим подынтегральные выражения в виде

$$A^{-1/2}G_k(t,s)C_k u^0 = (A^{-1/2}G_k(t,s)A^{1/2})(A^{-1/2}C_k u^0)$$

и заметим, что в силу (3.45)

$$A^{-1/2}G_k(t,s)A^{1/2} \in C^1(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H})), \quad A^{-1/2}(\partial G_k(t,s)/\partial t)A^{1/2} \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$$

и тогда достаточно проверить, что $A^{-1/2}C_k u^0 \in \mathcal{H}$. Однако согласно (3.46) $u^0 = B^{-1/2}A^{1/2}\eta^0$, $\eta^0 \in \mathcal{H}$, и тогда

$$A^{-1/2}C_k u^0 = (A^{-1/2}C_k A^{-1/2})(A^{1/2}B^{-1}A^{1/2})\eta^0 =$$

$$= (A^{-1/2}C_k A^{-1/2})(B^{1/2}A^{-1/2})^{-1}(B^{-1/2}A^{1/2}\eta^0) \in \mathcal{H}, \tag{3.48}$$

поскольку произведение первых двух сомножителей, в силу свойства (3.44), — ограниченный оператор, а оператор $B^{-1/2}A^{1/2}$ также ограничен.

Теорема 3.2.5. *Пусть в задаче* (3.1) *выполнены условия* (3.29), *а также условия* (3.44)-(3.47). *Тогда эта задача имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$ *на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. При выполнении условий теоремы, как уже установлено выше, задача (3.33)-(3.36), (3.41) имеет единственное сильное решение $z(t)$ со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^2$ на отрезке $[0,T]$. Возвращаясь от (3.33) по формулам (3.32), (3.31) к задаче (3.30), приходим к выводу, что эта задача имеет единственное сильное решение $v(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ на промежутке $[0,T]$. Совершая затем в (3.30) обратную замену $v(t) =: A^{1/2}u(t)$ и действуя слева оператором $A^{1/2}$, получаем утверждение теоремы. $\square$

Аналогичным образом рассматривается вариант, когда операторы $\widetilde{C}_k$ и оператор-функции $\widetilde{V}_k(t,s)$ заданы формулами (3.18), (3.19), (3.9). Здесь взамен (3.44), (3.45) возникают условия

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(C_kA^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}, \tag{3.49}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.50}$$

Не повторяя выкладки, аналогичные выводу формул (3.44)-(3.48), отметим только, что здесь взамен (3.48) имеет место формула

$$C_ku^0 = C_kB^{-1}A^{1/2}\eta^0 = [(C_kA^{-1/2})(B^{1/2}A^{-1/2})^{-1}](B^{-1/2}A^{1/2}\eta^0) \in \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m},$$

так как выполнены соотношения (3.49), (3.46).

Теорема 3.2.6. *Пусть в задаче* (3.1) *выполнены условия* (3.29)*, а также условия* (3.49)*,* (3.50)*,* (3.46)*,* (3.47)*. Тогда эта задача имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$ *на отрезке* $[0,T]$. $\square$

Замечание 3.2.7. Теорема 3.2.5 является обобщением теоремы 3.1.2, а теорема 3.2.6 — обобщением теоремы 3.1.3, на случай, когда в исследуемом интегро-дифференциальном уравнении (3.1) $F \neq 0$, $G = 0$. $\square$

3.2.3 Случай большой интенсивности внутренней диссипации.

Будем теперь считать, что в задаче (3.33)-(3.37) выполнены условия (3.40), то есть рассмотрим случай большой интенсивности внутренней диссипации. Здесь операторная матрица $\mathcal{F}_0$ снова определяется формулой (3.36), однако теперь

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_0) = \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}).$$

Для исследования задачи в этом варианте полезно сделать замену искомой функции

$$z(t) = e^{\alpha t} y(t), \quad \alpha > 0. \tag{3.51}$$

Тогда для искомой функции $y(t)$ получим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{F}_\alpha y + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \widetilde{W}_k(t,\xi)\widetilde{C}_k y(\xi) d\xi = \widetilde{f}_\alpha(t), \tag{3.52}$$

$$y(0) = z(0) = (A^{1/2}u^1; -B^{1/2}u^0)^\tau, \tag{3.53}$$

$$\mathcal{F}_\alpha := \mathcal{F}_0 + \alpha \mathcal{I} = \mathcal{F}_{\alpha,1} + \mathrm{diag}(\alpha I; 0), \quad \mathcal{F}_{\alpha,1} := \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & iA^{-1/2}B^{1/2} \\ iB^{1/2}A^{-1/2} & \alpha I \end{pmatrix}, \tag{3.54}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha) = \mathcal{D}(\mathcal{F}_0) = \mathcal{D}(\mathcal{F}_{\alpha,1}) = \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}), \tag{3.55}$$

$$\widetilde{f}_\alpha(t) := e^{-\alpha t}\widetilde{f}_0(t), \quad \widetilde{W}_k(t,\xi) := e^{-\alpha(t-\xi)}\widetilde{V}_k(t,\xi), \tag{3.56}$$

где функция $\widetilde{f}_0(t)$ задана формулой (3.35), а $\widetilde{V}_k(t,\xi)$ и $\widetilde{C}_k$ — формулами (3.13), (3.14) в обозначениях (3.8) и формулами (3.18), (3.19) в обозначениях (3.9).

Лемма 3.2.8. *Оператор* $\mathcal{F}_\alpha$ *из* (3.54),(3.128) *является равномерно аккретивным на* $\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha)$*, то есть*

$$\mathrm{Re}(\mathcal{F}_\alpha y, y)_{\mathcal{H}^2} \geqslant \alpha ||y||^2_{\mathcal{H}^2}, \quad \forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha), \quad \alpha > 0. \tag{3.57}$$

Доказательство. Этот факт непосредственно следует из (3.42) и определения (3.54) оператора $\mathcal{F}_\alpha$. □

Введём теперь в рассмотрение следующие вспомогательные операторы:

$$V := B^{1/2}F^{-1/2}, \quad V^+ := F^{-1/2}B^{1/2}, \quad \mathcal{D}(V^+) := \mathcal{D}(B^{1/2}).$$

Лемма 3.2.9. *Операторы* V *и* V^+ *обладают следующими свойствами:*

$$V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad V^+ = V^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})}, \quad \overline{V^+} = V^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{3.58}$$

Доказательство. Проверим сначала, что оператор V ограничен и потому задан на всём $\mathcal{H}$. В самом деле,

$$V = B^{1/2}F^{-1/2} = (B^{1/2}A^{-1/2})(F^{1/2}A^{-1/2})^{-1},$$

и выполнено свойство

$$\mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}), \tag{3.59}$$

которое следует из левого включения (3.40), неравенства Гайнца и доказывается точно так же, как это сделано в замечании 3.2.2. Поэтому оператор $(B^{1/2}A^{-1/2})(F^{1/2}A^{-1/2})^{-1}$ ограничен, то есть $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Пусть теперь $u \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, $v \in \mathcal{H}$. Тогда

$$(V^+u, v)_{\mathcal{H}} = (F^{-1/2}B^{1/2}u, v)_{\mathcal{H}} = (u, B^{1/2}F^{-1/2}v)_{\mathcal{H}} = (u, Vv)_{\mathcal{H}}.$$

Отсюда следует второе свойство (3.58). Далее, так как оператор V ограничен, то ограничен и V^*, причём V^+ и V^* совпадают на плотном в $\mathcal{H}$ множестве $\mathcal{D}(B^{1/2})$. Значит, замыкание по непрерывности оператора V^+ с $\mathcal{D}(B^{1/2})$ на всё $\mathcal{H}$ совпадает с V^*. □

Следствием лемм 3.2.8 и 3.2.9 является такое утверждение.

Теорема 3.2.10. *Операторная матрица* $\mathcal{F}_\alpha$ *из* (3.54), *заданная на области определения* (3.128), *допускает следующие представления:*

1°. *в форме Шура-Фробениуса,*

$$\mathcal{F}_\alpha=\begin{pmatrix} I & 0 \\ iVF^{-1/2}A^{1/2} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & 0 \\ 0 & VV^+ + \alpha I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & iA^{1/2}F^{-1/2}V^+ \\ 0 & I \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.60}$$

2°. *с симметричными крайними множителями,*

$$\mathcal{F}_\alpha = \begin{pmatrix} A^{-1/2}F^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & iV^+ \\ iV & \alpha I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^{1/2}A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.61}$$

Оператор $\mathcal{F}_\alpha$ *допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора*

$$\mathcal{F} := \overline{\mathcal{F}}_\alpha = \overline{\mathcal{F}}_1 + \operatorname{diag}(\alpha I; 0),$$

который представи́м в двух формах:

1°. *в форме Шура-Фробениуса,*

$$\mathcal{F}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ iVF^{-1/2}A^{1/2} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & 0 \\ 0 & VV^* + \alpha I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & iA^{1/2}F^{-1/2}V^* \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.62}$$

2°. *с симметричными крайними множителями,*

$$\mathcal{F}=\begin{pmatrix} A^{-1/2}F^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & iV^* \\ iV & \alpha I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^{1/2}A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Оператор $\mathcal{F}$ задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}):=\{y=(y_1;y_2)^\tau : y_1\in\mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}),\ F^{1/2}A^{-1/2}y_1+iV^*y_2\in\mathcal{D}(A^{-1/2}F^{1/2})\}, \quad (3.64)$$

и действует по закону

$$\mathcal{F}y=\begin{pmatrix} A^{-1/2}F^{1/2}(F^{1/2}A^{-1/2}y_1+iV^*y_2)+\alpha y_1 \\ iB^{1/2}A^{-1/2}y_1+\alpha y_2 \end{pmatrix}, \quad y\in\mathcal{D}(\mathcal{F}). \quad (3.65)$$

Доказательство. Заметим сначала, что если $y=(y_1;y_2)^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{F})$, то $y_1\in\mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2})$, и потому, в силу (3.59), $y_1\in\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2})$, то есть формула (3.65) определена корректно.

Далее, формулы (3.60), (3.61) проверяются непосредственно на элементах из $\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha)$. В формуле (3.60) второй и третий сомножители (в первом слагаемом справа) допускают замыкание путём замены V^+ на $V^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. После этого возникает оператор $\mathcal{F}$ из (3.62), первое слагаемое в котором есть произведение замкнутых операторов, каждый из которых имеет ограниченный обратный, а второе слагаемое, очевидно, ограниченный оператор. Поэтому оператор $\mathcal{F}$ из (3.62) будет иметь в качестве области значений всё пространство $\mathcal{H}^2$, то есть будет максимальным равномерно аккретивным оператором, и для него сохраняется свойство (3.57) (см., например, [42, с.109]).

Аналогичным образом устанавливаем, что оператор $\mathcal{F}$ из (3.63) — также максимальный равномерно аккретивный оператор. Здесь (в первом слагаемом) крайние множители — неограниченные операторы, имеющие ограниченные обратные, а средний множитель, после замыкания путём замены V^+ на V^*, обладает свойством

$$\mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} I & iV^* \\ iV & \alpha I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}^2}\geqslant\min\{1;\alpha^2\}||y||^2, \quad \forall y\in\mathcal{H}^2,$$

то есть является равномерно аккретивным оператором и потому также имеет ограниченный обратный.

Заметим, наконец, что закон (3.65) действия оператора $\mathcal{F}$ следует как из представления (3.62), так и из (3.63), и проверяется непосредственно. $\square$

Опираясь на установленные свойства оператора $\mathcal{F}$, рассмотрим наряду с (3.52), (3.53) задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{F}y + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \widetilde{W}_k(t,\xi)\widetilde{C}_k y(\xi)d\xi = \widetilde{f}_\alpha(t), \tag{3.66}$$

$$y(0) = (A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau. \tag{3.67}$$

Так как $\mathcal{F}$ — максимальный равномерно аккретивный оператор, то оператор $(-\mathcal{F})$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Поэтому согласно теореме 3.0.15 задача (3.66), (3.67) имеет единственное сильное решение $y(t)$ на отрезке $[0,T]$, если выполнены следующие условия (в варианте (3.8), (3.13), (3.14)):

1°. $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k) \supset \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad k = \overline{1,m};$ (3.68)

2°. $\widetilde{W}_k(t,\xi),\ \partial\widetilde{W}_k(t,\xi)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}^2)), \quad k = \overline{1,m};$ (3.69)

3°. $y(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha) \subset \mathcal{D}(\mathcal{F});$ 4°. $\widetilde{f}_\alpha(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}^2).$ (3.70)

Эти факты позволяют установить достаточные условия разрешимости задачи (3.1), (3.29) в случае большой интенсивности диссипации энергии.

Теорема 3.2.11. *Пусть в задаче* (3.1), (3.29) *выполнено условие* (3.40) *и условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}B),\ u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{3.71}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}, \tag{3.72}$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.73}$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ *единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Доказательство. 1) Убедимся сначала, что при выполнении условий (3.71)-(3.73) имеют место свойства (3.68)-(3.70).

Действительно, условие 3° здесь принимает вид

$$(A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}),$$

и для его выполнения достаточно, чтобы были выполнены первые два условия (3.71). В частности, если $u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F)$, то $u^0 = F^{-1}A^{1/2}\eta^0$, $\eta^0 \in \mathcal{H}$, и тогда

$$(A^{-1/2}B^{1/2})(B^{1/2}u^0) = (A^{-1/2}BA^{-1/2})(A^{-1/2}FA^{-1/2})^{-1}\eta^0 =: K\eta^0 \in \mathcal{H}$$

так как в силу левого условия (3.40) оператор K ограничен.

Далее, условие 4° будет выполнено, если $f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$ и, кроме того (см. (3.35), (3.48)),

$$A^{-1/2}G_k(t,s)C_ku^0 = (A^{-1/2}G_k(t,s)A^{1/2})(A^{-1/2}C_ku^0) \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H})),$$

$$A^{-1/2}(\partial G_k(t,s)/\partial t)C_ku^0 = (A^{-1/2}(\partial G_k(t,s)/\partial t)A^{1/2})(A^{-1/2}C_ku^0) \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H})).$$

Так как здесь в силу (3.73) первые сомножители обладают этим свойством, а $u^0 = F^{-1}A^{1/2}\eta^0$, $\eta^0 \in \mathcal{H}$, то

$$A^{-1/2}C_ku^0 = \left[(A^{-1/2}C_kA^{-1/2})(F^{1/2}A^{-1/2})^{-1}\right]F^{-1/2}A^{1/2}\eta^0 \in \mathcal{H},$$

поскольку согласно (3.72) квадратная скобка — ограниченный оператор, а оператор $F^{-1/2}A^{1/2}$ также ограничен.

Можно проверить также, опираясь на формулы (3.129) для $\widetilde{W}_k(t,\xi)$ и формулы (3.13), (3.14), (3.64), что условия 1° и 2° выполняются, если имеют место свойства (3.72), (3.73).

Таким образом, при выполнении условий (3.71)-(3.73) задача (3.66), (3.67) имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение $y(t)$ со значениями в $\mathcal{H}^2$.

2) Опираясь на этот факт, докажем утверждение данной теоремы. С этой целью перепишем (3.66), (3.67) в виде задачи Коши для системы двух уравнений:

$$\frac{dy_1}{dt}+A^{-1/2}F^{1/2}(F^{1/2}A^{-1/2}y_1+iV^*y_2)+\alpha y_1+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\xi)}\hat{V}_k(t,\xi)\hat{C}_ky_1(\xi)d\xi =$$

$$= e^{-\alpha t}(A^{-1/2}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t \hat{G}_k(t,s)\hat{C}_kA^{1/2}u^0ds), \quad y_1(0) = A^{1/2}u^1; \qquad (3.74)$$

$$\frac{dy_2}{dt} + iB^{1/2}A^{-1/2}y_1 + \alpha y_2 = 0, \quad y_2(0) = -iB^{1/2}u^0. \qquad (3.75)$$

Здесь, как было доказано, каждое слагаемое в уравнениях является на отрезке $[0,T]$ непрерывной функцией t со значениями в $\mathcal{H}$.

Заметим теперь, что задача (3.52), (3.53) также переписывается в виде задачи Коши для системы двух уравнений, причём второе имеет вид (3.75), а первое, согласно определению оператора $\mathcal{F}_\alpha$, таково:

$$\frac{dy_1}{dt}+A^{-1/2}FA^{-1/2}y_1+iA^{-1/2}F^{1/2}V^+y_2+\alpha y_1+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\xi)}\hat{V}_k(t,\xi)\hat{C}_k y_1(\xi)d\xi =$$

$$= e^{-\alpha t}(A^{-1/2}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t \hat{G}_k(t,s)\hat{C}_kA^{1/2}u^0ds), \quad y_1(0)=A^{1/2}u^1. \qquad (3.76)$$

Докажем, что (в условиях данной теоремы) из существования сильного решения задачи (3.74), (3.75) следует, что задача (3.76), (3.75) также имеет на отрезке $[0,T]$ сильное решение $(y_1(t);y_2(t))^\tau$ со значениями в $\mathcal{H}^2$. Иными словами, учитывая свойство $V^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})}=V^+=F^{-1/2}B^{1/2}$ (лемма 3.2.9), в уравнении (3.74) можно во втором слагаемом слева раскрыть скобки, и тогда в (3.76), (3.75) каждое слагаемое будет непрерывной функцией t со значениями в $\mathcal{H}$.

Из (3.75) следует, что

$$y_2(t)=-i\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)}B^{1/2}A^{-1/2}y_1(s)ds+y_2(0).$$

Подставляя это соотношение в выражение в скобках в (3.74), приходим к выводу, что функция

$$\varphi(t):=F^{1/2}A^{-1/2}y_1(t)+\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)}V^*B^{1/2}A^{-1/2}y_1(s)ds+$$

$$+V^*B^{1/2}u^0\in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}F^{1/2})). \quad (3.77)$$

Считая $\varphi(t)$ и u^0 заданными, приходим к выводу, что функция $y_1(t)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра

$$y_1(t)+\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)}Ky_1(s)ds=\varphi_1(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})), \qquad (3.78)$$

$$K := A^{1/2}F^{-1/2}V^*B^{1/2}A^{-1/2}, \tag{3.79}$$

$$\varphi_1(t) := A^{-1/2}F^{-1/2}\varphi(t) - A^{1/2}F^{-1/2}V^*B^{1/2}u^0. \tag{3.80}$$

В самом деле, опираясь на свойство

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}F) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}B) \subset \mathcal{D}(B)$$

(см. (3.71)), а также лемму 3.2.9, получаем, что

$$A^{1/2}F^{-1/2}V^*B^{1/2}u^0 = A^{1/2}F^{-1/2}V^+B^{1/2}u^0 = A^{1/2}F^{-1}Bu^0 =$$

$$= (A^{1/2}F^{-1}A^{1/2})(A^{-1/2}Bu^0) \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}),$$

так как $A^{-1/2}Bu^0 \in \mathcal{H}$. Что касается первого слагаемого в (3.80), то свойство

$$A^{1/2}F^{-1/2}\varphi(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}))$$

следует из (3.77).

Таким образом, соотношение (3.77) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве

$$C([0,T];\mathcal{H}(A^{-1/2}FA^{-1/2})), \quad \mathcal{H}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) := \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}),$$

с нормой, эквивалентной норме графика:

$$||y_1||_{\mathcal{H}(A^{-1/2}FA^{-1/2})} := ||A^{-1/2}FA^{-1/2}y_1||_{\mathcal{H}}.$$

Проверим, что оператор K из (3.79) является линейным ограниченным оператором, действующим в $\mathcal{H}(A^{-1/2}FA^{-1/2})$. Для этого заметим, что если $y_1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2})$, то $B^{-1/2}A^{-1/2}y_1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2})$ и потому по лемме 3.2.9

$$Ky_1 = A^{1/2}F^{-1/2}V^*B^{1/2}A^{-1/2}y_1 = A^{1/2}F^{-1/2}V^+B^{1/2}A^{-1/2}y_1 =$$

$$= A^{1/2}F^{-1}BA^{-1/2}y_1 = (A^{-1/2}FA^{-1/2})^{-1}(A^{-1/2}BA^{-1/2})y_1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}),$$

так как $A^{-1/2}BA^{-1/2}y_1 \in \mathcal{H}$.

Отсюда и следует, что $K|_{\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})}$ ограничен как оператор, действующий в $\mathcal{H}(A^{-1/2}FA^{-1/2})$. Тогда ядро $K(t,s) := e^{-\alpha(t-s)}K$ интегрального оператора в уравнении (3.78) является непрерывной по t, s оператор-функцией со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H}(A^{-1/2}FA^{-1/2}))$. Поэтому по обычной теореме существования и единственности непрерывного решения уравнения Вольтерра второго рода (см., например, [21]) задача (3.78) имеет единственное решение $y_1(t) \in C([0,T];\mathcal{H}(A^{-1/2}FA^{-1/2}))$. Значит, в (3.74) в выражении $F^{1/2}A^{-1/2}y_1(t) + iV^*y_2(t)$ каждое слагаемое принадлежит $C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}F^{1/2}))$ и потому во втором слагаемом слева можно раскрыть скобки. Отсюда и следует, что задача (3.76), (3.75) имеет единственное решение

$$(y_1(t);y_2(t))^\tau \in C([0,T];\mathcal{H}^2).$$

3) Осуществим теперь обратный переход от задачи (3.76), (3.75) к исходной задаче (3.1), (3.29), возвращаясь последовательно сначала от задачи (3.52), (3.53) к задаче (3.33)-(3.37), затем к задаче (3.30) и, наконец, к (3.1), (3.29). При этом получаем, что задача (3.30) имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение $v(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, а потому исходная задача (3.1), (3.29) имеет на этом отрезке единственное сильное решение $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. $\square$

Замечание 3.2.12. При доказательстве теоремы 3.2.11 было использовано свойство $\mathcal{D}(A^{-1/2}F) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}B)$, следующее из свойства

$$\mathcal{R}(A^{1/2}F^{-1}A^{1/2}) = \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) = \\ = \mathcal{R}(A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2})$$

после применения оператора $A^{-1/2}$:

$$A^{-1/2}\mathcal{R}(A^{1/2}F^{-1}A^{1/2}) = \mathcal{R}(F^{-1}A^{1/2}) = \mathcal{D}(A^{-1/2}F) \subset A^{-1/2}\mathcal{R}(A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}) = \\ = \mathcal{R}(B^{-1}A^{1/2}) = \mathcal{D}(A^{-1/2}B). \quad \square$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\widetilde{W}_k(t,\xi)$ и $\widetilde{C}_k$ в (3.52) заданы формулами (3.129), (3.18), (3.19), (3.9), и приведём результат, аналогичный теореме 3.2.11, без доказательства.

Теорема 3.2.13. *Пусть в задаче* (3.1), (3.29) *выполнено условие* (3.40), *условия* (3.71), *а также условия*

$$\mathcal{D}(C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m},$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}.$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ *единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. $\square$

3.2.4 Случай средней интенсивности внутренней диссипации энергии. Рассмотрим, наконец, вариант, когда в задаче (3.33)-(3.37) выполнены условия (3.39), то есть

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset (F^{1/2}A^{-1/2}). \quad (3.81)$$

В этом случае в задаче Коши (3.52)-(3.129) оператор $\mathcal{F}_\alpha$ из (3.54) снова определён на $\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha)$ из (3.128), однако обладает свойствами, отличными от свойств операторов $\mathcal{F}_\alpha$ и $\overline{\mathcal{F}}_\alpha = \mathcal{F}$, возникших в пункте 3.2.3. При этом попрежнему справедливо утверждение леммы 3.2.8, а взамен леммы 3.2.9 справедливо утверждение, которое сейчас будет сформулировано.

Введём в рассмотрение вспомогательные операторы

$$Q := B^{1/2}F^{-1}A^{1/2}, \quad Q^+ := A^{1/2}F^{-1}B^{1/2}, \quad \mathcal{D}(Q^+) := \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad (3.82)$$

$$V := B^{1/2}F^{-1/2},\ V^{-1} := F^{1/2}B^{-1/2},\ \mathcal{D}(V) := \mathcal{R}(V^{-1}),\ \mathcal{R}(V) := \mathcal{D}(V^{-1}) = \mathcal{H},$$
$$V^+ := F^{-1/2}B^{1/2},\ (V^+)^{-1} = B^{-1/2}F^{1/2},\ \mathcal{D}(V^+) := \mathcal{D}(B^{1/2}),\ \mathcal{D}(V^+)^{-1} := \mathcal{D}(F^{1/2}). \quad (3.83)$$

Лемма 3.2.14. *Операторы* Q, Q^+, V *и* V^+ *обладают следующими свойствами:*

$$Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})}, \quad \overline{Q^+} = Q^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad (3.84)$$

$$V^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad (V^+)^{-1} = (V^{-1})^*|_{\mathcal{D}(F^{1/2})}, \quad \overline{(V^+)^{-1}} = (V^*)^{-1} = (V^{-1})^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \quad (3.85)$$

Доказательство. Оно проходит по тому же плану, что и в лемме 3.2.9.

1) Так как

$$Q = B^{1/2}F^{-1}A^{1/2} = (B^{1/2}A^{-1/2})(A^{1/2}F^{-1}A^{1/2}) = (B^{1/2}A^{-1/2})(A^{-1/2}FA^{-1/2})^{-1}$$

и выполнено среднее включение в (3.81), то оператор Q ограничен в $\mathcal{H}$.

2) Пусть теперь $u \in \mathcal{D}(B^{1/2})$ и $v \in \mathcal{H}$. Тогда

$$(Q^{+}u, v)_{\mathcal{H}} = (A^{1/2}F^{-1}B^{1/2}u, v)_{\mathcal{H}} = (u, B^{1/2}F^{-1}A^{1/2}v)_{\mathcal{H}} = (u, Qv)_{\mathcal{H}},$$

и потому справедливы свойства (3.84).

3) Аналогично для V^{-1} имеем, в силу правого включения (3.81),

$$V^{-1} = F^{-1/2}B^{1/2} = (F^{1/2}A^{-1/2})(A^{1/2}B^{1/2}) = (F^{1/2}A^{-1/2})(B^{1/2}A^{-1/2})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

4) Далее, пусть $u \in \mathcal{D}(F^{1/2}) = \mathcal{D}((V^{+})^{-1})$ и $v \in \mathcal{H}$. Тогда

$$((V^{+})^{-1}u, v)_{\mathcal{H}} = (B^{-1/2}F^{1/2}u, v)_{\mathcal{H}} = (u, F^{1/2}B^{-1/2}v)_{\mathcal{H}} = (u, V^{-1}v)_{\mathcal{H}}.$$

Отсюда и следуют свойства (3.85). □

Из леммы 3.2.14 следует, что оператор $V := (V^{-1})^{-1}$ является, вообще говоря, неограниченным оператором, заданным на области определения $\mathcal{D}(V) := \mathcal{R}(V^{-1})$; соответственно V^{*} также, вообще говоря, неограничен и $\mathcal{D}(V^{*}) = \mathcal{R}((V^{*})^{-1}) = \mathcal{R}((V^{-1})^{*})$. При этом $\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(V^{*}) = \mathcal{H}$.

Теорема 3.2.15. *Операторная матрица $\mathcal{F}_{\alpha}$ из* (3.54), (3.128) *в предположениях* (3.81) *допускает факторизацию вида*

$$\mathcal{F}_{\alpha} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iQ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & 0 \\ 0 & VV^{+} + \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iQ^{+} \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.86}$$

где Q, Q^{+}, V и V^{+} — операторы, введённые формулами (3.82)-(3.83) *и обладающие свойствами, описанными в лемме 3.2.14.*

Оператор $\mathcal{F}_{\alpha}$ допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора $\mathcal{F}$, который представим в виде

$$\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}_{\alpha} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iQ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & 0 \\ 0 & VV^{*} + \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iQ^{*} \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.87}$$

Он задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \{y = (y_1; y_2)^{\tau} \in \mathcal{H}^2 : y_1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}),\ y_1 + iQ^{*}y_2 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})\} \tag{3.88}$$

и действует по закону

$$\mathcal{F}y = \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2}(y_1 + iQ^*y_2) + \alpha y_1 \\ iB^{1/2}A^{-1/2}y_1 + \alpha y_2 \end{pmatrix}. \tag{3.89}$$

Доказательство. Формула (3.86) проверяется непосредственно на элементах из $\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha)$ с учётом обозначений (3.82)-(3.83). При этом в (3.86) второй и третий сомножители допускают замыкание путём замены V^+ и Q^+ на V^* и Q^* соответственно. После этого возникает оператор (3.87), первое слагаемое которого есть произведение замкнутых операторов, каждый из которых имеет ограниченный обратный, а второе — ограниченный оператор. Тогда $\mathcal{F}$ будет иметь в качестве области значений всё пространство $\mathcal{H}^2$ и потому будет замкнутым оператором. Так как после замыкания $\mathcal{F}_\alpha$ неравенство равномерной аккретивности (см. (3.57)) сохраняется и для $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}_\alpha$, то $\mathcal{F}$ является максимальным равномерно аккретивным оператором.

Убедимся теперь в справедливости формул (3.88), (3.89). Если $y \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$, то из (3.87) следует, что

$$\mathcal{F}y = \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2}(y_1 + iQ^*y_2) + \alpha y_1 \\ iQA^{-1/2}FA^{-1/2}(y_1 + iQ^*y_2) + (VV^* + \alpha I)y_2 \end{pmatrix}. \tag{3.90}$$

Отсюда получаем, что

$$y_1 + iQ^*y_2 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}), \quad y_2 \in \mathcal{D}(VV^*).$$

Пусть $y_2 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2})$. Тогда $y_2 \in \mathcal{D}(VV^+) = \mathcal{D}(B^{1/2}F^{-1}B^{1/2}) = \mathcal{D}(QA^{-1/2}B^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2})$, $y_2 \in \mathcal{D}(VV^*)$ и потому (согласно среднему включению (3.81))

$$Q^*y_2 = Q^+y_2 = A^{1/2}F^{-1}B^{1/2}y_2 =$$
$$= (A^{-1/2}FA^{-1/2})^{-1}(A^{-1/2}B^{1/2}y_2) \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}).$$

Отсюда с учётом соотношения $QA^{-1/2}FA^{-1/2} = B^{1/2}A^{-1/2}$ из второй строчки (3.90) получаем, что $y_1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2})$, и эта строка равна

$$iB^{1/2}A^{-1/2}y_1 - B^{1/2}A^{-1/2}(A^{1/2}F^{-1}B^{1/2}y_2) + VV^+y_2 + \alpha y_2 = iB^{1/2}A^{-1/2}y_1 -$$
$$-B^{1/2}F^{-1}B^{1/2}y_2 + B^{1/2}F^{-1}B^{1/2}y_2 + \alpha y_2 = iB^{1/2}A^{-1/2}y_1 + \alpha y_2, \quad y_2 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}). \tag{3.91}$$

Так как $\mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}) = \mathcal{R}(B^{-1/2}A^{1/2})$ плотно в $\mathcal{H}$, то после замыкания по элементам $y_2 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2})$ получаем формулу (3.91) при любых $y_2 \in \mathcal{H}$. $\square$

Рассмотрим теперь, опираясь на свойства оператора $\mathcal{F}$, задачу Коши, обобщающую задачу (3.52),(3.53) в варианте (3.13), (3.14), (3.8), следующего вида

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{F}y + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \widetilde{W}_k(t,\xi)\widetilde{C}_k y(\xi)d\xi = \widetilde{f}_\alpha(t), \tag{3.92}$$

$$y(0) = (A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau.$$

Так как здесь, согласно теореме 3.2.15, оператор $(-\mathcal{F})$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы, то эта задача, согласно теореме 3.0.15, имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$, если выполнены следующие условия:

1°. $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k) \supset \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad k = \overline{1,m}$;

2°. $\widetilde{W}_k(t,\xi)$, $\partial\widetilde{W}_k(t,\xi)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}^2))$;

3°. $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$;

4°. $\widetilde{f}_\alpha(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}^2)$.

Свяжем с (3.92) задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка в пространстве $\mathcal{H}$. Именно, назовём задачу Коши

$$\begin{gathered} A\frac{d^2u}{dt^2} + FA^{-1/2}(A^{1/2}\frac{du}{dt} + Q^*B^{1/2}u) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds = f(t), \\ u(0)=u^0, \ \ u'(0)=u^1, \end{gathered} \tag{3.93}$$

задачей, ассоциированной с исходной задачей (3.1) в предположениях (3.29).

Определение 3.2.16. Сильным решением ассоциированной задачи (3.93) на отрезке $[0,T]$ назовём функцию $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) \subset \mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия:

1°. $u(t) \in \mathcal{D}(B^{1/2})$ и $B^{1/2}u(t) \in C([0,T]; \mathcal{H})$;

2°. $A^{1/2}du/dt + Q^*B^{1/2}u \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})$
и $FA^{-1/2}(A^{1/2}(du/dt) + Q^*B^{1/2}u(t)) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

3°. $Au(t) \in C^2([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4°. для любого $t \in [0,T]$ выполнено уравнение (3.93), где все слагаемые являются элементами из $C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$, и начальные условия. $\square$

Оправданием для введения термина "ассоциированная" является следующий факт.

Лемма 3.2.17. *Если сильное решение* $u(t)$ *ассоциированной задачи* (3.93) *обладает дополнительными свойствами гладкости*

$$u(t) \in \mathcal{D}(B), \quad Bu(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{3.94}$$

то оно является сильным решением задачи (3.1)*,* (3.29) *в смысле определения 3.2.1, то есть на отрезке* $[0,T]$ *и со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Доказательство. В самом деле, если выполнены свойства (3.94), то

$$Q^* B^{1/2} u(t) = Q^+ B^{1/2} u(t) = A^{1/2} F^{-1} B u(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2} F A^{-1/2})).$$

Поэтому в (3.93) можно раскрыть скобки во втором слагаемом слева:

$$F A^{-1/2} (A^{1/2} \frac{du}{dt} + A^{1/2} F^{-1} B u(t)) = F \frac{du}{dt} + Bu,$$

причём здесь каждое слагаемое является элементом из $([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$. $\square$

Таким образом, задача (3.93) является обобщением задачи (3.1), (3.29) на случай, когда не имеют место свойства (3.94).

Теорема 3.2.18. *Пусть выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2} B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2} F), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})); \tag{3.95}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2} C_k A^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(B^{1/2} A^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}; \tag{3.96}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.97}$$

Тогда ассоциированная задача (3.93) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное (в смысле определения 3.2.16) решение со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 3.2.11.

1) Проверим, что при выполнении условий (3.95)-(3.97) имеют место свойства 1°-4°, обеспечивающие разрешимость задачи Коши (3.92).

Действительно, можно проверить, что при выполнении первых двух условий (3.95) имеет место свойство $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha) \subset \mathcal{D}(\mathcal{F})$. Далее, если $f(t)$ обладает свойством (3.95), то $\widetilde{f}_\alpha \in C^1([0,T];\mathcal{H}^2)$, если (см. доказательство теоремы 3.2.11)

$$A^{-1/2} G_k(t,s) C_k u^0,\ A^{-1/2} (\partial G_k(t,s)/\partial t) C_k u^0 \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H})). \tag{3.98}$$

Однако при $u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B)$ имеем $u^0 = B^{-1}A^{1/2}\eta^0, \quad \eta^0 \in \mathcal{H}$, и поэтому

$$A^{-1/2}G_k(t,s)C_k u^0 =$$

$$=(A^{-1/2}G_k(t,s)A^{1/2})\Big[(A^{-1/2}C_kA^{-1/2})(B^{1/2}A^{-1/2})^{-1}\Big](B^{-1/2}A^{1/2}\eta^0)\in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H})),$$

поскольку первый сомножитель есть элемент из $C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, второй сомножитель, согласно (3.96), ограничен, а оператор $B^{-1/2}A^{1/2}$ также ограничен. Аналогично доказывается и второе свойство (3.98).

Таким образом, при выполнении условий (3.95)-(3.97) упомянутые выше свойства 3° и 4° имеют место. Можно также непосредственно убедиться, опираясь на формулы (3.129), (3.13), (3.14), (3.88), что условия 1° и 2° выполнены, если справедливы свойства (3.96), (3.97).

Таким образом, при условиях(3.95)-(3.97) задача Коши (3.92) имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение $y(t)$ со значениями в $\mathcal{H}^2$.

2) Докажем теперь утверждение данной теоремы. Перепишем задачу (3.92) в векторно-матричной форме; имеем

$$\frac{dy_1}{dt} + A^{-1/2}FA^{-1/2}(y_1 + iQ^*y_2) + \alpha y_1 + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t e^{-\alpha(t-\xi)}\hat{V}_k(t,\xi)\hat{C}_k y_1(\xi)d\xi =$$

$$= e^{-\alpha t}(A^{-1/2}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\int_0^t \hat{G}_k(t,s)\hat{C}_kA^{1/2}u^0 ds), \quad y_1(0) = A^{1/2}u^1, \tag{3.99}$$

$$\frac{dy_2}{dt} + iB^{1/2}A^{-1/2}y_1 + \alpha y_2 = 0, \quad y_2(0) = -iB^{1/2}u^0. \tag{3.100}$$

Здесь в уравнениях все слагаемые являются функциями из $C([0,T];\mathcal{H})$.

Умножим обе части уравнений (3.99), (3.100) на $e^{\alpha t}$, затем выразим из (3.100) $e^{\alpha t}y_2(t)$ через $e^{\alpha t}y_1(t)$ и воспользуемся соотношениями (3.8), (3.13), (3.14), (3.31), (3.34), (3.35), (3.51) и связью $A^{1/2}u = v$. Тогда, после применения слева оператора $A^{1/2}$ в преобразованном уравнении (3.99), придём к уравнению (3.93), где все слагаемые — функции из $C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$. $\square$

Приведём, наконец, без доказательства утверждение о корректной разрешимости задачи (3.93) в варианте (3.9), (3.18),(3.19), (3.129).

Теорема 3.2.19. *Пусть выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}));$$

$$\mathcal{D}(C_k A^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m};$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}.$$

Тогда ассоциированная задача (3.93) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное (в смысле определения 3.2.16) решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. □

Отметим, что замечание 3.1.9 имеет силу и для теорем 3.2.5-3.2.6, 3.2.11-3.2.13, 3.2.18-3.2.19. В этих теоремах требование $f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$ также можно ослабить, заменив его условием (см. замечание 3.1.9)

$$A^{-1/2}f(t) \in W_p^1([0,T]; \mathcal{H}), \quad p > 1.$$

3.3 Случай полуограниченных операторных коэффициентов.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка вида

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds = f(t), \tag{3.101}$$

$$u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1.$$

Эта задача в случае самосопряжённых положительно определённых операторов F (оператор диссипации) и B (оператор потенциальной энергии) изучена в параграфе 4.1.3. В данном параграфе рассматривается вариант, когда эти операторы лишь ограничены снизу, т.е. в исследуемой динамической системе возможна подкачка энергии, причём система может быть статически неустойчива.

Будем считать, что

$$0 < A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad F = F^* \geqslant \gamma_F I, \quad B = B^* \geqslant \gamma_B I, \ \gamma_F, \gamma_B \in \mathbb{R}, \tag{3.102}$$

а ограничения на $G_k(t,s)$ и C_k сформулируем ниже.

Замечание 3.3.1. Далее под $\mathcal{D}(A^{-1/2}B)$ будем понимать множество

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}B) = \mathcal{D}(A^{-1/2}B_c) = \mathcal{R}(B_c^{-1}A^{1/2}) \subset \mathcal{H},$$

$$B_c := (B - \gamma_B I) + cI, \quad \forall c > 0, \quad \mathcal{D}(B_c) = \mathcal{D}(B).$$

Аналогично определяется множество

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) := \mathcal{D}(A^{-1/2}B_cA^{-1/2}). \qquad \square$$

С учётом замечаний 2.2.1, 3.102 дадим определение сильного решения задачи (3.101) со значениями в пространстве $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Определение 3.3.2. Назовём сильным решением задачи Коши (3.101) на отрезке $[0, T]$ такую функцию $u(t)$ со значениями в пространстве $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$, для которой выполнены следующие условия:

1°. $u(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}B))$;

2°. $u'(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(|B|^{1/2})) \cap C([0, T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}F))$, $|B| := (B^2)^{1/2}$;

3°. $Au''(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4°. все слагаемые в уравнении (3.101) непрерывны по t и принадлежат пространству $C([0, T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

5°. при любом $t \in [0, T]$ выполнено уравнение (3.101);

6°. выполнены начальные условия $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$. $\square$

Необходимыми условиями существования сильного решения задачи (3.101),(3.102) являются, очевидно, условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(|B|^{1/2}) \cap \mathcal{D}(A^{-1/2}F),$$

$$f(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Наша цель — выяснить ограничения на операторы F, B, C_k и оператор-функции $G_k(t, s)$, $k = \overline{1, m}$, при которых имеет место утверждение о существовании сильного решения задачи (3.101) со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$.

3.3.1 Предварительные преобразования. Будем считать, что задача (3.101) имеет сильное решение $u(t)$ в смысле определения 3.3.2, и осуществим, как и в 4.1.3, переход от этой задачи к задаче Коши для системы двух интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. Осуществляя в (3.101) замену $A^{1/2}u =: v$ и применяя слева оператор $A^{-1/2}$ (это можно сделать для сильного решения), приходим к задаче:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + A^{-1/2}FA^{-1/2}\frac{dv}{dt} + A^{-1/2}BA^{-1/2}v+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}v(s)ds = A^{-1/2}f(t), \tag{3.103}$$

$$v(0) = A^{1/2}u^0, \quad v'(0) = A^{1/2}u^1.$$

Здесь все слагаемые в уравнении являются элементами из $C([0,T];\mathcal{H})$.

Прежде чем перейти к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка, сформулируем ряд вспомогательных утверждений.

Определение 3.3.3. Будем говорить, что оператор $F = F^*$ имеет дискретный спектр $\sigma(F) = \sigma_d(F)$, если:

1) $\sigma(F)$ состоит из изолированных конечнократных вещественных собственных значений с предельной точкой $+\infty$;

2) система соответствующих собственных элементов образует ортогональный базис в $\mathcal{H}$. $\square$

Лемма 3.3.4. *Пусть $X \geqslant \gamma I$, $\gamma \in \mathbb{R}$, самосопряжённый оператор с дискретным спектром, имеющий конечное число $\varkappa$ (с учётом кратностей) отрицательных собственных значений. Пусть A ограниченный положительный оператор. Тогда спектр оператора $A^{-1/2}XA^{-1/2}$ имеет ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений и минимальное из них*

$$\lambda_{min}(A^{-1/2}XA^{-1/2}) = -1\Big/\left(\min_{u:(Xu,u)<0}\frac{(Au,u)}{(-Xu,u)}\right). \tag{3.104}$$

Доказательство. По теореме 2.1 из [71, с.38] положительная часть спектра линейного операторного пучка

$$M(\mu) := -\mu X - A$$

состоит из $\varkappa$ собственных значений $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_\varkappa$, причём

$$\mu_1 = \min_{u:(Xu,u)<0}\frac{(Au,u)}{(-Xu,u)} \tag{3.105}$$

Заметив, что задача $M(\mu)v = 0$ равносильна спектральной задаче $A^{-1/2}XA^{-1/2}u = \lambda u$, где $\lambda = -1/\mu$, $A^{1/2}v = u$, получаем, что отрицательная часть спектра оператора $A^{-1/2}XA^{-1/2}$ состоит из $\varkappa$ собственных значений $\lambda_k := -1/\mu_k$, $k = \overline{1, \varkappa}$. Отсюда следует, что $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\varkappa < 0$, и с учётом (3.105) приходим к формуле (3.104). □

Лемма 3.3.5. *Пусть оператор $X = X^* \geqslant \gamma I$, $\gamma \in \mathbb{R}$, имеет дискретный спектр, а оператор $A > 0$ ограничен. Тогда для выполнения условия*

$$X + \alpha A \gg 0, \quad \alpha > 0, \tag{3.106}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$A^{-1/2}XA^{-1/2} + \alpha I \gg 0. \tag{3.107}$$

Доказательство. Убедимся сперва непосредственной проверкой, что при условии (3.106) условие (3.107) также имеет место:

$$\Big((A^{-1/2}XA^{-1/2} + \alpha I)u, u\Big) = \Big((X + \alpha A)(A^{-1/2}u), (A^{-1/2}u)\Big) \geqslant$$

$$\geqslant c_1||A^{-1/2}u||^2 \geqslant c_1c_2||u||^2,\ u \in \mathcal{D}(A^{-1/2}XA^{-1/2}) = \mathcal{R}(A^{1/2}X_c^{-1}A^{1/2}).$$

Здесь $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — константы положительной определённости операторов $X + \alpha A$ и $A^{-1/2}$ соответственно.

Пусть теперь условие (3.107) выполнено, тогда

$$((X + \alpha A)u, u) := \Big(A^{1/2}(A^{-1/2}XA^{-1/2} + \alpha I)A^{1/2}u, u\Big) =$$

$$= \Big((A^{-1/2}XA^{-1/2} + \alpha I)\ (A^{1/2}u), (A^{1/2}u)\Big) \geqslant c_3||A^{1/2}u||^2 \geqslant 0,$$

$$c_3 > 0, \quad u \in \mathcal{D}(A^{-1/2}XA^{-1/2})$$

то есть оператор $X + \alpha A$ неотрицателен. Но если $((X + \alpha A)u, u) = 0$, то $||A^{1/2}u|| = 0$, а значит $u = 0$, откуда следует, что $X + \alpha A$ по крайней мере положительный оператор.

Покажем, что на самом деле он положительно определён. В самом деле, так как X имеет дискретный спектр, а A — ограничен, то $X + \alpha A$ тоже имеет дискретный спектр. Однако $X + \alpha A$ положителен. Значит он положительно определён. □

Будем далее считать, что операторы F и B в задаче (3.101) имеют дискретные спектры.

Возвращаясь к задаче (3.103), представим оператор B в виде:

$$A^{-1/2}BA^{-1/2} = A^{-1/2}BA^{-1/2} + \beta I - \beta I =: B_\beta - \beta I, \quad \beta \in \mathbb{R}_+, \tag{3.108}$$

и константу β выберем (см. лемму 3.3.4) из условия

$$\beta > \lambda_{\min}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) = 1 \Big/ \left(\min_{u:(Bu,u)<0} \frac{(Au,u)}{(-Bu,u)} \right), \tag{3.109}$$

и тогда $B_\beta \gg 0$. Заметим, что при этом по лемме 3.3.5 вместе с B_β положительно определён и оператор $B + \beta A =: \widetilde{B}_\beta$.

При условиях (3.108), (3.109) задача (3.103) перепишется в виде

$$\begin{gathered}\frac{d^2v}{dt^2} + A^{-1/2}FA^{-1/2}\frac{dv}{dt} + A^{-1/2}\widetilde{B}_\beta A^{-1/2}v + \\ + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}v(s)ds = A^{-1/2}f(t) + \beta v(t), \\ v(0) = A^{1/2}u^0, \quad v'(0) = A^{1/2}u^1,\end{gathered} \tag{3.110}$$

где теперь в правую часть входит искомая функция $v(t)$.

Для сильного решения задачи (3.110) проделаем те же преобразования, что и в параграфе 4.1.3. Введём новую искомую функцию:

$$-i\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}v(t) =: \frac{dw}{dt}, \quad w(0) = 0. \tag{3.111}$$

В силу свойства 2° из определения 3.3.2 получаем, что $d^2w/dt^2 \in C([0,T];\mathcal{H})$ и потому

$$\frac{d^2w}{dt^2} + i\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}\frac{dv}{dt} = 0, \quad w'(0) = -i\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}v(0) = -i\widetilde{B}_\beta^{1/2}u^0. \tag{3.112}$$

Действуя далее по схеме п.3.1.1, преобразуем ещё интегральные слагаемые в (3.110) и рассмотрим в дальнейшем два варианта, отвечающих случаям (3.8) и (3.9).

Так, в варианте (3.8) задача (3.110) с учётом (3.111), (3.112) равносильна задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка следующего вида:

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{F}_0 z + \sum_{k=0}^{m} \int\limits_0^t \widetilde{V}_k(t,\xi)\widetilde{C}_k z(\xi)d\xi = \widetilde{f}_0(t), \tag{3.113}$$

$$z(0) = z^0 := (A^{1/2}u^1; -i\widetilde{B}_\beta^{1/2}u^0)^\tau, \tag{3.114}$$

$$z(t) := (v'(t); w'(t))^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \tag{3.115}$$

$$\widetilde{f}_0(t) := (A^{-1/2}f(t) - \sum_{k=1}^{m} \int_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_k u^0 ds + \beta A^{1/2}u^0; 0)^\tau, \tag{3.116}$$

$$\mathcal{F}_0 := \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & iA^{-1/2}\widetilde{B}_\beta^{1/2} \\ i\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.117}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_0) := (\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \cap \mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2})) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}\widetilde{B}_\beta^{1/2}), \tag{3.118}$$

а операторы $\widetilde{V}_k(t,\xi)$ и $\widetilde{C}_k$ заданы формулами

$$\begin{gathered} \widetilde{V}_k(t,\xi) := \operatorname{diag}(\hat{V}_k(t,\xi); 0), \\ \hat{V}_k(t,\xi) := \int_\xi^t \hat{G}_k(t,s)ds = \int_\xi^t A^{-1/2}G_k(t,s)A^{1/2}ds,\ k = \overline{1,m}, \end{gathered} \tag{3.119}$$

$$\widetilde{C}_k := \operatorname{diag}(\hat{C}_k; 0), \quad \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) := \mathcal{D}(\hat{C}_k) \oplus \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.120}$$

$$\widetilde{V}_0(t,\xi)\widetilde{C}_0 = \operatorname{diag}(-\beta I; 0). \tag{3.121}$$

в случае (3.8) и формулами

$$\begin{gathered} \widetilde{V}_k(t,\xi) := \operatorname{diag}(\check{V}_k(t,\xi); 0), \\ \check{V}_k(t,\xi) := \int_\xi^t \check{G}_k(t,s)ds = \int_\xi^t A^{-1/2}G_k(t,s)ds, \end{gathered} \tag{3.122}$$

$$\widetilde{C}_k := \operatorname{diag}(\check{C}_k; 0), \quad \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) := \mathcal{D}(\check{C}_k) \oplus \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m}, \tag{3.123}$$

(3.121) в случае (3.9).

Осуществим ещё в (3.113) замену искомой функции

$$z(t) = e^{\alpha t}y(t), \quad \alpha > 0. \tag{3.124}$$

Константу α здесь выберем из условия (см. лемму 3.3.4):

$$\alpha > \lambda_{\min}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) = 1 \Big/ \left(\min_{u:(Fu,u)<0} \frac{(Au,u)}{(-Fu,u)} \right),$$

тогда $F_\alpha := A^{-1/2}FA^{-1/2} + \alpha I \gg 0$. Заметим, что при этом по лемме 3.3.5 вместе с F_α положительно определён и оператор $F + \alpha A =: \widetilde{F}_\alpha$.

Тогда для новой искомой функции $y(t)$ получим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt}+\mathcal{F}_\alpha y+\sum_{k=0}^{m}\int_0^t \widetilde{W}_k(t,\xi)\widetilde{C}_k y(\xi)d\xi=\widetilde{f}_\alpha(t), \tag{3.125}$$

$$y(0)=z(0)=(A^{1/2}u^1;-\widetilde{B}_\beta^{1/2}u^0)^\tau, \tag{3.126}$$

$$\mathcal{F}_\alpha:=\mathcal{F}_0+\alpha\mathcal{I}=\begin{pmatrix} A^{-1/2}\widetilde{F}_\alpha A^{-1/2} & iA^{-1/2}\widetilde{B}_\beta^{1/2} \\ i\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2} & \alpha I \end{pmatrix},\ \widetilde{F}_\alpha:=F+\alpha A\gg 0, \tag{3.127}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha)=\mathcal{D}(\mathcal{F}_0), \tag{3.128}$$

$$\widetilde{f}_\alpha(t):=e^{-\alpha t}\widetilde{f}_0(t),\quad \widetilde{W}_k(t,\xi):=e^{-\alpha(t-\xi)}\widetilde{V}_k(t,\xi), \tag{3.129}$$

где функция $\widetilde{f}_0(t)$ задана формулой (3.116), а $\widetilde{V}_k(t,\xi)$ и $\widetilde{C}_k$ — формулами (3.119), (3.120), (3.121) в обозначениях (3.8) и формулами (3.122), (3.123), (3.121) в обозначениях (3.9).

Заметим теперь, что операторные коэффициенты в задаче Коши (3.113) обладают теми же свойствами, что и операторные коэффициенты аналогичной задачи Коши (3.33)-(3.37), которая возникла в п.3.2.1. Поэтому дальнейшее исследование задачи (3.113) полностью повторяет исследование, проведенное в параграфе 4.1.3.

А именно, в зависимости от связей областей определения операторов $\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}$ и $A^{-1/2}FA^{-1/2}$ необходимо рассмотреть три случая

1°. Малая интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2})\subset\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}). \tag{3.130}$$

2°. Средняя интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2})\subset\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})\subset\mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2})\subset\mathcal{D}(\widetilde{F}_\alpha^{1/2}A^{-1/2}). \tag{3.131}$$

3°. Большая интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})\subset\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2})\subset\mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}). \tag{3.132}$$

Для каждого из этих вариантов в параграфе 4.1.3 получены теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи (3.101) в случае, когда $F\gg 0$ и $B\gg 0$.

В связи с тем, что рассуждения, которые необходимо провести для исследования задачи (3.125), полностью повторяют рассуждения проведенные в параграфе 4.1.3, сформулируем ниже без доказательства дальнейшие утверждения.

3.3.2 Итоговые утверждения. Для случая малой интенсивности диссипации энергии системы справедливы следующие факты.

Теорема 3.3.6. *Пусть в задаче* (3.101) *операторы* F *и* B *имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (3.130), (3.102), *а также условия*

$$\mathcal{D}(\widetilde{B}_{\beta}^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m}. \tag{3.133}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}. \tag{3.134}$$

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(\widetilde{B}_{\beta}^{1/2}). \tag{3.135}$$

$$f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})). \tag{3.136}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$ *на отрезке* $[0,T]$. □

Теорема 3.3.7. *Пусть в задаче* (3.101) *операторы* F *и* B *имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (3.130), (3.102), *а также условия*

$$\mathcal{D}(\widetilde{B}_{\beta}^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(C_kA^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m}, \tag{3.137}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}, \tag{3.138}$$

(3.135), (3.136). *Тогда эта задача имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$ *на отрезке* $[0,T]$. □

Для случая большой интенсивности диссипации энергии системы справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.3.8. *Пусть в задаче* (3.101) *операторы* F *и* B *имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (3.132), (3.102), *и условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \tag{3.139}$$

$$f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{3.140}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(\widetilde{F}_\alpha^{1/2}A^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m}, \tag{3.141}$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}. \tag{3.142}$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ *единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. □

Теорема 3.3.9. *Пусть в задаче* (3.101) *операторы* F *и* B *имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (3.132), (3.102), (3.139), (3.140), *а также условия*

$$\mathcal{D}(C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(\widetilde{F}_\alpha^{1/2}A^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m},$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}.$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ *единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. □

Для случая средней интенсивности диссипации энергии системы теоремы о разрешимости удаётся получить лишь для так называемого ассоциированного уравнения. Именно, назовём задачу Коши

$$\begin{gathered} A\frac{d^2u}{dt^2} + FA^{-1/2}(A^{1/2}\frac{du}{dt} + Q^*\widetilde{B}_\beta^{1/2}u) - \beta Au + \alpha A^{1/2}Q^*\widetilde{B}_\beta^{1/2} + \\ + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)C_ku(s)ds = f(t), \quad u(0)=u^0, \quad u'(0)=u^1, \end{gathered} \tag{3.143}$$

где $Q := \widetilde{B}_\beta^{1/2}\widetilde{F}_\alpha^{-1}A^{1/2}$, задачей, ассоциированной с исходной задачей (3.101) в предположениях (3.102).

Определение 3.3.10. Сильным решением ассоциированной задачи (3.143) на отрезке $[0,T]$ назовём функцию $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) \subset \mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия:

1°. $u(t) \in \mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2})$ и $\widetilde{B}_\beta^{1/2}u(t) \in C([0,T]; \mathcal{H})$;

2°. $A^{1/2}du/dt + Q^*\widetilde{B}_\beta^{1/2}u \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})$
и $FA^{-1/2}(A^{1/2}(du/dt) + Q^*\widetilde{B}_\beta^{1/2}u(t)) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

3°. $Au(t) \in C^2([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4°. для любого $t \in [0,T]$ выполнено уравнение (3.143), где все слагаемые являются элементами из $C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$, и начальные условия. □

Здесь, как и в п.3.2.4, справедливо следующее утверждение, объясняющее термин "ассоциированное уравнение".

Лемма 3.3.11. *Если сильное решение $u(t)$ ассоциированной задачи* (3.143) *обладает дополнительными свойствами гладкости*

$$u(t) \in \mathcal{D}(B), \quad Bu(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{3.144}$$

то оно является сильным решением задачи (3.101), (3.102) *в смысле определения 3.3.2, то есть на отрезке* $[0,T]$ *и со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. □

Для ассоциированного уравнения справедливы следующие результаты.

Теорема 3.3.12. *Пусть операторы F и B имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (3.131), (3.102), *а также условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})); \tag{3.145}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m}; \tag{3.146}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}. \tag{3.147}$$

Тогда ассоциированная задача (3.143) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное (в смысле определения 3.3.10) решение со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

□

Теорема 3.3.13. *Пусть операторы F и B имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (3.131), (3.102), (3.145), *а также условия*

$$\mathcal{D}(C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m};$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}.$$

Тогда ассоциированная задача (3.143) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное (в смысле определения 3.3.10) решение $u(t)$ со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. □

Выводы. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для неполного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка, неразрешённого относительно старшей производной. Применены два подхода: связанный с переходом к системе двух уравнений первого порядка и второй, связанный с использованием теории операторных косинус- и синус-функций.

Исследован класс полных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами, неразрешённых относительно старшей производной, когда один из операторов имеет область определения, наиболее узкую по сравнению с областями определения других операторных коэффициентов. Применён метод факторизации, позволяющей разделить исследуемые уравнения на три основных типа. Для каждого типа уравнений доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши.

Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задач Коши для полных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами, неразрешённых относительно старшей производной, когда имеет место подкачка энергии системы (оператор диссипации энергии ограничен снизу), а система может быть неустойчива (оператор потенциальной энергии ограничен снизу).

ГЛАВА 4

Спектральные задачи, ассоциированные с интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра

4.1 Некоторые классы ассоциированных спектральных задач для интегро-дифференцитальных уравнений первого порядка.

4.1.1 Простейший частный случай. Вернёмся к спектральной проблеме п.2.2.1, то есть к задаче (2.32) и соответствующей спектральной проблеме для операторного пучка (2.37).

Рассмотрим ситуацию, когда операторы F и C_k, $k = \overline{1,m}$, образующие матричный оператор $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ по формулам (2.22)-(2.25), удовлетворяют условиям

$$F = F^* \gg 0, \quad C_k = \alpha_k F, \quad \alpha_k > 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{4.1}$$

В этом случае справедлива следующая

Теорема 4.1.1. *При выполнении условий* (4.1) *пучок* $L(\lambda)$ *принимает вид*

$$L(\lambda) := I - \lambda A^{1/2}F^{-1}A^{1/2} + \sum_{k=1}^{m}(\gamma_k - \lambda)^{-1}\alpha_k I.$$

Тогда все собственные значения операторного пучка $L(\lambda)$ *можно найти из следующей последовательности скалярных характеристических уравнений:*

$$\varphi(\lambda) := \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\gamma_k - \lambda} + 1 = \lambda \cdot \lambda_n(A^{1/2}F^{-1}A^{1/2}), \quad n = 1, 2 \ldots, \tag{4.2}$$

где $\{\lambda_n(A^{1/2}F^{-1}A^{1/2})\}_{n=1}^{\infty}$ *— (конечнократные) собственные значения компактного положительного оператора* $A^{1/2}F^{-1}A^{1/2}$.

В этом случае спектр пучка $L(\lambda)$ *дискретен, за исключением* $+\infty$ *и* m *конечных точек сгущения* $\{\beta_k\}_{k=1}^{m}$, $\varphi(\beta_k) = 0$, $k = \overline{1,m}$, $0 < \gamma_1 < \beta_1 <$

$\ldots < \gamma_m < \beta_m < \infty$. Он состоит из не более чем конечного множества невещественных собственных значений и имеет $m+1$ ветвь положительных собственных значений, причём одна из ветвей имеет пределом $+\infty$, а другие m — $\{\beta_k\}_{k=1}^m$.

Более того, если $\{\widetilde{u}_n\}_{n=1}^\infty$, $u_n = (u_{0n}; \widehat{u}_{1n})^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}}$, — собственные элементы оператора $\mathcal{F}_\mathcal{A}$, отвечающие ветви собственных значений, стремящихся к $+\infty$ (к ветвям собственных значений, стремящихся к $\{\beta_k\}_{k=1}^m$), то их проекции $\{u_{0n}^{(\infty)}\}_{n=1}^\infty$ на $\mathcal{H}$ образуют ортонормированный базис с конечным дефектом в пространстве $\mathcal{E}^{-1/2}$ (соответственно, проекции $\{\widehat{u}_{1n}^{(\infty)}\}_{n=1}^\infty$ на $\widehat{\mathcal{H}}_1$ образуют базис Рисса с конечным дефектом в пространстве $\widehat{\mathcal{H}}_1$). Если выполнено условие $F^{-1} \in \mathfrak{S}_{p_0}$, то указанный базис Рисса является p_0-базисами (с конечным дефектом) в $\mathcal{E}^{-1/2}$. □

Доказательство. Доказательство всех фактов приведенной теоремы проводится по аналогии с доказательством теоремы 2.19 из [4] (см. с.21-23) и потому здесь не приводится.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда вместо (4.1) выполнены близкие, но более общие условия

$$Q_k^* Q_k = \alpha_k I + N_k, \quad N_k = N_k^* \in \mathfrak{S}_\infty, \quad k = \overline{1,m}. \tag{4.3}$$

Для определённости соответствующий оператор $\mathcal{F}_\mathcal{A}$ будем обозначать $\mathcal{F}_\mathcal{A}(N)$.

С учётом условий (4.3) пучок $L(\lambda)$ перепишем в виде

$$L(\lambda) := \varphi(\lambda)I - \lambda A^{1/2}F^{-1}A^{1/2} + \sum_{k=1}^m (\gamma_k - \lambda)^{-1} A^{1/2}F^{-1/2}N_k F^{1/2}A^{-1/2}, \tag{4.4}$$

где $\varphi(\lambda)$ — функция (4.2).

Тогда для $L(\lambda)$ справедлива следующая

Теорема 4.1.2. *Пусть выполнены условия* (4.3). *Тогда*

$$\sigma(\mathcal{F}_\mathcal{A}(N)) \backslash (\{+\infty\} \cup \{\beta_k\}_{k=1}^m) \tag{4.5}$$

является дискретным множеством, образующим $m+1$ ветвь

$$\{\{\lambda_j^{(k)}\}_{j=1}^\infty\}_{k=1}^m \cup \{\lambda_j^{(\infty)}\}_{j=1}^\infty$$

положительных собственных значений с предельными точками $\{\beta_k\}_{k=1}^m$ и ∞ соответственно, а также, возможно, включающие в себя конечное число невещественных собственных значений.

При этом, если $\{\widetilde{u}_n^{(\infty)}\}_{n=1}^\infty$, $\widetilde{u}_n^{(\infty)} = (u_{0n}^{(\infty)}; \widehat{u}_{1n}^{(\infty)})^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}}$ ($\{\widetilde{u}_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$, $\widetilde{u}_n^{(k)} = (u_{0n}^{(k)}; \widehat{u}_{1n}^{(k)})^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}}$) — собственные элементы оператора $\mathcal{F}_\mathcal{A}(N)$, отвечающие ветви $\{\lambda_j^{(\infty)}\}_{j=1}^\infty$ собственных значений, стремящихся к $+\infty$ (к ветвям собственных значений $\{\lambda_j^{(k)}\}_{j=1}^\infty$, стремящихся к β_k, $k = \overline{1,m}$), то их проекции $\{u_{0n}^{(\infty)}\}_{n=1}^\infty$ на $\mathcal{H}$ образуют базис Рисса с конечным дефектом в пространстве $\mathcal{H}_F := \mathcal{D}(F^{1/2})$ (замкнутая линейная оболочка проекций $\widehat{u}_{1n}^{(k)}$, $k = \overline{1,m}$, на $\widehat{\mathcal{H}}_1$ есть подпространство конечной коразмерности в $\widehat{\mathcal{H}}_1$).

При дополнительном условии

$$\ker(\mathcal{F}_\mathcal{A}(N) - \beta_k \mathcal{I}) = 0, \quad k = \overline{1,m}, \tag{4.6}$$

система $\widehat{u}_{1n}^{(k)}$, $k = \overline{1,m}$, образует базис Рисса в своей замкнутой линейной оболочке. $\square$

Доказательство. Оно проводится так же, как доказательство теоремы 3.2 из [4, с.24-26]. Отметим только, что в возникшей здесь проблеме $L(\lambda)v_0 = 0$ для операторного пучка $L(\lambda)$ из (4.4) необходимо предварительно сделать замену $F^{1/2}A^{-1/2}v_0 = \varphi_0$ и перейти к задаче $L_0(\lambda)\varphi_0 = 0$ для самосопряжённого операторного пучка

$$L_0(\lambda) := \varphi(\lambda) - \lambda F^{-1/2}AF^{-1/2} + \sum_{k=1}^m (\gamma_k - \lambda)^{-1} N_k = (L_0(\overline{\lambda}))^*, \tag{4.7}$$

который по общим свойствам совпадает с пучком (3.2) из [4]. $\square$

4.1.2 Задача с отсутствием диссипативных интегральных слагаемых.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения (2.38), когда $C = 0$, то есть в случае, когда интегральные диссипативные слагаемые отсутствуют:

$$A\frac{du}{dt} + Fu - \int_0^t e^{-\rho(t-s)} Vu(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{4.8}$$

$$0 < A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad F = F^* \gg 0,$$

$$V = V^* > 0, \quad \rho > 0.$$

По теореме 2.3.5 эта задача имеет единственное сильное решение $u(t)$, $t \in [0, T]$ со значениями в пространстве $\mathcal{D}(A^{-1/2})$, если выполнены условия (2.56):

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Введём новую искомую функцию

$$v := -\int\limits_0^t e^{-\rho(t-s)} V^{1/2} u(s) ds + v(0),$$

тогда, учитывая, что $u(t)$ — сильное решение (4.8), получим

$$\frac{dv}{dt} = -V^{1/2}u - \rho(v - v(0)). \tag{4.9}$$

Вместе с (4.8) уравнение (4.9) приводит к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F & V^{1/2} \\ V^{1/2} & \rho I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) + V^{1/2} v(0) \\ \rho v(0) \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Осуществим в (4.10) замену $A^{1/2}u =: w$ и применим оператор $\operatorname{diag}(A^{-1/2}; I)$, будем иметь:

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{F}_0 y = \widetilde{f}(t), \quad y(0) = (A^{1/2}u^0, v(0))^\tau, \tag{4.11}$$

где

$$y(t) = (w(t); v(t))^\tau \in \mathcal{H}^2, \quad f(t) = (A^{-1/2}f(t) + A^{-1/2}V^{1/2}v(0); \rho v(0))^\tau,$$

$$\mathcal{F}_0 := \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & A^{-1/2}V^{1/2} \\ V^{1/2}A^{-1/2} & \rho I \end{pmatrix}.$$

Будем далее полагать, что области определения операторов $V^{1/2}A^{-1/2}$ и $A^{-1/2}FA^{-1/2}$ связаны следующим образом

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(V^{1/2}A^{-1/2}).$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & V^{1/2} \\ V^{1/2} & \rho I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Оператор, стоящий в центре, допускает факторизацию с симметричным окаймлением (см. теорему 2.2.8):

$$\begin{pmatrix} F & V^{1/2} \\ V^{1/2} & \rho I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q^{+} \\ Q & \rho I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где $Q := V^{1/2}F^{-1/2}$, $Q^{+} := F^{-1/2}V^{1/2}$. По лемме 2.3.2 эти операторы обладают следующими свойствами

$$Q^{+} = Q^{*}|_{\mathcal{D}(V^{1/2})}, \quad \overline{Q^{+}} = Q^{*}.$$

С учётом этих фактов оператор $\mathcal{F}_0$ допускает следующую факторизацию:

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} A^{-1/2}F^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q^{+} \\ Q & \rho I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{1/2}A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

а его замыкание $\mathcal{F} := \overline{\mathcal{F}_0}$ представимо в виде

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} A^{-1/2}F^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q^{*} \\ Q & \rho I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{1/2}A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Будем вместо (4.11) рассматривать уравнение с замкнутым оператором $\mathcal{F}$:

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{F}y = \widetilde{f}(t), \quad y(0) = (A^{1/2}u^0; v(0))^{\tau}. \tag{4.13}$$

Рассмотрим нормальные колебания, отвечающие задаче (4.13):

$$y(t) = ye^{-\lambda t}, \quad y \in \mathcal{H}^2. \tag{4.14}$$

Подставляя (4.14) в однородное уравнение (4.13), для определения амплитудных элементов $y \in \mathcal{H}$ и собственных значений $\lambda \in \mathbb{C}$ приходим к спектральной задаче

$$\mathcal{F}y = \lambda y, \quad y \in \mathcal{F}. \tag{4.15}$$

Далее задачу (4.15) будем называть задачей, ассоциированной с исходной эволюционной задачей (4.8).

Так как оператор $\mathcal{F}$ из (4.12) самосопряжён, то спектр задачи (4.15) вещественный. Для более детального исследования свойств решений задачи (4.15) перепишем её в векторно-матричной форме:

$$\begin{pmatrix} A^{-1/2}F^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & Q^{*} \\ Q & \rho I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^{1/2}A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

а затем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} F^{1/2}A^{-1/2}w + Q^*v = \lambda F^{-1/2}A^{1/2}w, \\ QF^{1/2}A^{-1/2}w + \rho v = \lambda v. \end{cases} \tag{4.17}$$

Заметим, что для оператора, стоящего в центре в (4.12), справедливо неравенство

$$\begin{pmatrix} I & Q^* \\ Q & \rho I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \geqslant (\rho - ||Q^*Q||)\, ||v||^2.$$

Отсюда непосредственно следует, что при выполнении условия

$$\rho \geqslant ||Q^*Q||, \tag{4.18}$$

оператор $\mathcal{F}$, а значит и спектр задачи (4.15), неотрицателен.

Исключая из (4.17) v и осуществляя замену $F^{1/2}A^{-1/2}w =: \varphi$, получим взамен спектральную задачу

$$\mathcal{L}(\lambda)\varphi := (I - \lambda L + (\lambda - \rho)^{-1}M)\varphi = 0, \tag{4.19}$$

где

$$0 < L := F^{-1/2}AF^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \ker L = \ker A = \{0\}, \tag{4.20}$$

$$M := Q^*Q, \quad \ker(Q^*Q) = \{0\}. \tag{4.21}$$

Далее будем считать, что $Q \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, и тогда

$$0 < M = M^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{4.22}$$

Осуществим в пучке $(\lambda - \rho)L(\lambda)$ замену спектрального параметра $\lambda - \rho =: \mu$, получим задачу

$$\mathcal{M}(\mu)\varphi := (-\mu^2 L - \mu(\rho L - I) + M)\varphi = 0. \tag{4.23}$$

Для дальнейшего исследования представим пучок $\mathcal{M}(\mu)$ в виде

$$\mathcal{M}(\mu) := \mu I - N - B(\mu), \tag{4.24}$$

где $N := -M \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, $\ker N = \{0\}$, $B(\mu) := \mu(\rho L) + \mu^2 L$.

Приведём теперь без доказательства (см. [47], а также [37]) некоторые известные факты, касающиеся исследования оператор-функции вида

$$\mathcal{M}(\mu) := \mu I - N - B(\mu), \tag{4.25}$$

где $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, а $B(\mu)$ — оператор-функция, голоморфная в некотором круге $|\mu| < r$:

$$B(\mu) := \sum_{k=1}^{\infty} B_k \mu^k, \quad B_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad |\mu| < r.$$

Лемма 4.1.3. *Пусть для некоторого $t \in (0, r)$ выполнено условие*

$$||N||t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} ||B_k||t^{k-1} < 1. \tag{4.26}$$

Тогда оператор функция $\mathcal{M}(\mu)$ из (4.25) *допускает спектральную факторизацию вида*

$$\mathcal{M}(\mu) = W_+(\mu)(\mu I - Z), \tag{4.27}$$

где спектр $\sigma(Z) \subset \{\mu : |\mu| < t\}$, а $W_+(\mu)$ — голоморфная и голоморфно обратимая оператор-функция в замкнутом круге $\{\mu : |\mu| \leqslant t\}$. □

Лемма 4.1.4. *Если Z из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет положительно определённый симметризатор $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т.е. $R = R^* \gg 0$, то Z подобен самосопряжённому оператору.* □

Лемма 4.1.5. *Пусть для оператор-функции* (4.25) *выполнены условия* (4.26) *и $N = N^*$, $B_k = B_k^*$, $k = 1, 2 \ldots$.*

Тогда фактор Z, появляющийся при факторизации (4.27) *пучка $\mathcal{M}(\mu)$, допускает симметризацию справа оператором*

$$R := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu|=t} \mathcal{M}^{-1}(\mu) d\mu. \quad \square \tag{4.28}$$

Лемма 4.1.6. *Пусть выполнены условия леммы 4.1.5. Тогда симметризатор R оператора Z из разложения* (4.27) *является положительно определённым в $\mathcal{H}$.* □

Лемма 4.1.7. *Пусть выполнены условия* (4.26) *и*

$$N \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad B_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{4.29}$$

Тогда симметризатор R для фактора Z из разложения (4.27) *имеет структуру $R = I + T$, $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$.* □

Лемма 4.1.8. *Если выполнены условия* (4.26), (4.29), *то система собственных элементов* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, *отвечающая собственным значениям оператора* Z, *т.е. собственным значениям оператор-функции* $\mathcal{M}(\mu)$ *из промежутка* $(-t, t)$, *образует* p*-базис в* $\mathcal{H}$ *при* $p = \infty$. □

Теорема 4.1.9. *(В.И. Ломоносов)(см. [10, с.8]). Пусть* $M(\mu)$ — *самосопряжённая оператор-функция в односвязной и симметрической относительно вещественной оси области* Λ, *допускающая представление* (4.27), *где* $W_+(\mu)$ *голоморфна и голоморфно обратима в* Λ, *а* $\sigma(Z) \subset \Lambda$. *Если* $\Gamma \subset \Lambda$ — *произвольный контур, охватывающий* $\sigma(Z)$, *то операторы*

$$R := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \mathcal{M}^{-1}(\mu) d\mu,$$

$$R^{-1} := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mu I - Z^*)^{-1} \mathcal{M}(\mu)(\mu I - Z)^{-1} d\mu \tag{4.30}$$

являются самосопряжёнными и взаимно обратными. □

Теорема 4.1.10. *(В.А. Гринштейн, Н.Д. Копачевский)(см. [22], а также [37]). Если выполнены условия* (4.26),

$$N = N^* \in \mathfrak{S}_{p_0}, \quad B_k = B_k^* \in \mathfrak{S}_{p_k}, \quad 0 < p_k < \infty, \ k = \overline{1, m},$$

для пучка $\mathcal{M}(\mu)$, *то система* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ *собственных элементов* $\mathcal{M}(\mu)$, *отвечающая собственным значениям* $\{\mu_{0j}\}_{j=1}^{\infty} \subset (-t, t)$, *образует* p*-базис в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$, *при* $p \geqslant \widetilde{p}$,

$$\widetilde{p} := [\min(p_1^{-1}, p_0^{-1} + p_2^{-1}, 2p_0^{-1} + p_3^{-1}, \ldots, (m-1)p_0^{-1} + p_m^{-1}, mp_0^{-1})]^{-1}. \quad \square$$

Теорема 4.1.11. *(см. [37]) Пусть для операторного пучка* (4.24) *выполнены условия*

$$N = N^* \in \mathfrak{S}_{\infty}(\mathcal{H}), \quad \ker N = \{0\}, \quad B_1 \in \mathfrak{S}_{\infty}(\mathcal{H}),$$

$$\nu_n^{\pm}(N) = \pm a_{\pm}^{-1/\alpha_{\pm}} n^{1/\alpha_{\pm}} [1 + o(1)], \quad n \to \infty \tag{4.31}$$

$$\alpha_{\pm} > 0, \quad a_{\pm} > 0.$$

Тогда $\mathcal{M}(\mu)$ *имеет две ветви собственных значений* $\mu_n^{\pm}(\mathcal{M}(\mu))$, *локализованных на положительной и отрицательной полуосях соответственно* *и имеющих предельную точку $\mu = 0$. Асимптотическое поведение этих ветвей таково:*

$$\mu_n^{\pm}(\mathcal{M}(\mu)) = (\nu_n^{\pm}(N))^{-1}[1 + o(1)] \quad (n \to \infty),$$

где $\nu_n^{\pm}(N)$ — характеристические числа оператора N (с асимптотическим поведением (4.31)*).* □

Опираясь на факты, изложенные в леммах 4.1.3-4.1.8, сформулируем утверждение о спектре оператор-функции (4.23).

Теорема 4.1.12. *Пусть для операторного пучка* (4.23) *с коэффициентами из* (4.20), (4.21), (4.22) *выполнены условия:*

$$4||L|| \cdot ||M|| < (1 - \rho||L||)^2, \quad \rho||L|| < 1, \tag{4.32}$$

$$r_{\pm} := \frac{1 - \rho||L|| \pm \sqrt{(1 - \rho||L||)^2 - 4||L|| \cdot ||M||}}{2||M||}, \quad 0 < r_- < r_+ < \infty.$$

Тогда:

1° *Операторный пучок $\mathcal{M}(\mu)$ имеет дискретный вещественный спектр с предельными точками $\mu = 0$, $\mu = \infty$.*

2° *Предельной точке $\mu = 0$ отвечает ветвь $\{\mu_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ изолированных конечнократных собственных значений $\mu = \mu_{0n}$, расположенных на отрезке $(-r_-, r_-) \subset \mathbb{R}$. Соответствующая система собственных элементов (присоединённых нет) образует p-базис в $\mathcal{H}_F$, при $p = \infty$.*

3° *Предельной точке $\mu = \infty$ отвечает ветвь $\{\mu_{\infty n}\}_{n=1}^{\infty}$ изолированных конечнократных собственных значений $\mu = \mu_{\infty n}$, расположенных вне промежутка $(-r_+, r_+)$. Соответствующая система собственных элементов (присоединённых нет) образует p-базис в $\mathcal{H}_F$, при $p = \infty$.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение 2°. Условия (4.32) для оператор-функции (4.23) означают, что для $\mathcal{M}(\mu)$ выполнено условие леммы 4.1.3 при $t \in (r_-, r_+)$, достаточное для факторизации (4.27):

$$\mathcal{M}(\mu) \equiv W_+(\mu)(\mu I - Z), \tag{4.33}$$

где $W_+(\mu) = W_+(0) + \mu W'_+(0)$ — линейный пучок. Приравнивая коэффициенты при степенях μ^0 и μ^1 в тождестве (4.33), получим

$$Z = -W_+^{-1}(0)M \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \tag{4.34}$$

$$W_+(0) = I - \rho L + W_+'(0)Z =: I - T, \quad T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{4.35}$$

Отсюда имеем

$$Z = -(I-T)^{-1}M = -(I+S)M, \quad S = (I-T)^{-1} - I \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}).$$

Отметим, что спектральная задача

$$\mathcal{M}(\mu)\varphi \equiv W_+(\mu)(\mu I - Z)\varphi = 0, \quad |\mu| \leqslant r_+,$$

(в силу обратимости $W_+(\mu)$) равносильна задаче

$$Z\varphi = \mu\varphi, \quad Z = -(I+S)M, \quad |\mu| \leqslant r_+, \quad \sigma(Z) \subset \{\mu : -r_- < \mu < r_-\}. \tag{4.36}$$

Так как $\mathcal{M}(\mu)$ — самосопряжённый пучок, то по лемме 4.1.5 фактор Z симметризуется справа оператором R из (4.28):

$$R = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu|=t} \mathcal{M}^{-1}(\mu)d\mu, \quad t \in (r_-, r_+).$$

Рассматривая задачу (4.36) в круге $|\mu| < t$, осуществим в ней замену

$$\varphi = R^{1/2}\psi, \quad \psi \in \mathcal{H}, \tag{4.37}$$

и подействуем на обе части (4.36) оператором $R^{-1/2}$. Возникает задача

$$K\psi := R^{-1/2}(ZR)R^{-1/2}\psi = \mu\psi, \quad \mu \in (-r_-, r_-). \tag{4.38}$$

Поскольку здесь оператор ZR самосопряжён и компактен, а его ядро нулевое, то (4.38) есть задача на собственные значения для полного самосопряжённого оператора K. Поэтому, согласно теореме Гильберта-Шмидта, она имеет счётное множество конечнократных собственных значений μ_{0j} с единственной предельной точкой $\mu = 0$

$$\mu_{0j} = \mu_j(K) = \mu_j(Z), \quad \mu_j \to 0 \ (j \to \infty),$$

и полную ортонормированную систему собственных векторов $(\psi_j, \psi_k) = \delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера.

Поэтому в задаче (4.36) в силу замены (4.37) имеем

$$\sigma(Z) = \{0\} \cup \{\mu_{0j}\}_{j=1}^\infty, \quad \varphi = \varphi_j = R^{1/2}\psi_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{4.39}$$

где $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис оператора K.

Так как операторы L и M из (4.23) компактны, то выполнены условия лемм 4.1.7 и 4.1.8, а значит система собственных элементов $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающая собственным значениям оператора Z, т.е. собственным значениям оператор-функции (4.23) из промежутка $(-r_-, r_-)$, образует p-базис в $\mathcal{H}$ при $p = \infty$. Отсюда (с учётом замен) следует, что система собственных элементов $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ исходной задачи образует p-базис в пространстве $\mathcal{H}_F := \mathcal{D}(F^{1/2})$. На этом доказательство пункта 2° полностью завершено.

Доказательство утверждения 3° о ветви собственных значений с предельной точкой $\mu = \infty$ и соответствующей системе собственных элементов проводится в точности по схеме доказательства пункта 2°, только для пучка

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\omega) := \omega^2 M - \omega(\rho L - I) - L, \tag{4.40}$$

который получается из пучка (4.23) после замены $\omega = \mu^{-1}$ и умножения на ω^2.

Здесь следует учесть, что для факторизационной окружности

$$\begin{gathered} |\omega| = \widetilde{t} \in (\widetilde{r}_-, \widetilde{r}_+), \\ \widetilde{r}_{\pm} = 1/r_{\mp} = (1 - \rho||L|| \pm \sqrt{(1-\rho||L||)^2 - 4||L|| \cdot ||M||})/(2||L||). \end{gathered} \tag{4.41}$$

Опираясь на доказательство пункта 2°, получим для $\widetilde{\mathcal{M}}(\omega)$ следующий результат.

Задача $\widetilde{\mathcal{M}}(\omega)\xi = 0$ имеет счётное множество конечнократных изолированных собственных значений $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\omega_n \to 0$ $(n \to \infty)$, расположенных на отрезке $(-\widetilde{r}_-, \widetilde{r}_-)$, и отвечающую им систему собственных элементов $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$, которая образует p-базис в $\mathcal{H}$, при $p = \infty$.

Вспоминая, что $\omega = \mu^{-1}$, учитывая (4.41) и возвращаясь к пучку $\mathcal{M}(\mu)$, получим

$$\mu_{\infty n} = \omega_n^{-1} \to \infty, \ (n \to \infty), \quad |\mu| > r_+.$$

Системы собственных элементов для пучков $\mathcal{M}(\mu)$ и $\widetilde{\mathcal{M}}(\omega)$ совпадают, значит система собственных элементов $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ исходной задачи образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}_F := \mathcal{D}(F^{1/2})$.

Этим завершается доказательство теоремы, так как утверждение 1° следует из утверждений 2° и 3°. $\square$

На основе теорем 4.1.9, 4.1.10 сформулируем теперь для пучка (4.23) следующий результат.

Теорема 4.1.13. *Пусть выполнены условия* (4.32),

$$M = M^* \in \mathfrak{S}_\infty, \quad L = L^* \in \mathfrak{S}_{p_L}. \tag{4.42}$$

Тогда система $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ *собственных элементов* $\mathcal{M}(\mu)$, *отвечающая собственным значениям* $\{\mu_{0j}\}_{j=1}^\infty \subset (-t, t)$, *образует* p*-базис в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}_F$, *при* $p \geqslant p_L$.

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства теоремы 4.1.10 и потому здесь не приводится. $\square$

Замечание 4.1.14. Легко заметить, что при выполнении условий (4.32) и (4.42) теорема 4.1.13 справедлива и для пучка $\widetilde{\mathcal{M}}(\omega)$ из (4.40), то есть система собственных векторов, отвечающая собственным значениям $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty \subset (-\widetilde{r}_-, \widetilde{r}_-)$ задачи $\widetilde{\mathcal{M}}(\omega)\varphi = 0$, образует в $\mathcal{H}_F$ p-базис при $p \geqslant p_L$. Отсюда и из доказательства пункта 3° теоремы 4.1.12 непосредственно следует, что система собственных векторов, отвечающая собственным значениям $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ задачи $\mathcal{M}(\mu)\varphi = 0$, расположенным вне промежутка $(-r_+, r_+)$, образует в $\mathcal{H}_F$ p-базис при $p \geqslant p_L$. $\square$

Воспользуемся тем фактом, что теорема 4.1.11 справедлива для пучков $\mathcal{M}(\mu)$, $\widetilde{\mathcal{M}}(\omega)$ из (4.24), (4.40) соответственно, и приведём без доказательства следующий результат.

Теорема 4.1.15. *Пусть для операторного пучка* $\mathcal{M}(\mu)$ *из* (4.23) *с коэффициентами* (4.20), (4.21), (4.22) *для характеристических чисел операторов* M *и* L *выполнены условия*

$$\nu_n(M) = a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}[1 + o(1)], \quad \alpha > 0,\ a > 0,\ n \to \infty, \tag{4.43}$$

$$\nu_n(L) = b^{-1/\beta} n^{1/\beta}[1 + o(1)], \quad \beta > 0,\ b > 0,\ n \to \infty. \tag{4.44}$$

Тогда:

1° *Пучок* $\mathcal{M}(\mu)$ *имеет ветвь положительных собственных значений* $\{\mu_{\infty n}(\mathcal{M}(\mu))\}_{n=1}^{\infty}$, *имеющую предельную точку* $+\infty$, *причём*

$$\mu_{\infty n}(\mathcal{M}(\mu)) = \nu_n(L)[1 + o(1)], \quad (n \to \infty).$$

2° $\mathcal{M}(\mu)$ *имеет также ветвь отрицательных собственных значений* $\{\mu_{0n}(\mathcal{M}(\mu))\}_{n=1}^{\infty}$ *с предельной точкой в нуле, причём*

$$\mu_{0n}(\mathcal{M}(\mu)) = -(\nu_n(M))^{-1}[1 + o(1)], \quad (n \to \infty). \qquad \square$$

Стоит отметить, что в случае, когда условие (4.26), достаточное для факторизации, не выполняется, для $\mathcal{M}(\mu)$ справедлив некоторый более слабый результат.

Теорема 4.1.16. *Пусть для* $\mathcal{M}(\mu)$ *выполнено условие*

$$\rho||L|| < 1, \tag{4.45}$$

тогда для любого $\varepsilon > 0$ *собственные векторы* $\mathcal{M}(\mu)$, *отвечающие собственным значениям из промежутка* $(0, \varepsilon)$, *образуют базис Рисса в некотором пространстве с конечным дефектом (зависящим от выбора* ε*).*

Доказательство. Доказательство основано на применении результатов следствия 33.7, приведенного в ([47, с.209]). $\square$

Вернёмся теперь к исходной спектральной задаче (4.15), которая равносильна задаче для пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ из (4.19). Учитывая, что $\lambda = \mu + \rho$, из теорем 4.1.12, 4.1.13, 4.1.15 и 4.1.16 непосредственно следуют такие заключительные результаты.

Теорема 4.1.17. *Пусть для* $\mathcal{L}(\lambda)$ *выполнено условие*

$$\rho||L|| < 1, \tag{4.46}$$

тогда для любого $\varepsilon > 0$ *собственные векторы* $\mathcal{L}(\lambda)$, *отвечающие собственным значениям из промежутка* $(\rho, \rho + \varepsilon)$, *образуют базис Рисса в некотором пространстве с конечным дефектом (зависящим от выбора* ε*).*

Теорема 4.1.18. *Пусть для пучка* (4.19)

$$\mathcal{L}(\lambda) := I - \lambda L + (\lambda - \rho)^{-1} M$$

выполнены следующие условия

$$L = L^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \ker L = \{0\}, \quad M = M^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \ker M = \{0\},$$

$$4||L|| \cdot ||M|| < (1 - \rho||L||)^2, \quad \rho||L|| < 1,$$

$$r_\pm := \frac{1 - \rho||L|| \pm \sqrt{(1 - \rho||L||)^2 - 4||L|| \cdot ||M||}}{2||M||}, \quad 0 < r_- < r_+ < \infty.$$

Пусть характеристические числа операторов L и M имеют асимптотики:

$$\nu_n(M) = a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}[1 + o(1)], \quad \alpha > 0,\ a > 0,\ n \to \infty, \tag{4.47}$$

$$\nu_n(L) = b^{-1/\beta} n^{1/\beta}[1 + o(1)], \quad \beta > 0,\ b > 0,\ n \to \infty. \tag{4.48}$$

Тогда:

1° *Операторный пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ имеет дискретный положительный спектр с предельными точками $\lambda = \rho$, $\lambda = +\infty$.*

2° *Предельной точке $\lambda = \rho$ отвечает ветвь вещественных собственных значений $\{\lambda_{\rho n}(\mathcal{L}(\lambda))\}_{n=1}^\infty$, расположенных на отрезке $(\rho - r_-, \rho) \subset \mathbb{R}$, с предельной точкой ρ, причём*

$$\lambda_{\rho n}(\mathcal{L}(\lambda)) = \rho - (\nu_n(M))^{-1}[1 + o(1)] \quad (n \to \infty).$$

Если дополнительно выполнено условие $\rho \geqslant ||M||$, то эта ветвь состоит лишь из неотрицательных собственных значений.

Соответствующая система собственных элементов (присоединённых нет) образует p-базис в $\mathcal{H}_F$, при $p = \infty$. Если дополнительно выполнено условие

$$L = L^* \in \mathfrak{S}_{p_L}, \tag{4.49}$$

то эта система образует p-базис в $\mathcal{H}_F$, при $p \geqslant p_L$.

3° *Предельной точке $\lambda = +\infty$ отвечает ветвь положительных собственных значений $\{\lambda_{\infty n}(\mathcal{L}(\lambda))\}_{n=1}^\infty$, расположенных на промежутке $(\rho + r_+, +\infty)$ и имеющих предельную точку $+\infty$, причём*

$$\lambda_{\infty n}(\mathcal{L}(\lambda)) = \rho + (\nu_n(L))[1 + o(1)] \quad (n \to \infty).$$

Соответствующая система собственных элементов (присоединённых нет) образует p-базис в $\mathcal{H}_F$, при $p = \infty$. Если дополнительно выполнено условие (4.49), то указанная система образует p-базис в $\mathcal{H}_F$ при $p \geqslant p_L$. $\square$

Замечание 4.1.19. Отметим, что при выполнении условия $\rho \geqslant ||M||$ (оно же (4.18)) все собственные значения задачи (4.15) неотрицательные. Если же справедливо противоположное неравенство $\rho < ||Q^*Q||$, то спектр задачи (4.15) может содержать конечное число отрицательных собственных значений. Таким образом, неравенство $\rho > ||Q^*Q||$ является достаточным условием асимптотической устойчивости для задачи (4.15), а условие $\rho < ||Q^*Q||$, в свою очередь, является необходимым условием неустойчивости. □

4.1.3 Спектральные задачи с диссипацией и подкачкой энергии

В пункте 2.3.1 исследована задача Коши (2.38), которая после ряда преобразований была приведена сначала к задаче (2.51), а затем и к (2.52) в пространстве $\mathcal{H}^3$. При этом оператор $\mathcal{A} = \operatorname{diag}(A; I; I)$, а свойства оператора $\mathcal{F}$ описаны в теореме 2.3.3. В частности, для $\mathcal{F}$ выполнено неравенство равномерной аккретивности вида (2.54), а действие $\mathcal{F}$ задаётся формулой (2.50).

Рассмотрим теперь задачу о нормальных колебаниях, ассоциированную с задачей Коши (2.52). Учитывая представление (2.48) для оператора $\mathcal{F}$, её можно переписать в виде

$$
\begin{pmatrix} A^{-1/2}F^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} I+\alpha F^{-1/2}AF^{-1/2} & -Q_V^* & Q_C^* \\ -Q_V & (\alpha+\rho)I & 0 \\ Q_C & 0 & -(\alpha+\gamma)I \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} F^{1/2}A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_A \\ w \\ v \end{pmatrix} =
$$
$$
= \lambda \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ w \\ v \end{pmatrix}, \quad u_A := A^{1/2}u,
\tag{4.50}
$$

где операторы Q_C, Q_V определены формулами (2.46), (2.47) и для них справедливы утверждения леммы 2.3.2.

Вводя ещё операторные блоки

$$
\widehat{I}_V := \begin{pmatrix} I + \alpha F^{-1/2}AF^{-1/2} & -Q_V^* \\ -Q_V & (\alpha+\rho)I \end{pmatrix}, \quad \widehat{Q}_C := (Q_C; 0), \quad \widehat{Q}_C^* := (Q_C^*; 0)^\tau,
\tag{4.51}
$$

$$
\widehat{I} := \operatorname{diag}(I; I), \quad \widehat{Y} := \operatorname{diag}\,(A^{-1/2}F^{1/2}; I), \quad \widehat{Y}^* := \operatorname{diag}(F^{1/2}A^{-1/2}; 0),
\tag{4.52}
$$

а также обозначение $\widehat{u} := (u_A; w)^\tau$, перепишем (4.50) в блочном виде

$$\begin{pmatrix} \widehat{Y} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{I}_V & \widehat{Q}_C^* \\ \widehat{Q}_C & -(\alpha+\gamma)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{Y}^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u} \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \widehat{I} & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u} \\ v \end{pmatrix},$$

или более коротко

$$\widetilde{\mathcal{F}} z := \widetilde{Y}\widetilde{I}_V\widetilde{Y}^* z = \lambda \mathcal{J} z, \quad z \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{F}}), \quad z := (\widehat{u}; v)^\tau, \tag{4.53}$$

при очевидном смысле обозначений для операторных матриц.

Здесь снова, как и в (2.32), возникла задача на собственные значения для неограниченного $\mathcal{J}$-самосопряжённого оператора $\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{F}}$.

Поэтому для (4.53), как и для задачи (2.32), спектр оператора $\mathcal{J}\mathcal{F}$ симметричен относительно вещественной оси и расположен в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \geqslant c > 0$, где — постоянная из неравенства равномерной аккретивности для оператора $\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{F}}$.

Однако, без учёта свойств компактности коэффициентов матричного оператора $\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{F}}$, получить другие утверждения о свойствах спектра (такие как, например, 2.2.10, 2.2.11, 2.2.13) методами, использованными при исследовании (2.32), для задачи (4.53) не удаётся.

Перепишем теперь (4.50) в виде системы, вспоминая, что $u_A :=A^{1/2}u$,

$$\begin{cases} (F+\alpha I)u - F^{1/2}Q_V^* w + F^{1/2}Q_C^* v = \lambda A^{1/2} u, \\ -Q_V F^{1/2} u + (\alpha+\rho) w = \lambda w, \\ Q_C F^{1/2} u - (\alpha+\gamma) v = -\lambda v. \end{cases}$$

Исключая v и w, получим вместо (4.53) спектральную задачу для самосопряжённого операторного пучка $L(\mu)$

$$\begin{gathered} L(\mu)u := \big(I - \mu F^{-1/2}AF^{-1/2} - (\rho-\mu)^{-1}Q_V^*Q_V + \\ +(\gamma-\mu)^{-1}Q_C^*Q_C\big)\, u = 0, \end{gathered} \tag{4.54}$$

где $\mu := \lambda - \alpha$.

Нужно отметить, что аналогичным образом может быть получена спектральная задача, ассоциированная с задачей Коши (2.57):

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(\mu)u := \Bigg(I - \mu F^{-1/2}AF^{-1/2} - \sum_{k=1}^{m} (\rho_k-\mu)^{-1} Q_{V_k}^* Q_{V_k} + \\ + \sum_{j=1}^{n} (\gamma_j - \mu)^{-1} Q_{C_j}^* Q_{C_j}\Bigg)\, u = 0, \ \ \mu := \lambda - \alpha, \end{gathered} \tag{4.55}$$

где операторы Q_{C_j}, Q_{V_k}, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,m}$, заданы, как показано в (2.46), (2.47), по формулам $Q_{C_j}=C_j^{1/2}F^{-1/2}$, $j=\overline{1,n}$, $Q_{V_k}=V_k^{1/2}F^{-1/2}$, $k=\overline{1,m}$.

Исследование свойств решений задач вида (4.54), (4.55) может быть проведено методами, изложенными в [47].

4.2 Спектральная проблема, ассоциированная с задачей о малых движениях диссипативной системы.

Далее в этой главе изучаются некоторые спектральные задачи, ассоциированные с интегро-дифференциальными уравнениями второго порядка.

4.2.1 Введение. Рассматривается спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши

$$A\frac{d^2u}{dt^2}+F\frac{du}{dt}+Bu=f(t),\quad u(0)=u^0,\ u'(0)=u^1, \tag{4.56}$$

для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Как следует из предыдущего, это уравнение описывает малые движения диссипативной динамической системы в окрестности состояния равновесия. Здесь функция $u=u(t)$ — это перемещения динамической системы, $0<A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — оператор кинетической энергии системы, $B=B^*\gg 0$ — оператор потенциальной энергии, $F=F^*\gg 0$ — оператор диссипации. Движения системы являются свободными, если поле внешних сил $f(t)\equiv 0$.

С учётом замечания 2.2.1 дадим определение сильного решения задачи (4.56) со значениями в пространстве $\mathcal{E}^{1/2}=\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Определение 4.2.1. Назовем сильным решением задачи (4.56) на отрезке $[0,T]$ такую функцию $u(t)$ со значениями в $\mathcal{E}^{1/2}=\mathcal{D}(A^{-1/2})$, для которой выполнены следующие свойства:

1°. $u(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}B))$;

2°. $u'(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(B^{1/2}))\cap C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}F))$;

3°. $Au''(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4°. все слагаемые в уравнении (4.56) непрерывны по t и принадлежат пространству $C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

5°. при любом $t \in [0, T]$ выполнено уравнение (4.56);

6°. выполнены начальные условия $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$. □

Необходимыми условиями существования сильного решения задачи (4.56) являются, очевидно, условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \cap \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Повторяя выкладки параграфа 4.1.3, осуществим переход от этой задачи к задаче Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Именно, вводя в (4.56) замену $A^{1/2}u =: v$ и применяя слева оператор $A^{-1/2}$ (это можно сделать для сильного решения), приходим к задаче:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + A^{-1/2}FA^{-1/2}\frac{dv}{dt} + A^{-1/2}BA^{-1/2}v = A^{-1/2}f(t),$$

$$v(0) = A^{1/2}u^0, \quad v'(0) = A^{1/2}u^1.$$

Здесь все слагаемые в уравнении являются элементами из $C([0,T]; \mathcal{H})$.

Введём далее новую искомую функцию:

$$-iB^{1/2}A^{-1/2}v(t) =: \frac{dw}{dt}, \quad w(0) = 0.$$

В силу свойства 2° из определения 4.2.1 получаем, что $d^2w/dt^2 \in C([0,T]; \mathcal{H})$ и потому

$$\frac{d^2w}{dt^2} + iB^{1/2}A^{-1/2}\frac{dv}{dt} = 0, \quad w'(0) = -iB^{1/2}A^{-1/2}v(0) = -iB^{1/2}u^0.$$

Отсюда приходим к выводу, что задача (4.56) равносильна задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{F}z = \widetilde{f}_0(t), \tag{4.57}$$

$$z(0) = z^0 := (A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau,$$

$$z(t) := (v'(t); w'(t))^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H},$$

$$\widetilde{f}_0(t) := (A^{-1/2}f(t); 0)^\tau,$$

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & iA^{-1/2}B^{1/2} \\ iB^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \Big(\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \cap \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2})\Big) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}),$$

4.2.2 Постановка спектральной проблемы. Рассмотрим тот частный случай, когда операторы кинетической энергии A и диссипации F являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии B

$$A := B^{-\alpha}, \quad F := 2\rho B^{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \rho, \beta \geqslant 0. \tag{4.58}$$

При этом считаем, что $0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$; тогда собственные элементы оператора B образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, а все собственные значения положительны и имеют предельную точку $+\infty$.

Это позволяет подробно изучить случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы и промежуточные между ними варианты, а также проследить, как видоизменяется (перестраивается) спектр этой задачи при возрастании ρ и различных α и β.

Рассмотрим задачу о нормальных колебаниях, отвечающую в задаче (4.57) свободным движениям динамической системы:

$$f(t) \equiv 0, \quad z(t) = e^{-\lambda t} z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда для амплитудных элементов z возникает спектральная задача

$$\mathcal{F} z = \lambda z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.59}$$

где оператор $\mathcal{F}$ в условиях (4.58) имеет вид

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.60}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \Big(\mathcal{D}(B^{\alpha+\beta}) \cap \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}})\Big) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}).$$

Необходимо отметить, что аналогичная спектральная задача для случая, когда оператор кинетической энергии системы $A = I$, была рассмотрена в монографии [3], и данное исследование проводилось на её основе.

Отметим предварительно, что при $\rho = 0$ (т.е. для консервативной системы) оператор задачи (4.59)-(4.60) является кососамосопряженным на $\mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}})$, и эта задача имеет решения

$$\lambda_k^{\pm} = \pm i \lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B), \quad \widetilde{z}_k^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm u_k(B); u_k(B))^{\tau}, \quad k = 1, 2 \ldots, \tag{4.61}$$

где $\{\lambda_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ — положительные собственные значения оператора B, а $\{u_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ — соответствующая им система собственных элементов, образующих ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. При этом собственные элементы $\{\widetilde{z}_k^+\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\widetilde{z}_k^-\}_{k=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^2$.

4.2.3 Первый случай: слабо демпфированная динамическая система

Будем сначала считать, что

$$\rho > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 \leqslant \beta < \frac{1-\alpha}{2}. \tag{4.62}$$

Тогда

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -2\rho i B^{\beta+\frac{\alpha-1}{2}} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$

и так как при условиях (4.62) оператор $B^{\beta+\frac{\alpha-1}{2}} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, то проблема сводится к спектральной задаче для слабовозмущенного самосопряженного оператора. Собственные значения этой задачи таковы:

$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}], & \rho^2 \geqslant \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B); \\ \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}], & \rho^2 < \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B). \end{cases} \quad k = 1, 2 \ldots \tag{4.63}$$

Если, в частности, $\rho^2 < \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$, то все собственные значения $\lambda_k^{\pm}$ невещественны и расположены на пересечении окружностей

$$|\mathrm{Re}\lambda_k|^2 + |\mathrm{Im}\lambda_k|^2 = r_k^2, \quad r_k := \lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.64}$$

и кривых

$$|\mathrm{Im}\lambda_k|^2 = (\mathrm{Re}\lambda_k/\rho)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta}} - (\mathrm{Re}\lambda_k)^2, \quad \mathrm{Re}\lambda > \rho^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha-2\beta}}. \tag{4.65}$$

В этом случае собственные элементы имеют вид

$$z_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_k(B) \\ i\varepsilon_k u_k(B) \end{pmatrix}, \quad z_k^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\varepsilon_k u_k(B) \\ u_k(B) \end{pmatrix}, \tag{4.66}$$

$$\varepsilon_k := \rho\lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - i\sqrt{1 - \rho^2\lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)}, \quad |\varepsilon_k| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.67}$$

Они обладают следующими свойствами

$$(z_k^{\pm}, z_l^{\pm})_{\mathcal{H}^2} = \delta_{kl}, \quad (z_k^{+}, z_l^{-})_{\mathcal{H}^2} = i\,\mathrm{Re}\,\varepsilon_l\,\delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \ldots,$$

и потому уже не образуют ортогональную систему элементов в $\mathcal{H}^2$. Заметим еще, что по отношению к индефинитному скалярному произведению с оператором $\mathcal{J} = \mathrm{diag}(I; -I) = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}$ оператор $\mathcal{F}$ является $\mathcal{J}$-симметричным, а все собственные элементы (4.59)-(4.60) являются $\mathcal{J}$-нейтральными:

$$(\mathcal{J} z_k^{\pm}, z_k^{\pm})_{\mathcal{H}^2} = \left[z_k^{\pm}, z_k^{\pm}\right] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отметим еще одно важное обстоятельство: собственные элементы $z_k^{\pm}$ выражаются через собственные элементы $\widetilde{z}_k^{\pm}$, т.е. через элементы (4.61) ортонормированного базиса в $\mathcal{H}^2$, посредством следующих формул:

$$z_k^{\pm} = \mathcal{K}_{\pm}\widetilde{z}_k^{\pm}, \quad \mathcal{K}_{+} := \mathrm{diag}(I; iK), \quad \mathcal{K}_{-} := \mathrm{diag}(iK; I), \tag{4.68}$$

$$K := \rho B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}} - i(I - \rho^2 B^{2\beta+\alpha-1})^{1/2}, \quad ||K|| = 1. \tag{4.69}$$

В самом деле, для $u = u_k(B)$ имеем

$$iKu_k(B) = i(\rho\lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - i\sqrt{1 - \rho^2\lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)})u_k(B) = i\varepsilon_k u_k(B).$$

Лемма 4.2.2. *Если выполнено условие*

$$\rho^2 < \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B), \tag{4.70}$$

то собственные элементы (4.113) *задачи* (4.59)-(4.60), (4.62) *образуют базис Рисса в пространстве* $\mathcal{H}^2$.

Доказательство. Убедимся сначала, что эти элементы образуют полную систему в $\mathcal{H}^2$. Пусть $z_0 = (z_{01}; z_{02})^{\tau} \in \mathcal{H}^2$ ортогонален всем элементам системы (4.59)-(4.60),(4.62). Тогда выполнены условия

$$(z_k^{+}, z_0)_{\mathcal{H}^2} = 0, \quad (z_k^{-}, z_0)_{\mathcal{H}^2} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т.е. имеют место соотношения

$$(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} + i\varepsilon_k(u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0,$$

$$-i\varepsilon_k(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} + (u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Так как $|\varepsilon_k| = 1$, то $\varepsilon_k^{-1} = 1/\overline{\varepsilon}_k$, и вторая совокупность уравнений дает

$$(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} + i\overline{\varepsilon}_k(u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда и из первых соотношений получаем

$$\operatorname{Im} \varepsilon_k(u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и поскольку $\operatorname{Im}\varepsilon_k \neq 0$ при любом k (см. (4.67)), то в силу ортогональной базисности системы $\{u_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}$, получаем, что $z_{02} = 0$. Но тогда $(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} = 0$ (при любом k), что и дает свойство $z_{01} = 0$. Таким образом система элементов

$$\{z_k^+\}_{k=1}^{\infty} \cup \{z_k^-\}_{k=1}^{\infty}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.71}$$

полна в пространстве $\mathcal{H}^2$.

Воспользуемся теперь тем фактом, что в представлении (4.69) оператор K ограниченно обратим и

$$K^* = K^{-1} = \rho B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}} + i(I - \rho^2 B^{2\beta+\alpha-1})^{1/2},$$

т.е. K — унитарный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}$. Отсюда следует, что операторы $\mathcal{K}_{\pm}$ из (4.68) имеют ограниченные обратные операторы:

$$(\mathcal{K}_+)^{-1} = \operatorname{diag}(I; -iK^*), \quad (\mathcal{K}_-)^{-1} = \operatorname{diag}(-iK^*; I).$$

Таким образом, элементы z_k^+ получаются применением ограниченного и ограниченно обратимого оператора $\mathcal{K}_+$ к элементам ортонормированного базиса $\widetilde{z}_k^+$ из (4.61), а элементы z_k^- — применением ограниченного и ограниченно обратимого оператора $\mathcal{K}_-$ к элементам $\widetilde{z}_k^-$. Отсюда следует, что совокупность собственных элементов (4.71) задачи (4.59)-(4.60) при выполнении условия (4.70) образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}^2$. $\square$

Замечание 4.2.3. Если для заданного $m \in \mathbb{N}$ выполнены условия

$$\lambda_m^{1-\alpha-2\beta}(B) < \rho^2 < \lambda_{m+1}^{1-\alpha-2\beta}(B), \tag{4.72}$$

то задача имеет ровно m пар вещественных положительных собственных значений $\lambda_j^{\pm}$ с номерами $j = \overline{1, m}$, а отвечающие этим значениям собственные элементы образуют равномерно дефинитные инвариантные подпространства

$$\mathcal{L}_1^+ := \operatorname{sp}\{y_j^+\}_{j=1}^m, \quad \mathcal{L}_1^- := \operatorname{sp}\{y_j^-\}_{j=1}^m, \quad j = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Собственные значения задачи при условиях (4.72) находятся по формулам

$$\lambda_j^{\pm} = \lambda_j^{\alpha+\beta}(B)(\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)}), \quad j = \overline{1,m}. \tag{4.73}$$

Этим номерам $j = \overline{1,m}$ отвечают $\mathcal{J}$-положительные (для λ_j^+) и соответственно $\mathcal{J}$-отрицательные (для λ_j^-) собственные элементы

$$y_j^+ = (u_j(B); i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^{\tau}, \quad y_j^- = (-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B); u_j(B))^{\tau}, \quad j = \overline{1,m},$$

$$\tilde{\varepsilon} := \rho\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - \sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1} > 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&[y_j^+, y_j^+] = (\mathcal{J}y_j^+, y_j^+)_{\mathcal{H}^2} = ||u_j(B)||^2 - |\tilde{\varepsilon}_j|^2||u_j(B)||^2 = 1 - |\varepsilon_j|^2 = \\
&= 2\sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}\left(\rho\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - \sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}\right) = \\
&= 2\tilde{\varepsilon}_j\sqrt{\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B)\rho^2 - 1} =: c^2 > 0, \quad j = \overline{1,m}, \\
&[y_j^-, y_j^-] = (Jy_j^-, y_j^-)_{\mathcal{H}^2} = |\varepsilon_j|^2 - 1 < 0, \quad j = \overline{1,m}.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Так как подпространства, натянутые на собственные элементы y_j^+, являются $\mathcal{J}$-ортогональными для несовпадающих между собой собственных значений λ_j^+, то, разлагая любой элемент из $\mathcal{L}_1^+$ по $\mathcal{J}$-ортогональному базису $\{y_j^+\}_{j=1}^m$ и используя неравенства (4.74), приходим к выводу, что

$$[z, z] \geqslant c^2||z||^2_{\mathcal{H}^2}, \quad c^2 > 0, \quad \forall z \in \mathcal{L}_1^+,$$

то есть $\mathcal{L}_1^+$ — равномерно положительное подпространство. Аналогично можно доказать, что $\mathcal{L}_1^-$ — равномерно отрицательное подпространство, поэтому $\mathcal{L}_1^{\pm}$ — равномерно дефинитны. □

Лемма 4.2.4. *При условии* (4.72) *пространство* $\mathcal{H}^2$ *допускает разложение*

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{L}^+ \dot{+} \mathcal{L}^-,$$

где

$$\mathcal{L}^+ := \mathcal{L}_1^+ \dot{+} \mathcal{L}_0^+, \quad \mathcal{L}_0^+ := \mathrm{sp}\{y_k^+ : \mathrm{Im}\lambda_k^+ > 0, \ k = m+1, \ldots\},$$

— неотрицательное подпространство, а

$$\mathcal{L}^- := \mathcal{L}_1^- \dot{+} \mathcal{L}_0^-, \quad \mathcal{L}_0^- := \mathrm{sp}\{y_k^- : \mathrm{Im}\lambda_k^- > 0, \ k = m+1, \ldots\},$$

— соответствующее неположительное подпространство.

Доказательство. Будем сначала считать, что выполнено условие (4.70). Тогда, так как в $\mathcal{H}$ имеется ортонормированный базис $\{u_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$, то любой элемент $z = (z_1; z_2)^{\tau} \in \mathcal{H}^2$ можно представить в виде

$$z = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} u_k(B); \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} u_k(B) \right)^{\tau},$$

$$a_{1k} = (z_1, u_k(B))_{\mathcal{H}}, \quad a_{2k}(z_2, u_k(B))_{\mathcal{H}}.$$

Тогда соотношение $z = z^+ + z^-$, $z^{\pm} \in \mathcal{L}^{\pm}$ приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^+ \begin{pmatrix} u_k(B) \\ i\varepsilon_k u_k(B) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^- \begin{pmatrix} -i\varepsilon_k u_k(B) \\ u_k(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{1k} u_k(B) \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k} u_k(B) \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

откуда получаем, что должны выполняться условия

$$c_k^+ - i\varepsilon_k c_k^- = a_{1k}, \quad i\varepsilon_k c_k^+ + c_k^- = a_{2k}.$$

Отсюда имеем

$$c_k^+ = \frac{a_{1k} + i\varepsilon_k a_{2k}}{1 - \varepsilon_k^2}, \quad c_k^- = \frac{a_{2k} - i\varepsilon_k a_{1k}}{1 - \varepsilon_k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Так как здесь

$$1 - \varepsilon_k^2 = 1 - \left(\rho \lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - i\sqrt{1 - \rho^2 \lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)} \right)^2 \sim$$

$$\sim 2 + 2i\rho \lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) \sqrt{1 - \rho^2 \lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)} - 2\rho^2 \lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B) \to 2 \quad (k \to \infty),$$

то ряды в средней части (4.75) сходятся, и утверждение при (4.70) доказано. Если вместо этого условия выполнено условие (4.72), то все те же рассуждения можно провести в подпространстве $\mathcal{L}_0^+ \dot{+} \mathcal{L}_0^-$ пространства $\mathcal{H}^2$ с коразмерностью $2m$, а в конечномерном ($2m$-мерном) дополнении $\mathcal{L}_1^+ \dot{+} \mathcal{L}_1^-$ утверждение очевидно. $\square$

Подведем итоги рассмотрения спектральной задачи (4.59)-(4.60) в условиях (4.62). Эта задача имеет дискретный спектр (4.63) с предельной точкой $\lambda = \infty$, все собственные значения (за исключением, быть может, конечного числа положительных собственных значений) невещественны и расположены на пересечении окружностей (4.64) и кривых (4.65). Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис в $\mathcal{H}^2$. Отметим, наконец, что при возрастании ρ количество вещественных (положительных) собственных значений увеличивается.

4.2.4 Второй случай: пограничный вариант

Будем теперь считать, что
$$\beta = \frac{1-\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \rho > 0.$$
Здесь операторная матрица из (4.60) имеет факторизацию
$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\rho B^{\frac{\alpha+1}{2}} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -2\rho i I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$
и уже не является слабым возмущением оператора
$$i\mathcal{B} := i \begin{pmatrix} 0 & B^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ B^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$
Поэтому свойство локализации спектра в окрестности мнимой оси, которое имело место в п.4.2.3, здесь не выполнено. Собственные значения оператора задачи таковы
$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}], & \rho \geqslant 1; \\ \lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B)[\rho \pm i\sqrt{1 - \rho^2}], & 0 < \rho < 1. \end{cases} \qquad k = 1, 2 \ldots \tag{4.76}$$
Соответственно, собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид
$$z_k^+ = (u_k(B); i\varepsilon u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\varepsilon u_k(B); u_k(B))^\tau, \quad \varepsilon := \rho - i\sqrt{1-\rho^2},$$
а собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям, таковы:
$$z_k^+ = (u_k(B); i\tilde{\varepsilon} u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\tilde{\varepsilon} u_k(B); u_k(B))^\tau, \quad \tilde{\varepsilon} := \rho - \sqrt{\rho^2 - 1} > 0.$$
Отметим, что спектр задачи дискретный с предельной точкой ∞, если выполнено условие $0 < \rho < 1$. В этом случае все собственные значения невещественны, и расположены на пересечении окружностей (4.64) и прямых
$$\mathrm{Im}\lambda = \pm\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\mathrm{Re}\lambda, \quad \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0.$$

При выполнении условия $0 < \rho < 1$ собственные элементы образуют базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}^2$, при этом

$$z_k^+ = \mathrm{diag}(I; i\varepsilon I)\widetilde{z}_k^+, \quad z_k^- = \mathrm{diag}(i\varepsilon I; I)\widetilde{z}_k^-,$$

где $\widetilde{z}_k^\pm$, $k = 1, 2, \ldots$ — ортонормированный базис из (4.61).

Если выполнено условие $\rho \geqslant 1$, то собственные значения вещественны, положительны и образуют две ветви (см. первую формулу (4.76)), причем каждая из ветвей имеет предельную точку $+\infty$. При этом собственные элементы $\{z_j^+\}_{j=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$, являются $\mathcal{J}$-положительными:

$$[z_j^+, z_j^+] = 1 - \tilde{\varepsilon}^2 = 2\tilde{\varepsilon}\sqrt{\rho^2 - 1} > 0.$$

Соответственно, собственные элементы $\{z_j^-\}_{j=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^\infty$, являются $\mathcal{J}$-отрицательными:

$$[z_j^-, z_j^-] = \tilde{\varepsilon}^2 - 1 < 0.$$

Учитывая тот факт, что собственные значения $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора, отвечающие несовпадающим собственным значениям, являются $\mathcal{J}$-ортогональными, то есть

$$[z_j^\pm, z_i^\mp] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

а также то, что $\{z_j^+\}_{j=1}^\infty \cup \{z_j^-\}_{j=1}^\infty$ образуют (как и в п.4.2.3, см. лемму 4.2.2) полную систему в $\mathcal{H}^2$, приходим к выводу, что собственные элементы задачи образуют $\mathcal{J}$-ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^2$. При этом

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{L}^+[+]\mathcal{L}^-, \quad \mathcal{L}^\pm := \mathrm{sp}\{z_j^\pm\}_{j=1}^\infty.$$

4.2.5 Третий случай: средне демпфированная динамическая система Рассмотрим теперь вариант, когда $\rho > 0$, а параметры α и β удовлетворяют одному из условий

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \frac{1-\alpha}{2} < \beta < 1, \tag{4.77}$$

или

$$\alpha \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta < 1. \tag{4.78}$$

Тогда имеет место факторизация

$$\mathcal{F}=\begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}B^{1-\beta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\alpha+\beta}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$

где $B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta}$ — компактный положительный оператор, а $B^{\alpha+\beta}$ и $B^{1-\beta}$ — неограниченные положительно определенные операторы с компактными положительными обратными. Собственные значения этой задачи имеют вид

$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}], & \rho^2 \geqslant \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B); \\ \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}], & \rho^2 < \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B). \end{cases} \quad k = 1, 2 \ldots \tag{4.79}$$

Так как $\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) \to 0$ при $k \to +\infty$, то невещественных собственных значений может быть не более конечного числа. Остальные собственные значения разбиваются на две ветви:

$$\lambda_k^{+} = \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho + \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}] = 2\rho\lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[1 + o(1)] \quad (k \to +\infty), \tag{4.80}$$

$$\lambda_k^{-} = \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho - \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}] = \frac{1}{2\rho}\lambda_k^{1-\beta}(B)[1 + o(1)] \quad (k \to +\infty). \tag{4.81}$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_k^{\pm} \to +\infty \quad (k \to +\infty)$$

Соответствующие собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям, таковы:

$$z_j^{+} = (u_j(B); i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^{\tau}, \quad z_j^{-} = (-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B); u_j(B))^{\tau},$$

$$\tilde{\varepsilon}_j := \lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho - \sqrt{\rho^2 - \lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)}) = \frac{1}{2\rho}\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)[1+o(1)] \to 0 \ (j \to +\infty). \tag{4.82}$$

Нетрудно видеть также, что

$$z_j^{\pm} = \mathcal{K}_{\pm}\widetilde{z}_j^{\pm}, \quad \mathcal{K}_{+} := \mathrm{diag}(I; iK), \quad \mathcal{K}_{-} := \mathrm{diag}(iK; I),$$

$$K := B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2}) = B^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2})^{-1},$$

$$K^{-1} := B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2}) = B^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2})^{-1}.$$

Собственные элементы $\{z_j^+\}_{j=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$, $\mathcal{J}$-положительны:

$$[z_j^+, z_j^+] = (\mathcal{J} z_j^+, z_j^+)_{\mathcal{H}^2} = 1 - \tilde{\varepsilon}_j^2 = \frac{2\sqrt{\rho^2 \lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}}{\rho \lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) + \sqrt{\rho^2 \lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}} > 0,$$

причем в силу (4.82) $[z_j^+, z_j^+] \to 1$ $(j \to +\infty)$. Соответственно собственные элементы $\{z_j^-\}_{j=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^\infty$, $\mathcal{J}$-отрицательны:

$$[z_j^-, z_j^-] = \tilde{\varepsilon}_j^2 - 1 < 0, \quad [z_j^-, z_j^-] \to -1, \quad (j \to +\infty)$$

Отметим ещё, что при условии $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$ все собственные значения задачи вещественны. В противном случае собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^+ = (u_k(B); i\varepsilon_k u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\varepsilon_k u_k(B); u_k(B))^\tau,$$
$$\varepsilon_k := \lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho - i\sqrt{\lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}), \quad k = \overline{1, m}.$$

Опираясь на вышеизложенное и проводя рассуждения, аналогичные приведенным в п.4.2.3, сформулируем результаты рассмотрения спектральной задачи (4.59)-(4.60) при условиях (4.77) или (4.78). Эта задача имеет дискретный спектр (4.79), все собственные значения (за исключением, быть может, конечного числа невещественных собственных значений) положительны, они разбиваются на две серии (см.(4.80)-(4.81)), каждая из которых имеет своей предельной точкой $\lambda = +\infty$. Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис (при условии, что $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$) в $\mathcal{H}^2$.

4.2.6 Четвёртый случай: второй пограничный вариант

Рассмотрим теперь второй промежуточный случай, когда

$$\beta = 1, \quad \alpha > 0, \quad \rho > 0. \tag{4.83}$$

Здесь имеет место факторизация

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+1} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{-1-\alpha}{2}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{-1-\alpha}{2}} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

показывающая, что предельными точками спектра могут быть точки $\lambda = +\infty$ и $\lambda = (2\rho)^{-1}$. Действительно, собственные значения этой задачи таковы

$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\alpha+1}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{-1-\alpha}(B)}], & \rho^2 \geqslant \lambda_k^{-1-\alpha}(B); \\ \lambda_k^{\alpha+1}(B)[\rho \pm i\sqrt{\lambda_k^{-1-\alpha}(B) - \rho^2}], & \rho^2 < \lambda_k^{-1-\alpha}(B). \end{cases} \qquad k = 1, 2\ldots$$

Так как $\lambda_k^{-1-\alpha}(B) \to 0$, то задача может иметь не более конечного числа невещественных собственных значений, а вещественные собственные значения задачи положительны и образуют две ветви:

$$\lambda_j^+ = 2\rho\lambda_j^{\alpha+1}(B)[1 + o(1)], \quad \lambda_j^- = \frac{1}{2\rho}[1 + o(1)] \quad (j \to +\infty). \tag{4.84}$$

Собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям, таковы:

$$z_j^+ = (u_j(B); i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^{\tau}, \quad z_j^- = (-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B); u_j(B))^{\tau},$$

$$\tilde{\varepsilon}_j := \lambda_j^{\frac{1+\alpha}{2}}(B)(\rho - \sqrt{\rho^2 - \lambda_j^{-1-\alpha}(B)}) = \frac{1}{2\rho}\lambda_j^{\frac{-\alpha-1}{2}}(B)[1 + o(1)] \to 0 \quad (k \to +\infty). \tag{4.85}$$

Нетрудно видеть, что

$$z_j^{\pm} = \mathcal{K}_{\pm}\widetilde{z}_j^{\pm}, \quad \mathcal{K}_+ := \mathrm{diag}(I; iK), \quad \mathcal{K}_- := \mathrm{diag}(iK; I),$$

$$K := B^{\frac{1+\alpha}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2}) = B^{\frac{-1-\alpha}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2})^{-1},$$
$$K^{-1} := B^{\frac{1+\alpha}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2}) = B^{\frac{-1-\alpha}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2})^{-1}.$$

Собственные элементы $\{z_j^+\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие вещественным собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^{\infty}$, $\mathcal{J}$-положительны:

$$[z_j^+, z_j^+] = (\mathcal{J}z_j^+, z_j^+)_{\mathcal{H}^2} = 1 - \tilde{\varepsilon}_j^2 = \frac{2\sqrt{\rho^2\lambda_j^{1+\alpha}(B) - 1}}{\rho\lambda_j^{\frac{1+\alpha}{2}}(B) + \sqrt{\rho^2\lambda_j^{1+\alpha}(B) - 1}} > 0,$$

причем в силу (4.91) $[z_j^+, z_j^+] \to 1$ $(j \to +\infty)$. Соответственно собственные элементы $\{z_j^-\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие отрицательным собственным значениям $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^{\infty}$, $\mathcal{J}$-отрицательны:

$$[z_j^-, z_j^-] = \tilde{\varepsilon}_j^2 - 1 < 0, \quad [z_j^-, z_j^-] \to -1 \quad (j \to +\infty).$$

Отметим ещё, что при условии $\rho^2 > \lambda_1^{-1-\alpha}(B)$ все собственные значения задачи вещественны. В противном случае собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^+ = (u_k(B); i\varepsilon_k u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\varepsilon_k u_k(B); u_k(B))^\tau,$$
$$\varepsilon_k := \lambda_k^{\frac{1+\alpha}{2}}(B)(\rho - i\sqrt{\lambda_k^{-1-\alpha}(B) - \rho^2}), \quad k = \overline{1,m}.$$

Из сформулированных свойств получаем следующие выводы. Спектральная задача (4.59)-(4.60) при условиях (4.83) имеет дискретный спектр (4.79), все собственные значения (за исключением, быть может, конечного числа невещественных собственных значений) положительны, они разбиваются на две серии (см.(4.84)), одна из которых имеет своей предельной точкой $\lambda = +\infty$, а вторая положительное число $\lambda = (2\rho)^{-1}$. Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис (при условии, что $\rho^2 > \lambda_1^{-1-\alpha}(B)$) в $\mathcal{H}^2$.

4.2.7 Пятый случай: сильно демпфированная динамическая система

Рассмотрим, наконец, вариант

$$\beta > 1, \quad \alpha > 0, \quad \rho > 0. \tag{4.86}$$

Здесь оператор $\mathcal{F}$ допускает факторизацию

$$\mathcal{F}= \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}B^{1-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{4.87}$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\alpha+\beta}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$

где $B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta}$, $B^{1-\beta}$ — компактные положительные операторы, а $B^{\alpha+\beta}$ — неограниченный положительно определенный оператор с дискретным спектром. Из (4.87) видно, что $\mathcal{F}$ — слабое возмущение оператора $\operatorname{diag}(2\rho B^{\alpha+\beta}, (2\rho)^{-1}B^{1-\beta})$, и потому следует ожидать, что в этом варианте задача на собственные значения для оператора $\mathcal{F}$ должна иметь дискретный спектр с двумя предельными точками $\lambda = +\infty$ и $\lambda = 0+$. Действительно, собственные значения этой задачи таковы:

$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}], & \rho^2 \geqslant \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B); \\ \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}], & \rho^2 < \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B). \end{cases} \quad k = 1, 2 \ldots \tag{4.88}$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_j^{+} = 2\rho\lambda_j^{\alpha+\beta}(B)[1 + o(1)] \to +\infty \quad (j \to +\infty), \tag{4.89}$$

$$\lambda_j^{-} = \frac{1}{2\rho}\lambda_j^{1-\beta}(B)[1 + o(1)] \to 0+ \quad (j \to +\infty). \tag{4.90}$$

Отвечающие этим собственным значениям собственные элементы имеют вид

$$z_j^{+} = (u_j(B); i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^{\tau}, \quad z_j^{-} = (-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B); u_j(B))^{\tau},$$

$$\tilde{\varepsilon}_j := \lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho - \sqrt{\rho^2 - \lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)}) = \frac{\lambda_j^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(B)}{\rho + \sqrt{\rho^2 + \lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)}} \to 0 \ \ (k \to +\infty). \tag{4.91}$$

Отсюда следует, что

$$z_j^{\pm} = \mathcal{K}_{\pm}\widetilde{z}_j^{\pm}, \quad \mathcal{K}_{+} := \operatorname{diag}(I; iK), \quad \mathcal{K}_{-} := \operatorname{diag}(iK; I),$$

$$K := B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2}) = B^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2})^{-1}.$$

Собственные элементы z_j^{+} являются $\mathcal{J}$-положительными, а собственные элементы z_j^{-} являются $\mathcal{J}$-отрицательными:

$$[z_j^{+}, z_j^{+}] = (\mathcal{J}z_j^{+}, z_j^{+})_{\mathcal{H}^2} = 1 - \tilde{\varepsilon}_j^2 = \frac{2\sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}}{\rho\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) + \sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}} > 0,$$

$$[z_j^{-}, z_j^{-}] = \tilde{\varepsilon}_j^2 - 1 < 0.$$

При этом

$$[z_j^{+}, z_j^{+}] \to 1, \quad [z_j^{-}, z_j^{-}] \to -1 \quad (k \to +\infty).$$

Отметим ещё, что при условии $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$ все собственные значения задачи вещественны. В противном случае собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^{+} = (u_k(B); i\varepsilon_k u_k(B))^{\tau}, \quad z_k^{-} = (-i\varepsilon_k u_k(B); u_k(B))^{\tau},$$

$$\varepsilon_k := \lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho - i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)-\rho^2}), \quad k=\overline{1,m}.$$

Сформулированные выше свойства позволяют сделать следующие выводы. Спектральная задача (4.59)-(4.60) при условиях (4.86) имеет дискретный спектр (4.88), все собственные значения (за исключением, быть может, конечного числа невещественных собственных значений) положительны, они разбиваются на две серии (см.(4.89)-(4.90)), одна из которых имеет своей предельной точкой $\lambda = +\infty$, а вторая $\lambda = 0+$. Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис (при условии, что $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$) в $\mathcal{H}^2$.

Подводя итоги рассмотрения спектральной задачи (4.59)-(4.60), отметим следующие важные обстоятельства.

При учете диссипации энергии в виде (4.58), спектр задачи существенно зависит от соотношения параметров α и β: при $0<\alpha<1, \quad 0 \leqslant \beta < \frac{1-\alpha}{2}$ имеет место малая диссипация и локализация спектра в окрестности мнимой оси; при $0<\alpha<1, \quad 0 \leqslant \beta < \frac{1-\alpha}{2}$ — средняя диссипация и локализация спектра в окрестности положительной полуоси, а также наличие лишь одной предельной точки на бесконечности; при $\alpha > 0, \quad \rho > 0$ — большая диссипация и наличие двух предельных точек на положительной полуоси.

Детальная структура спектра зависит от коэффициента диссипации ρ. В частности, при $\beta = \frac{1-\alpha}{2}, \quad 0<\alpha<1$ спектр существенно зависит от параметра ρ: при $0<\rho<1$ спектр невещественный, а при $\rho \geqslant 1$ — вещественный и положительный.

Во всем диапазоне изменения параметров α, β, δ собственные элементы образуют базис Рисса.

4.3 Спектральная задача, порождённая неполным интегро-дифференциальным уравнением.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ частный случай задачи (3.4), когда $G_k(t,s) := e^{-\gamma_k(t-s)}I$, то есть

$$A\frac{d^2u}{dt^2}+Bu+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}C_k u(s)ds = f(t), \quad u(0)=u^0, \quad u'(0)=u^1. \quad (4.92)$$

Будем далее считать, что

$$B \gg 0, \quad 0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m. \tag{4.93}$$

Тогда задачу для интегро-дифференциального уравнения можно привести к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств.

4.3.1 Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. При выполнении условий теорем 3.1.6 или 3.1.8 задача (4.92) имеет единственное сильное решение со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ на отрезке $[0,T]$, так как является частным случаем задачи (3.4).

Считая, что $u(t)$ и есть это решение, введём новые неизвестные функции согласно формулам

$$v_k(t) := \int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} C_k^{1/2} u(s)ds + v_k(0), \quad k = \overline{1,m}. \tag{4.94}$$

Так как $u(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2}))$ и при каждом $t \in [0,T]$ будет $u(t) \in \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(C_k)$, то функции $v_k(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{dv_k}{dt} = C_k^{1/2} u(t) - \gamma_k \left(v_k(t) - v_k(0)\right), \quad k = \overline{1,m}.$$

Вводя ещё функцию $z(t)$:

$$z(t) := Au'(t),$$

приходим взамен (4.92) к задаче Коши в гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$ вида

$$\mathcal{J}\frac{d\widetilde{y}}{dt} + \mathcal{B}_0\widetilde{y} = \widetilde{f}(t), \quad \widetilde{y}(0) = \widetilde{y}^0. \tag{4.95}$$

$\widetilde{y}(0) = (u(0), \widehat{v}(0), z(0))\tau \;\; u(0) = u^0, \;\; \widehat{v}(0) = (v_1(0), \ldots, v_m(0))^\tau, \;\; z(0) := A^{-1}u^1.$

Здесь

$$\widetilde{y} := (u, \widehat{v}, z)^\tau, \quad \widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{H}_k \oplus \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_k := \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m},$$

$$\widehat{v} := (v_1, \ldots, v_m)^\tau, \quad \widehat{\gamma} := \mathrm{diag}(\gamma_1 I, \ldots, \gamma_m I),$$

$$\widehat{I} := \mathrm{diag}(\underbrace{I, \ldots, I}_{m \text{ раз}}), \quad \widehat{C}^{1/2} := (C_1^{1/2}, \ldots, C_m^{1/2})^\tau, \quad k = \overline{1,m},$$

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & \widehat{I} & 0 \\ -I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_0 := \begin{pmatrix} B & \widehat{C}^{1/2} & 0 \\ -\widehat{C}^{1/2} & \widehat{\gamma}\widehat{I} & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{f} := \begin{pmatrix} f(t) - \sum_{k=1}^m C_k v_k(0) \\ \widehat{\gamma}\widehat{v}(0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 4.3.1. Оператор $\mathcal{B}_0$, заданный на плотной в гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$ области

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}_0) := \mathcal{D}(B) \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{D}(C_k^{1/2}) \oplus \mathcal{H},$$

является равномерно аккретивным оператором.

Доказательство. Действительно,

$$(\mathcal{B}_0\widetilde{y}, \widetilde{y}) = \left(\begin{pmatrix} Bu + \widehat{C}^{1/2}\widehat{v} \\ -\widehat{C}u^{1/2} + \widehat{\gamma}\widehat{v} \\ A^{-1}z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \widehat{v} \\ z \end{pmatrix} \right) = ||B^{1/2}u||^2 + \gamma||\widehat{v}||^2 - 2i\mathrm{Im}(C^{1/2}u, \widehat{v}) + ||A^{-1/2}z||^2,$$

откуда

$$\mathrm{Re}(\mathcal{B}_0\widetilde{y}, \widetilde{y}) = ||B^{1/2}u||^2 + \widehat{\gamma}||\widehat{v}||^2 + ||A^{-1/2}z||^2.$$

Далее, в силу положительной определённости операторов B (см. (4.93)) и A^{-1} (поскольку $0 < A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$)

$$||B^{1/2}u||^2 \geqslant \beta||u||^2, \quad ||A^{-1/2}z||^2 \geqslant \alpha||z||^2, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Окончательно для $\mathrm{Re}(\mathcal{B}_0\widetilde{y}, \widetilde{y})$ имеем

$$\mathrm{Re}(\mathcal{B}_0\widetilde{y}, \widetilde{y}) \geqslant \min\{\beta, \gamma_1, \alpha\}\, ||\widetilde{y}||^2. \qquad \square$$

Лемма 4.3.2. *Операторная матрица $\mathcal{B}_0$ допускает замыкание до оператора*

$$\mathcal{B} := \overline{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} B^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{I} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (\widehat{Q}^\tau)^* & 0 \\ \widehat{Q}^\tau & \widehat{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{I} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\widehat{Q} := (C_1^{1/2}B^{-1/2}, \ldots, C_m^{1/2}B^{-1/2}),$$

действующего по формуле

$$\mathcal{B}\widetilde{y} := \begin{pmatrix} B(u + B^{-1/2}(\widehat{Q}^\tau)^*\widehat{v}) \\ -\widehat{Q}^\tau B^{1/2}u + \widehat{\gamma}\widehat{v} \\ A^{-1}z \end{pmatrix}$$

на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) := \left\{ (u, v, z)^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} : (u + B^{-1/2}(\widehat{Q}^\tau)^* \widehat{v}) \in \mathcal{D}(B),\ u \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \right\}. \qquad \square$$

Рассмотрим наряду с задачей (4.95) аналогичную задачу с замкнутым оператором $\mathcal{B}$, то есть

$$\mathcal{J}\frac{d\widetilde{y}}{dt} + \mathcal{B}\widetilde{y} = \widetilde{f}(t), \quad \widetilde{y}(0) = \widetilde{y}^0, \tag{4.96}$$

и назовём её задачей Коши, ассоциированной с задачей (4.92).

4.3.2 Вывод задачи для операторного пучка. Рассмотрим решения однородной задачи (4.96), зависящие от t по закону

$$\widetilde{y}(t) = e^{\lambda t}\widetilde{y}, \quad \widetilde{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{B}),$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — неизвестный заранее комплексный декремент затухания, а $\widetilde{y} \neq 0$ — так называемый амплитудный элемент.

Для амплитудных элементов $\widetilde{y}$ получаем спектральную задачу

$$\mathcal{B}\widetilde{y} = \lambda\mathcal{J}\widetilde{y}, \quad \widetilde{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \tag{4.97}$$

ассоциированную с задачей Коши (4.92) и порождённую задачей (4.96).

Запишем задачу (4.97) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} B^{1/2}(B^{1/2}u + (\widehat{Q}^\tau)^*\widehat{v}) = \lambda z, \\ -\widehat{Q}^\tau B^{1/2}u + \widehat{\gamma}\widehat{v} = \lambda\widehat{v}, \\ A^{-1}z = -\lambda u. \end{cases} \tag{4.98}$$

Осуществим в системе (4.98) замену $B^{1/2}u = \xi$, в результате придём к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} B^{1/2}(\xi + (\widehat{Q}^\tau)^*\widehat{v}) - \lambda z = 0, \\ -\widehat{Q}^\tau\xi + \widehat{\gamma}\widehat{v} - \lambda\widehat{v} = 0, \\ z + \lambda AB^{-1/2}\xi = 0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda \neq \gamma_k$, $(k = \overline{1, m})$. Выразим из второго и третьего уравнений системы $\widehat{v}$ и z соответственно:

$$\widehat{v} = -(\lambda\widehat{I} - \widehat{\gamma})^{-1}\widehat{Q}^\tau\xi, \quad z = -\lambda AB^{-1/2}\xi.$$

Подставляя их в первое соотношение системы, получим

$$\xi - (\widehat{Q}^\tau)^*(\lambda\widehat{I} - \widehat{\gamma})^{-1}\widehat{Q}^\tau\xi + \lambda^2 B^{-1/2}AB^{-1/2}\xi = 0.$$

После несложных преобразований эта задача приводится к спектральной задаче для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$L(\lambda)\xi := \left\{ I + \lambda^2 B^{-1/2}AB^{-1/2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} F_k \right\} \xi = 0, \quad \xi \in \mathcal{H},$$

$$F_k := (C_k^{1/2}B^{-1/2})^* C_k^{1/2}B^{-1/2}, \quad F_k = F_k^* \geqslant 0, \ k = 1, m.$$

Спектральная задача такого вида подробно исследовалась в работе [32] (см. формулу (14), с.14). Поэтому дальнейшее исследование пучка $L(\lambda)$ здесь не приводится, т.к. повторяет исследование, проведённое в [32]. Отметим лишь, что при некоторых дополнительных требованиях на операторные коэффициенты F_k, $k = \overline{1,m}$, и $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ для $L(\lambda)$ в [32] получены утверждения о структуре и асимптотике спектра, а также о свойствах базисности Рисса и кратной полноте части собственных и присоединённых элементов.

4.4 Спектральная проблема, связанная с полным интегро-дифференциальным уравнением второго порядка.

Здесь рассматривается спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши (4.99)

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{\gamma_k(t-s)} C_k u(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1, \tag{4.99}$$

для полного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Осуществим переход от этой задачи к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Введём новые искомые функции

$$v_k(t) := \int_0^t e^{\gamma_k(t-s)} C_k^{1/2} u(s)ds + v_k(0), \quad k = \overline{1,m}, \text{ и } z(t) := A\frac{du}{dt}. \tag{4.100}$$

Продифференцируем каждое уравнение (4.100)

$$\frac{dv_k}{dt} = C_k^{1/2}u(t) - \gamma_k(v(t) - v(0)), \quad k = \overline{1,m}, \quad \frac{du}{dt} = A^{-1}z. \tag{4.101}$$

Рассматривая уравнения (4.99) и (4.101) как систему, приходим к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\mathcal{J}_F\frac{dy}{dt} + \mathcal{B}y = \widetilde{f}_0(t), \tag{4.102}$$

$$y(t) := (u(t); \widehat{v}(t), z(t))^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \quad \widehat{v}(t) := (v_1, \ldots, v_m)^\tau.$$

$$\widetilde{f}_0(t) := (f(t) - \sum_{k=1}^{m} C_k^{1/2}v_k(0); \gamma_1 v_1(0), \ldots, \gamma_k v_k(0), 0)^\tau,$$

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} B & (\widehat{C}^{1/2})^\tau & 0 \\ -\widehat{C}^{1/2} & \widehat{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_F := \begin{pmatrix} F & 0_m^\tau & I \\ 0_m & \widehat{I}_m & 0_m \\ -I & 0_m^\tau & 0 \end{pmatrix},$$

где $\widehat{C}^{1/2} := (C_1^{1/2}, \ldots, C_m^{1/2})^\tau$, $\widehat{\gamma} := \mathrm{diag}\{\gamma_1 I, \ldots, \gamma_m I\}$, $0_m := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{m раз}})^\tau$.

4.4.1 Постановка спектральной проблемы Рассмотрим тот частный случай, когда операторы кинетической энергии A, диссипации F и подынтегральные операторы C_k, $k = \overline{1,m}$, являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии B:

$$A := B^{-\alpha}, \quad F := B^{\beta}, \quad C_k := B^{\delta_k}, \quad \alpha > 0, \quad \beta, \delta \geqslant 0. \tag{4.103}$$

При этом считаем, что $0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$; тогда собственные элементы оператора B образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, а все собственные значения положительны и имеют предельную точку $+\infty$.

Это позволяет подробно изучить случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы и промежуточные между ними варианты, а также проследить, как видоизменяется (перестраивается) спектр этой задачи при возрастании β и различных α и δ.

Рассмотрим задачу о нормальных колебаниях, отвечающую в задаче (4.102) свободным движениям динамической системы:

$$f(t) \equiv 0, \quad v_k(0) \equiv 0, \ k = \overline{1,m}, \quad y(t) = e^{-\lambda t}y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда для амплитудных элементов y возникает спектральная задача

$$\mathcal{B}y = \lambda \mathcal{J}_F y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.104}$$

которую можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} Bu + (\widehat{C}^{1/2})^\tau \widehat{v} = \lambda F u + \lambda z, \\ -\widehat{C}^{1/2} u + \widehat{\gamma}\widehat{v} = \lambda \widehat{v}, \\ A^{-1} z = -\lambda u. \end{cases} \tag{4.105}$$

Выразим из последних двух уравнений системы $\widehat{v}$ и z:

$$\widehat{v} = \frac{1}{\widehat{\gamma} - \lambda} \widehat{C}^{1/2} u, \quad z = -\lambda A u. \tag{4.106}$$

Подставляя теперь полученные выражения в первое уравнение системы, получим спектральную задачу для операторного пучка

$$L(\lambda)u = \lambda^2 A u - \lambda F u + B u - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} C_k u = 0. \tag{4.107}$$

В условиях (4.103) этот пучок имеет вид

$$L(\lambda)u = \{\lambda^2 I - \lambda \cdot B^{\beta+\alpha} + B^{1+\alpha} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} B^{\delta+\alpha}\} u. \tag{4.108}$$

Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ — система собственных значений оператора B, а $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ — система его собственных элементов, которая является ортонормированным базисом в $\mathcal{H}$. Тогда из (4.108) получим характеристические уравнения:

$$f_k(\lambda) := \lambda^2 - \lambda \cdot \mu_k^{\beta+\alpha} + \mu_k B^{1+\alpha} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_n} \mu_k^{\delta_n+\alpha} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.109}$$

4.4.2 Первый случай

Будем сначала считать, что

$$\alpha > 0, \quad 0 \leqslant \beta < 1, \quad 0 < \delta_n < \frac{1}{2}, \ n = \overline{1, m}. \tag{4.110}$$

Тогда уравнение $f_k(\lambda) = 0$ имеет для каждого k два комплексных корня $\lambda_\pm \to \pm i\infty$ и m положительных вещественных корней: $\lambda_n \to \gamma_n$, $n = \overline{1, m}$. Получим асимптотические формулы для собственных значений уравнения

(4.109). При $\lambda \to \infty$ в характеристическом уравнении главным является слагаемое λ^2. Поэтому, представив $f_k(\lambda)$ в виде

$$f_k(\lambda) = \lambda^2 \left(1 - \frac{\mu_k^{\beta+\alpha}}{\lambda} + \frac{\mu_k^{1+\alpha}}{\lambda^2} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\mu_k^{\delta_n+\alpha}}{\lambda^2(\lambda - \gamma_n)}\right) \tag{4.111}$$

и учитывая условия (4.110), получаем, что собственные значения в этом случае таковы:

$$\lambda_k^{\pm} = \pm i\mu_k^{\frac{1+\alpha}{2}}[1 + o(1)] \to \pm i\infty \quad k \to +\infty. \tag{4.112}$$

Таким образом, в задаче (4.108) имеется ветвь невещественных собственных значений с пределом в бесконечно удалённой точке комплексной плоскости. В этом случае собственные элементы имеют вид

$$y_k^{\pm} = (\pm u_k, \pm\frac{\mu_k^{\frac{\delta_1}{2}}(\gamma_1 \pm i\mu_k^{\frac{1+\alpha}{2}})}{\gamma_1^2 + \mu_k^{1+\alpha}}u_k, \ldots, \pm\frac{\mu_k^{\frac{\delta_m}{2}}(\gamma_m \pm i\mu_k^{\frac{1+\alpha}{2}})}{\gamma_1^2 + \mu_k^{1+\alpha}}u_k, \mp i\mu_k^{\frac{1-\alpha}{2}}u_k)^{\tau}. \tag{4.113}$$

Рассмотрим теперь решения при $\lambda \to \gamma_n$, $n = \overline{1,m}$. Здесь в характеристическом уравнении главным является слагаемое $\dfrac{\mu_k^{\delta_n+\alpha}}{\lambda - \gamma_n}$. Уравнение $f_k(\lambda) = 0$ представим в виде

$$\frac{\mu_k^{\delta_n+\alpha}}{\lambda - \gamma_n}\Bigl(1 - \lambda^2(\lambda - \gamma_n)\mu_k^{-\delta_n-\alpha} + \lambda(\lambda - \gamma_n)\mu_k^{\beta-\delta_n} - (\lambda - \gamma_n)\mu_k^{1-\delta_n} + \tag{4.114}$$

$$+ \sum_{i=1, i\neq n}^{m} \frac{\lambda - \gamma_n}{\lambda - \gamma_i}\mu_k^{\delta_i-\delta_n}\Biggr) = 0. \tag{4.115}$$

С учётом условий (4.110) асимптотика собственных значений в этом случае принимает вид

$$\lambda_k^n = \gamma_n + \mu_k^{\delta_n-1}[1 + o(1)] \to \gamma_n,\ n = \overline{1,m}, \quad k \to +\infty. \tag{4.116}$$

Здесь для каждого k имеется ветвь положительных собственных значений с пределом справа в точке γ_n. Соответствующие этой ветви собственные элементы в этом случае имеют вид

$$y_k^n = (\pm u_k(B), \mp\mu_k^{1-\frac{\delta_1}{2}}u_k(B), \ldots, \mp\mu_k^{1-\frac{\delta_m}{2}}u_k(B), \mp\mu_k^{-\alpha}(\gamma_n + \mu_k^{\delta_n-1})u_k(B))^{\tau}. \tag{4.117}$$

Таким образом, спектральная задача (4.104)-(4.108) в условиях (4.110) имеет дискретный спектр (4.112), (4.116), состоящий из $m+1$ ветви с предельными точками $\lambda = \infty$ и $\lambda = \gamma_n$, $n = \overline{1,m}$.

Замечание 4.4.1. Отметим, что условия (4.110) отвечают случаям малой и средней диссипации энергии системы.

4.4.3 Второй случай: пограничный вариант

Будем теперь считать, что

$$\beta = 1, \quad \alpha > 0, \quad 0 < \delta_n < \frac{1}{2}. \tag{4.118}$$

В этом случае характеристическое уравнение примет вид

$$f_k(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \cdot \mu_k^{1+\alpha} + \mu_k^{1+\alpha} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_k^{\delta_i+\alpha}}{\lambda - \gamma_i} = 0. \tag{4.119}$$

Проводя рассуждения подобно пункту 4.4.2, убедимся, что уравнение $f_k(\lambda) = 0$ для каждого k имеет $m+2$ положительных вещественных корня, и получим асимптотические формулы для собственных значений уравнения. Так, представляя функцию $f_k(\lambda)$ в виде (4.111), получим асимптотические формулы

$$\lambda_k^+ = \mu_k^{\alpha+1}[1+o(1)], \quad \lambda_k^- = 1 - \frac{1}{4}\mu_k^{-1-\alpha}[1+o(1)] \quad (k \to +\infty) \tag{4.120}$$

Значит, имеются две ветви положительных собственных значений с пределами в $+\infty$ и 1 слева. В этом случае собственные элементы имеют вид

$$y_k^{\pm} = (\pm u_k, \pm\frac{\mu_k^{\frac{\delta_1}{2}}}{\gamma_1 - \mu_k^{1+\alpha}} u_k, \ldots, \pm\frac{\mu_k^{\frac{\delta_m}{2}}}{\gamma_m - \mu_k^{1+\alpha}} u_k, \mp\mu_k u_k)^{\tau}. \tag{4.121}$$

Далее, рассматривая уравнение $f_k(\lambda) = 0$, в виде (4.114), получим следующие формулы для собственных значений

$$\lambda_k^n = \gamma_n - \frac{1}{2(\gamma_n - 1)}\mu_k^{\delta_n - 1}[1+o(1)] \to \gamma_n, \ n = \overline{1,m}, \ (k \to +\infty). \tag{4.122}$$

Здесь для каждого n имеется ветвь положительных собственных значений, стремящихся слева к точке γ_n. Соответствующие этой ветви собственные элементы в этом случае имеют вид

$$y_k^n = (\pm u_k, \pm 2(\gamma_n - 1)\mu_k^{1-\frac{\delta_1}{2}} u_k, \ldots, \pm 2(\gamma_n - 1)\mu_k^{1-\frac{\delta_m}{2}} u_k, \mp\mu_k^{-\alpha}(\gamma_n - \frac{1}{2(\gamma_n - 1)}\mu_k^{\delta_n - 1}) u_k)^{\tau}. \tag{4.123}$$

Таким образом спектральная задача (4.104)-(4.108) в условиях (4.118) имеет дискретный положительный спектр (4.120), (4.122), состоящий из $m+2$ ветвей с предельными точками $\lambda = +\infty$, $\lambda = 1$ и $\lambda = \gamma_n$, $n = \overline{1,m}$.

4.4.4 Третий случай: сильно демпфированная динамическая система

Рассмотрим теперь вариант, когда параметры удовлетворяют условию

$$\alpha > 0, \quad \beta > 1, \quad 0 < \delta_n < \frac{\beta}{2},\ n = \overline{1, m}. \tag{4.124}$$

Тогда, вновь проводя рассуждения, как в предыдущих двух пунктах, получим асимптотики собственных значений задачи. Сперва представим функцию $f_k(\lambda)$ в виде (4.111), получим асимптотические формулы

$$\lambda_k = \mu_k^{\alpha+\beta}[1 + o(1)], \quad (k \to +\infty), \tag{4.125}$$

то есть имеется ветвь положительных собственных значений с пределом в $+\infty$. В этом случае собственные элементы имеют вид

$$y_k^{\pm} = (\pm u_k, \pm \frac{\mu_k^{\frac{\delta_1}{2}}}{\gamma_1 - \mu_k^{\beta+\alpha}} u_k, \dots, \pm \frac{\mu_k^{\frac{\delta_m}{2}}}{\gamma_m - \mu_k^{\beta+\alpha}} u_k, \mp \mu_k^{\beta} u_k)^{\tau}.$$

Далее, рассматривая уравнение $f_k(\lambda) = 0$ в виде (4.114), получим следующие формулы для собственных значений

$$\lambda_k^{n\gamma_n} = \gamma_n - \frac{1}{\gamma_n} \mu_k^{\delta_n - \beta}[1 + o(1)] \to \gamma_n,\ n = \overline{1, m},\ \ (k \to +\infty). \tag{4.126}$$

$$\lambda_k^{n0} = \frac{1}{\gamma_n} \mu_k^{\delta_n - \beta}[1 + o(1)],\ n = \overline{1, m},\ \ (k \to +\infty). \tag{4.127}$$

Здесь для каждого n имеются две ветви положительных собственных значений: стремящихся слева к точке γ_n и стремящихся к 0 справа. Соответствующие этим ветвям собственные элементы в этом случае имеют вид

$$y_k^{n\gamma_n} = (\pm u_k(B), \pm \gamma_n \mu_k^{\beta - \frac{\delta_1}{2}} u_k(B), \dots, \pm \gamma_n \mu_k^{\beta - \frac{\delta_m}{2}} u_k(B), \mp \mu_k^{-\alpha}(\gamma_n \frac{1}{\gamma_n} \mu_k^{\delta_n - \beta}) u_k(B))^{\tau}$$

и

$$y_k^{n0} = (\pm u_k(B), \pm \frac{\gamma_n \mu_k^{\frac{\delta_1}{2}}}{\gamma_1 \gamma_n - \mu_k^{\delta_n - \beta}} u_k(B), \dots, \pm \frac{\gamma_n \mu_k^{\frac{\delta_m}{2}}}{\gamma_1 \gamma_n - \mu_k^{\delta_n - \beta}} u_k(B), \mp \frac{1}{\gamma_n} \mu_k^{\delta_n - \beta - \alpha} u_k(B))^{\tau}.$$

Таким образом, спектральная задача (4.104)-(4.108) в условиях (4.124) имеет дискретный положительный спектр (4.125), (4.126), (4.127), состоящий из $m + 2$ ветвей с предельными точками $\lambda = +\infty$, $\lambda = 0+$ и $\lambda = \gamma_n$, $n = \overline{1, m}$.

Подводя итоги рассмотрения спектральной задачи (4.104)-(4.108), отметим следующие важные обстоятельства.

При учете диссипации энергии в виде (4.58), спектр задачи существенно зависит от соотношения параметров α и β: при $0 < \alpha, \quad 0 \leqslant \beta < 1$ имеет место малая и средняя диссипация и локализация спектра в окрестности мнимой оси; при $0 < \alpha, \quad \beta = 1$ — средняя диссипация и локализация спектра в окрестности положительной полуоси, а также наличие предельных точек на бесконечности и в 1; при $\alpha > 0, \quad \beta > 1$ — большая диссипация и наличие двух предельных точек на положительной полуоси $+\infty$ и $0+$. В каждом из перечисленных случаев имеются m ветвей положительных собственных значений с предельными точками γ_n, $n = \overline{1, m}$.

4.5 Спектральная задача, ассоциированная с проблемой о малых движениях вязкоупругого стержня

В данном параграфе изучается задача о колебании вязкоупругого стержня. Уравнение продольных колебаний однородного стержня (см. [33, с.130]) в абстрактно-операторной форме описывается интегро-дифференциальным уравнением второго порядка в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Поэтому далее изучается спектральная задача связанная с полным интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра второго порядка, неразрешённым относительно старшей производной. Построения, проведённые здесь, обобщают результаты из [51].

4.5.1 Сведение интегро-дифференциального уравнения второго порядка к дифференциальному уравнению первого порядка Рассмотрим полное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра второго порядка вида

$$A\frac{d^2u}{dt^2}+\beta B\frac{du}{dt}+Bu-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}Bu(s)ds = f(t), \quad u(0)=u^0,\ u'(0)=u^1, \tag{4.128}$$

$$0 < A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad B = B^* \gg 0, \quad 0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),$$

$$\alpha_k, \beta > 0, \quad 0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m < +\infty, \quad 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{\gamma_k} > 0, \quad k = \overline{1,m}.$$

Осуществим в (4.128) замену $A^{1/2}u = v$, имеем

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \beta A^{-1/2}BA^{-1/2}\frac{dv}{dt} + A^{-1/2}BA^{-1/2}v - \sum_{k=1}^{m}\alpha_k \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}A^{-1/2}BA^{-1/2}v(s)ds =$$
$$= A^{-1/2}f(t) =: \widetilde{f}(t), \quad v(0) = A^{1/2}u^0, \ v'(0) = A^{1/2}u^1. \tag{4.129}$$

Введём обозначение $A^{-1/2}BA^{-1/2} =: D \gg 0$, а затем с помощью интегрирования по частям преобразуем интегральные слагаемые в последнем уравнении к более удобному виду:

$$\alpha_k \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}Dv(s)ds = \frac{\alpha_k}{\gamma_k}\int_0^t Dv(s)de^{-\gamma_k(t-s)} =$$
$$= \frac{\alpha_k}{\gamma_k}Dv(t) - \frac{\alpha_k}{\gamma_k}Dv(0)e^{-\gamma_k t} - \frac{\alpha_k}{\gamma_k}\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}Dv'(s)ds.$$

В дальнейших рассуждениях будем считать, что $v(0) = A^{1/2}u^0 \in \mathcal{D}(D)$. С учётом проведенных вычислений уравнение (4.129) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + D^{1/2}\left(\beta D^{1/2}\frac{dv}{dt} + D^{1/2}v - \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\gamma_k}D^{1/2}v + \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\gamma_k}\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}D^{1/2}v'(s)ds\right) =$$
$$= \widetilde{f}(t) - \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\gamma_k}De^{-\gamma_k t}v(0) =: \widehat{f}(t). \tag{4.130}$$

Введём обозначения:

$$\delta := 1 - \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\gamma_k} > 0, \quad \rho_k := \frac{\alpha_k}{\gamma_k}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{4.131}$$

Осуществим в уравнении (4.130) следующие замены:

$$w := v', \quad v_0 := \delta^{1/2}D^{1/2}v, \quad v_k := \rho_k^{1/2}\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}D^{1/2}v'(s)ds, \quad k = \overline{1,m}. \tag{4.132}$$

Преобразованное уравнение (4.130) вместе с продифференцированными второй и третьей заменами (4.132) запишем в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} + \delta^{1/2}D^{1/2}\left(\delta^{-1/2}\beta D^{1/2}w + v_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\delta^{-1/2}\rho_k^{1/2}v_k\right) = \widehat{f}(t), \\ \dfrac{dv_0}{dt} = \delta^{1/2}D^{1/2}\dfrac{dv}{dt} = \delta^{1/2}D^{1/2}w, \\ \dfrac{d\widehat{v}}{dt} = \widehat{\rho}^{1/2}D^{1/2}w - \widehat{\gamma}\widehat{v}, \end{cases}$$

где $\widehat{\rho}^{1/2} := (\rho_1^{1/2}I, \ldots, \rho_m^{1/2}I)^\tau$, $\widehat{\gamma} := \operatorname{diag}\{\gamma_1 I, \ldots, \gamma_m I\}$, $\widehat{v} = (v_1, \ldots, v_m)^\tau$.

Запишем эту систему вместе с начальными условиями в виде дифференциального операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{m+2} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{k=1}^{m}\mathcal{H}$:

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{B}y = \widehat{F}(t), \quad y(0) = y^0. \tag{4.133}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \delta^{1/2}D^{1/2} & 0 & 0_m^\tau \\ 0 & I & 0 \\ 0_m & 0 & \widehat{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{-1}\beta I & I & \delta^{-1/2}(\widehat{\rho}^{1/2})^\tau \\ -I & 0 & 0 \\ -\delta^{-1/2}\widehat{\rho}^{1/2} & 0 & \widehat{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{1/2}D^{1/2} & 0 & 0_m^\tau \\ 0 & I & 0 \\ 0_m & 0 & \widehat{I}_m \end{pmatrix},$$

$$y = (w, v_0, \widehat{v})^\tau \in \mathcal{H}^{m+2}, \ y^0 := (w(0); v_0(0); \widehat{v}(0))^\tau = (A^{1/2}u^1; \delta^{1/2}D^{1/2}A^{1/2}u^0; 0_m^\tau)^\tau,$$

$$\widehat{F}(t) := (\widehat{f}(t); 0; 0_m^\tau)^\tau, \ 0_m := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m\ \text{раз}})^\tau, \quad \widehat{I}_m := \operatorname{diag}\{\underbrace{I, \ldots, I}_{m\ \text{раз}}\}.$$

Оператор $\mathcal{B}$ задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \{y \in \mathcal{H}^{m+2} : \ (\delta^{1/2}\beta D^{1/2}w + v_0 + (\widehat{\rho}^{1/2})^\tau\delta^{-1/2}\widehat{v}) \in \mathcal{D}(D^{1/2}), \ w \in \mathcal{D}(D^{1/2})\},$$

по формуле

$$\mathcal{B}y = \begin{pmatrix} \delta^{1/2}D^{1/2}\left(\delta^{-1/2}\beta D^{1/2}w + v_0 + (\widehat{\rho}^{1/2})^\tau\delta^{-1/2}\widehat{v}\right) \\ -\delta^{1/2}D^{1/2}w \\ -\widehat{\rho}^{1/2}D^{1/2}w + \widehat{\gamma}\widehat{v} \end{pmatrix}, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}).$$

4.5.2 Постановка спектральной задачи.

Будем искать решение однородного уравнения (4.133) (при $\widehat{F}(t) \equiv 0$) в виде $y(t) = e^{-\lambda t}y$. В результате получим уравнение $(\mathcal{B} - \lambda I)y = 0$, которое является спектральной задачей, ассоциированной с интегро-дифференциальным уравнением (4.128), где λ — спектральный параметр, y — амплитудный элемент. Перепишем эту спектральную задачу в виде системы:

$$\begin{cases} \delta^{1/2}D^{1/2}\left(\delta^{-1/2}\beta D^{1/2}w + v_0 + (\widehat{\rho}^{1/2})^{\tau}\delta^{-1/2}\widehat{v}\right) = \lambda w, \\ -\delta^{1/2}D^{1/2}w = \lambda v_0, \\ -\widehat{\rho}^{1/2}D^{1/2} + \widehat{\gamma}\widehat{v} = \lambda\widehat{v}. \end{cases}$$

Выразим из последних уравнений v_0, $\widehat{v}$,

$$v_0 = -\frac{\delta^{1/2}}{\lambda}D^{1/2}w, \quad \widehat{v} = -\widehat{\rho}^{1/2}(\lambda I_m - \widehat{\gamma})^{-1}D^{1/2}w,$$

и подставим в первое, имеем:

$$\delta^{1/2}D^{1/2}\left(\delta^{-1/2}\beta D^{1/2}w - \frac{\delta^{1/2}}{\lambda}D^{1/2}w - \sum_{n=1}^{m}\frac{\rho_n\delta^{-1/2}}{\lambda-\gamma_n}D^{1/2}w\right) = \lambda w.$$

Введём новую переменную $\xi = D^{1/2}w$, получим

$$\beta\xi - \frac{\delta}{\lambda}\xi - \sum_{n=1}^{m}\frac{\rho_n}{\lambda-\gamma_n}\xi - \lambda D^{-1}\xi = 0;$$

умножая теперь обе части на $-\lambda$ и учитывая обозначения (4.131), преобразуем последнее уравнение к следующему виду:

$$(I - \lambda\beta I + \lambda^2 D^{-1} + \sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\lambda-\gamma_n}I)\xi = 0. \tag{4.134}$$

По условию $0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, а значит и $0 < D^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, и D — оператор с дискретным спектром. Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система собственных значений D^{-1}, а $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система его собственных элементов, которая является ортонормированным базисом в $\mathcal{H}$. Из (4.134) получим характеристические уравнения:

$$f_k(\lambda) := 1 - \beta\lambda + \mu_k\lambda^2 - \sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\gamma_n-\lambda} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.135}$$

Пусть $\{\lambda_k^{(p)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $p = \overline{1, m+2}$, — решения характеристических уравнений, (4.135). Можно убедиться, что

$$\begin{pmatrix} \delta^{-1}\beta I & I & (\widehat{\rho}^{1/2})^{\tau}\delta^{-1/2} \\ -I & 0 & 0_m \\ -\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2} & 0 & \widehat{\gamma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ -\frac{1}{\lambda}{}^{(p)}_{k}u_k \\ \widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma} - \lambda_k^{(p)})^{-1}u_k \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_k^{(p)} \begin{pmatrix} \delta^{-1}D^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ -\frac{1}{\lambda k}^{(p)} u_k \\ \widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma} - \lambda_k^{(p)})^{-1} u_k \end{pmatrix}.$$

Можно проверить также, что следующая система

$$\varphi_k^{(p)} = \left(D^{-1/2}u_k, -\frac{\delta^{1/2}}{\lambda_k^{(p)}} u_k, \rho_1^{1/2}\left(\gamma_1 - \lambda_k^{(p)}\right)^{-1} u_k, \ldots, \rho_m^{1/2}(\gamma_m - \lambda_k^{(p)})^{-1} u_k \right)^\tau =$$

$$= \left(\delta^{-1/2}\mu^{-1/2}u_k, \frac{1}{\lambda_k^{(p)}} u_k, \rho_1^{1/2}\delta^{-1/2}\left(\gamma_1 - \lambda_k^{(p)}\right)^{-1} u_k, \ldots, \rho_m^{1/2}\delta{-1/2}(\gamma_m - \lambda_k^{(p)})^{-1} u_k \right)^\tau \tag{4.136}$$

является системой собственных векторов оператора $-\mathcal{B}$, отвечающая системе собственных значений $\lambda_k^{(p)}$.

4.5.3 О базисности собственных элементов задачи.

Для проведения дальнейших построений введём в пространстве $\mathcal{H}^{m+2}$ индефинитное скалярное произведение по формуле:

$$[\varphi_1, \varphi_2]_{\mathcal{H}^{m+2}} = (u^{(1)}, u^{(2)})_{\mathcal{H}} - (v_0^{(1)}, v_0^{(2)})_{\mathcal{H}} - (\widehat{v}^{(1)}, \widehat{v}^{(2)})_{\mathcal{H}^m}.$$

$$\forall\ \varphi_1 = (u^{(1)}; v_0^{(1)}; \widehat{v}^{(1)})^\tau \text{ и } \varphi_2 = (u^{(2)}; v_0^{(2)}; \widehat{v}^{(2)})^\tau.$$

Обозначим далее при любом $k \in \mathbb{N}$ через $\varphi_k^{(+)}$, $\varphi_k^{(-)}$ и $\varphi_k^{(0,i)}$, $k = \overline{1,m}$, собственные элементы $\varphi_k^{(p)}$ из (4.136), отвечающие соответственно собственным значениям из верхней $(+)$ и нижней $(-)$ комплексной полуплоскостей, а также на положительной полуоси.

Лемма 4.5.1. *Имеют место соотношения*

$$[\varphi_k^{(\pm)}, \varphi_k^{(\pm)}] = 0,\ [\varphi_k^{(\pm)}, \varphi_k^{(0i)}] = 0,\ [\varphi_k^{(+)}, \varphi_k^{(-)}] = \delta^{-1}g_k'(\lambda_k^{(+)}),\ [\varphi_k^{(-)}, \varphi_k^{(+)}] = \delta^{-1}g_k'(\lambda_k^{(-)}),$$

$$[\varphi_k^{(0i)}, \varphi_k^{(0i)}] = \delta^{-1}g_k'(\lambda_k^{(0i)}), \quad [\varphi_k^{(0i)}, \varphi_k^{(\pm)}] = 0, \quad [\varphi_k^{(0i)}, \varphi_k^{(0j)}] = 0, \quad i, j = \overline{1,m}.$$

где

$$g_k(\lambda) := \lambda^{-1} f_k(\lambda) = \frac{\delta}{\lambda} - \beta + \mu_k\lambda - \sum_{n=1}^{m} \frac{\alpha_n}{\gamma_n(\gamma_n - \lambda)}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Вычислим сначала всевозможные индефинитные скалярные произведения между элементами системы $\{\varphi_k^{(p)}\}$:

$$[\varphi_k^{(p)},\varphi_k^{(q)}]_{\mathcal{H}} = (\delta^{-1/2}\mu_k^{-1/2}u_k, \delta^{-1/2}\mu_k^{-1/2}u_k)_{\mathcal{H}} - (\frac{1}{\lambda_k^{(p)}}u_k, \frac{1}{\lambda_k^{(q)}}u_k) -$$
$$- \left(\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(p)})^{-1}u_k, \widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(q)})^{-1}u_k\right)$$
$$= \delta^{-1}\mu_k^{-1/2} - \frac{1}{\lambda_k^{(p)}\overline{\lambda_k^{(q)}}} - \sum_{n=1}^{m}\frac{\rho_n}{\delta(\gamma_n-\lambda_k^{(p)})(\gamma_n-\overline{\lambda_k^{(q)}})} = \tag{4.137}$$
$$= \delta^{-1}\left(\mu_k^{-1/2} - \frac{\delta}{\lambda_k^{(p)}\overline{\lambda_k^{(q)}}} - \sum_{n=1}^{m}\frac{\rho_n}{(\gamma_n-\lambda_k^{(p)})(\gamma_n-\overline{\lambda_k^{(q)}})}\right).$$

Убедимся теперь, что $f_k(\lambda) = \lambda g_k(\lambda)$. Действительно,

$$f_k(\lambda) = \lambda\left(\frac{1}{\lambda} - \beta + \mu_k\lambda - \sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\lambda(\gamma_n-\lambda)}\right) =$$
$$\lambda\left(\frac{1}{\lambda} - \beta + \mu_k\lambda - \sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\gamma_n}\left(\frac{1}{\gamma_n-\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \tag{4.138}$$
$$= \lambda\left(\left(1-\sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda} - \beta + \mu_k\lambda - \sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\gamma_n(\gamma_n-\lambda)}\right) = \lambda g_k(\lambda).$$

Из (4.135), (4.5.3) получим следующие соотношения:

$$f_k(\lambda_k^{(p)}) = \lambda_k^{(p)} g_k(\lambda_k^{(p)}) = 0, \quad k = 1,2,\dots, \quad p = \overline{1,m+2}.$$

Теперь утверждение леммы следует из (4.137), (4.5.3) с учётом того факта, что $\varphi_k^{(+)} = \overline{\varphi_k^{(-)}}$, а $\varphi_k^{(0i)} \in \mathbb{R}$, $k = 1,2\dots$, $i = \overline{1,m}$. □

Теорема 4.5.2. *Пусть все корни $\lambda_k^{(p)}$ характеристического уравнения простые, т.е.*

$$f_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0, \quad k = 1,2,\dots, \quad p = \overline{1,m+2}. \tag{4.139}$$

Тогда система собственных векторов $\{\varphi_k^{(p)}\}$ из (4.136) *образует базис в пространстве $\mathcal{H}^{m+2}$.*

Доказательство. Покажем, что любой элемент $\widetilde{\varphi} := (\widetilde{w}; \widetilde{v}_0, \widehat{v})^\tau \in \mathcal{H}^{m+2}$ может быть представлен в виде ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{m+2} G_k^{(p)}\varphi_k^{(p)} = \widetilde{\varphi}, \tag{4.140}$$

где коэффициенты $G_k^{(p)}$ находятся однозначно.

Запишем с учётом (4.136) это соотношение в координатной форме:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{m+2} G_k^{(p)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2}\right)u_k = \widetilde{w}, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{m+2} G_k^{(p)}\left(-\frac{1}{\lambda_k^{(p)}}\right)u_k\right) = \widetilde{v}_0, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{m+2} G_k^{(p)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(p)}I_m)^{-1}\right)u_k = \widetilde{\widehat{v}}, \end{cases}$$

Умножим каждое уравнение этой системы скалярно на u_k:

$$\begin{cases} \sum\limits_{p=1}^{m+2} G_k^{(p)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} = (\widetilde{w}, u_k) \\ \sum\limits_{p=1}^{m+2} G_k^{(p)}\left(-\frac{1}{\lambda_k^{(p)}}\right) = (\widetilde{v}_0, u_k) \\ \sum\limits_{p=1}^{m+2} G_k^{(p)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(p)}I_m)^{-1} = (\widetilde{\widehat{v}}, u_k), \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Переобозначим, как и выше, $G_k^{(p)}$, $p = \overline{1, m+2}$, через $G_k^{(+)}$, $G_k^{(-)}$, $G_k^{(0i)}$, $i = \overline{1, m}$, перепишем последнюю систему в виде:

$$\begin{cases} G_k^{(01)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} + \ldots + G_k^{(0m)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} + G_k^{(+)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} + G_k^{(-)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} = (\widetilde{w}, u_k) \\ G_k^{(01)}\left(-\dfrac{1}{\lambda_k^{(01)}}\right) + \ldots + G_k^{(0m)}\left(-\dfrac{1}{\lambda_k^{(0m)}}\right) + G_k^{(+)}\left(-\dfrac{1}{\lambda_k^{(+)}}\right) + G_k^{(-)}\left(-\dfrac{1}{\lambda_k^{(-)}}\right) = (\widetilde{v}_0, u_k) \\ G_k^{(01)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(01)}I_m)^{-1} + \ldots + G_k^{(0m)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(0m)}I_m)^{-1} + \\ + G_k^{(+)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(+)}I_m)^{-1} + G_k^{(-)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(-)}I_m)^{-1} = (\widetilde{\widehat{v}}, u_k),\ k = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{4.141}$$

В матричной форме эту систему можно записать так:

$$R_k \begin{pmatrix} G_k^{(01)} \\ \vdots \\ G_k^{(0m)} \\ G_k^{(+)} \\ G_k^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\widetilde{w}, u_k) \\ (\widetilde{v}_0, u_k) \\ (\widetilde{\widehat{v}}, u_k) \end{pmatrix},$$

где R_k, $k=1,2,\ldots$, заданы по следующей формуле:

$$\begin{pmatrix} \delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} & \ldots & \delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} & \delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} & \delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} \\ -\frac{1}{\lambda_k^{(01)}} & \ldots & -\frac{1}{\lambda_k^{(0m)}} & -\frac{1}{\lambda_k^{(+)}} & -\frac{1}{\lambda_k^{(-)}} \\ \widehat{\rho}^{\frac12}\delta^{-\frac12}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(01)}I_m)^{-1} & \ldots & \widehat{\rho}^{\frac12}\delta^{-\frac12}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(0m)}I_m)^{-1} & \widehat{\rho}^{\frac12}\delta^{-\frac12}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(+)}I_m)^{-1} & \widehat{\rho}^{\frac12}\delta^{-\frac12}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(-)}I_m)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что R_k — матрица, составленная из векторов $\varphi_k^{(p)}$:

$$R_k = (\varphi_k^{(01)},\ldots,\varphi_k^{(0m)},\varphi_k^{(+)},\varphi_k^{(-)}). \tag{4.142}$$

Введём теперь матрицу $\mathcal{J} := \operatorname{diag}\{I,-I,-I_m\}$.

Вычисляя $R_k^\tau\mathcal{J}R_k$ с учётом (4.142), и леммы 4.5.1, получим

$$R_k^\tau\mathcal{J}R_k = \begin{pmatrix} [\varphi_k^{(01)},\varphi_k^{(01)}] & \ldots & [\varphi_k^{(01)},\varphi_k^{(0m)}] & [\varphi_k^{(01)},\varphi_k^{(+)}] & [\varphi_k^{(01)},\varphi_k^{(-)}] \\ [\varphi_k^{(0m)},\varphi_k^{(01)}] & \ldots & [\varphi_k^{(0m)},\varphi_k^{(0m)}] & [\varphi_k^{(0m)},\varphi_k^{(+)}] & [\varphi_k^{(0m)},\varphi_k^{(-)}] \\ [\varphi_k^{(+)},\varphi_k^{(01)}] & \ldots & [\varphi_k^{(+)},\varphi_k^{(0m)}] & [\varphi_k^{(+)},\varphi_k^{(+)}] & [\varphi_k^{(+)},\varphi_k^{(-)}] \\ [\varphi_k^{(-)},\varphi_k^{(01)}] & \ldots & [\varphi_k^{(-)},\varphi_k^{(0m)}] & [\varphi_k^{(-)},\varphi_k^{(+)}] & [\varphi_k^{(-)},\varphi_k^{(-)}] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \delta^{-1}g_k'(\lambda_k^{(01)}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{-1}g_k'(\lambda_k^{(0m)}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^{-1}g_k'(\lambda_k^{(+)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^{-1}g_k'(\lambda_k^{(-)}) \end{pmatrix}.$$

Отсюда в силу (4.139) следует, что

$$\det R_k^\tau\mathcal{J}R_k = (\det R_k)^2 = \delta^{-(m+2)}g_k'(\lambda_k^{(01)})\cdot\ldots\cdot g_k'(\lambda_k^{(0m)})g_k'(\lambda_k^{(+)})g_k'(\lambda_k^{(-)}), \quad k=1,2,\ldots. \tag{4.143}$$

Учитывая ещё соотношения $f_k(\lambda_k^{(p)})=0$, $f_k'(\lambda_k^{(p)})=\lambda_k^{(p)}g_k'(\lambda_k^{(p)})\neq 0$, из (4.143) приходим к выводу, что $\det R_k\neq 0$. Значит, система (4.140) имеет единственное решение при любом $\widetilde{\varphi}(\widetilde{w},\widetilde{v}_0,\widetilde{\widehat{v}})^\tau\in\mathcal{H}^{m+2}$, а потому коэффициенты $G_k^{(p)}$ в ней находятся однозначно. □

Выводы.

Изучены спектральные задачи, ассоциированные с задачами Коши для полных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка для случаев, когда сперва в уравнении имеются лишь интегральные слагаемые, отвечающие диссипации энергии, затем — лишь подкачке энергии. В каждом из случаев для задачи получен соответствующий операторный пучок и установлены свойства базисности Рисса для системы собственных элементов.

Изучена спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши для дифференциального (а затем и для интегро-дифференциального) уравнения второго порядка, неразрешённого относительно старшей производной, когда операторы кинетической энергии и диссипации являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии. Подробно изучены случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы и промежуточные между ними варианты. В каждом из случаев получены свойства спектра, найдены асимптотики, а для задачи, связанной с дифференциальным уравнением, также доказаны свойства базисности Рисса для собственных векторов.

Исследована спектральная задача, ассоциированная с интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. К таким уравнениям сводятся задачи о малых движениях вязкоупругого стержня. В задаче осуществлён переход от исходного уравнения к дифференциальному уравнению первого порядка в сумме гильбертовых пространств. На этой основе изучена ассоциированная спектральная задача. Доказано, что система собственных векторов этой задачи образует базис.

ВЫВОДЫ

В диссертации исследованы в произвольном гильбертовом пространстве новые классы задач Коши для полных линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра первого и второго порядков, неразрешённых относительно старшей производной, а также ассоциированные с ними спектральные задачи. Основные результаты, полученные в диссертации и выносимые на защиту, можно сформулировать следующим образом.

1. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра первого порядка, неразрешённого относительно производной, в гильбертовом пространстве для случая, когда подынтегральные оператор-функции имеют специальный вид $G_k(t,s) := e^{-\gamma_k(t-s)}I$. Такой вид позволяет исследовать ассоциированную спектральную задачу. При некоторых дополнительных условиях на операторные коэффициенты доказаны теоремы, уточняющие свойства собственных значений, а также получены свойства базисности Рисса для соответствующей системы собственных элементов.

2. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра первого порядка в гильбертовом пространстве для случая, когда в уравнении кроме интегральных слагаемых, отвечающих диссипации энергии системы, имеются также слагаемые, отвечающие за её подкачку. Кроме того, доказана теорема о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра первого порядка, неразрешённого относительно производной в случае, когда подынтегральные оператор-функции имеют достаточно общий вид.

3. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для неполного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка, неразрешённого относительно старшей производной. Применены два подхода: связанный с переходом к системе двух уравнений первого порядка и второй, связанный с использованием теории операторных косинус- и синус- функций.

4. Исследован класс полных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами, неразрешённых относительно старшей производной, когда один из операторов имеет область определения, наиболее узкую по сравнению с областями определения других операторных коэффициентов. Применён метод факторизации, позволяющей разделить исследуемые уравнения на три основных типа. Для каждого типа уравнений доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи Коши.

5. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения задач Коши для полных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами, неразрешённых относительно старшей производной, когда имеет место подкачка энергии системы (оператор диссипации энергии ограничен снизу), а система может быть неустойчива (оператор потенциальной энергии ограничен снизу).

6. Изучены спектральные задачи, ассоциированные с задачами Коши для полных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка для случаев, когда сперва в уравнении имеются лишь интегральные слагаемые, отвечающие диссипации энергии, затем — лишь подкачке энергии. В каждом из случаев для задачи получен соответствующий операторный пучок и установлены свойства базисности Рисса для системы собственных элементов.

7. Изучена спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши для дифференциального (а затем и для интегро-дифференциального) уравнения второго порядка, неразрешённого относительно старшей производной, когда операторы кинетической энергии и диссипации являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии. Подробно изучены случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы и промежуточные между ними варианты. В каждом из случаев получены свойства спектра, найдены асимптотики, а для задачи, связанной с дифференциальным уравнением, также доказаны свойства базисности Рисса для собственных векторов.

8. Исследована спектральная задача, ассоциированная с интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра второго порядка в некотором

гильбертовом пространстве. К таким уравнениям сводятся задачи о малых движениях вязкоупругого стержня. В задаче осуществлён переход от исходного уравнения к дифференциальному уравнению первого порядка в сумме гильбертовых пространств. На этой основе изучена ассоциированная спектральная задача. Доказано, что система собственных векторов этой задачи образует базис.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Азизов Т. Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 352 с.

[2] Азизов Т. Я. Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова // Матем. заметки. — 1999. — Т. 65, № 6. — С. 924-928.

[3] Азизов Т. Я. Приложения индефинитной метрики / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.

[4] Азизов Т. Я. Эволюционная и спектральная задачи, порождённые проблемой малых движений вязкоупругой жидкости / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова // Труды Санкт-Петербургского математического общества. — 1998. — Т. 6. — С. 5-33.

[5] Бирман М. Ш. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Уч. пос., 2-е изд. — Санкт-Петербург: Лань, 2010. — 464 с.

[6] Бухгейм А. Л. Глобальная сходимость метода Ньютона в обратных задачах восстановления памяти / А. Л. Бухгейм, Н. И. Калинина // Сиб. мат. журн. — 1997. — Т. 38, № 5. — С. 1018-1033.

[7] Бухгейм А. Л. Обратные задачи восстановления памяти / А. Л. Бухгейм, Н. И. Калинина // Докл. РАН. — 1997. — Т. 354, № 6. — С. 727-729.

[8] Бухгейм А. Л. Два метода в обратной задаче определения памяти / А. Л. Бухгейм, Н. И. Калинина, В. Б. Кардаков // Сиб. мат. журн. — 2000. — Т. 41, № 4. — С. 767-776.

[9] Вайнберг М. М. Интегро-дифференциальные уравнения / М. М. Вайнберг // Итоги науки. Сер. Матем. анализ. Теор. вероятностей. Регулирование. 1962. — М.: Изд-во ВИНИТИ, 1964. — С. 5-37.

[10] Вирозуб А. И. О спектральных свойствах одного класса самосопряжённых оператор-функций / А. И. Вирозуб, В. И. Мацаев // Функциональный анализ и его приложения. — 1974. — Т. 8, № 1. — С. 1-10.

[11] Власов В. В. Спектральный анализ и разрешимость абстрактных гиперболических уравнений с последействием / В. В. Власов, Дж. Ву // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 4. — С. 524-533.

[12] Власов В. В. Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последействием / В. В. Власов, Дж. Ву, Г. Р. Кабирова // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2010. — Т. 35. — С. 44-59.

[13] Власов В. В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории / В. В. Власов, Д. А. Медведев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т. 30. — С. 3-173.

[14] Власов В. В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ / В. В. Власов, Д. А. Медведев, Н. А. Раутиан // Современные проблемы математики и механики: математика. — 2011. – Т. 8, № 1. — С. 8-306.

[15] Власов В. В. Исследование интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости / В. В. Власов, Н. А. Раутиан // Изв. вузов. Матем. — 2012. — № 6. — С. 56-60.

[16] Власов В. В. Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений / В. В. Власов, Н. А. Раутиан // Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2011. — Т. 28. — С. 75-113.

[17] Власов В. В. Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики / В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. С. Шамаев // Труды Шестой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 14-21 августа, 2011). Часть 1. Современная математика. Фундаментальные направления. — 2012. — Т. 45. — С. 43-61.

[18] Власов В. В. Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике / В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. С. Шамаев // Докл. РАН. — 2010. — Т. 434, № 1. — С. 12-15.

[19] Власов В. В. Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике / В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. С. Шамаев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2011. — Т. 39. — С. 36-65.

[20] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. — М.: Наука, 1976. — 286 с.

[21] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений / В. Вольтерра. — М.: Наука, 1982. — 304 с.

[22] Гринштейн В. А. Базисность части системы собственных векторов голоморфной оператор-функции / В. А. Гринштейн // Матем. заметки. — 1991. — Т. 50, № 1. — С. 142-144.

[23] Далецкий Ю. М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. М. Далецкий, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 535 с.

[24] Демиденко Г. В. Уравнения и системы уравнений, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск: Научная книга, 1998. — 438 с.

[25] Денисова Т. В. Линейные интегродифференциальные уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве / Т. В. Денисова // Сбор-

ник трудов Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по информатике и математике. Симферополь, ТНУ, — 2004. — С. 6-8.

[26] Егоров И. Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов. — Новосибирск: Наука, 2000. — 336 с.

[27] Закора Д. А. Задача о малых движениях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости / Д. А. Закора // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. СМФН. — 2008. — Т. 29. — С. 62-70.

[28] Закора Д. А. Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости / Д. А. Закора // Динамические системы. — 2006. — Вып. 20. — С. 104-112.

[29] Закора Д. А. Малые движения вращающейся идеальной релаксирующей жидкости / Д. А. Закора // Динамические системы. — 2009. — Вып 26. — С. 31-42.

[30] Закора Д. А. Малые движения и нормальные колебания вращающейся идеальной релаксирующей жидкости / Д. А. Закора // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — 2009. — Т. 22(61), № 1. — С. 53-76.

[31] Закора Д. А. Об одном интегродифференциальном уравнении второго порядка в банаховом пространстве / Д. А. Закора // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — 2007. — Т. 20(59), № 1. — С. 65-71.

[32] Закора Д. А. О спектральной задаче, связанной с интегродифференциальным уравнением второго порядка / Д. А. Закора, Н. Д. Копачевский // Ученые записки Таврического национального университета

им. В. И. Вернадского. Серия Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — 2004. — Т. 17(56), № 1. — С. 10-26.

[33] Ильюшин А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. — М.: Наука, 1970. — 280 с.

[34] Калашников А. С. Классы единственности для интегро-дифференциальных уравнений с операторами Вольтерра типа свертки / А. С. Калашников // Функциональный анализ и его приложения. — 1979. — Т. 13, № 2. — С. 83-84.

[35] Копачевский Н. Д. Задача Коши для линейного интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве / Н. Д. Копачевский // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — 2003. — Т. 16, № 1. — С. 139-152.

[36] Копачевский Н. Д. Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: спец. курс лекций / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О. А.", 2012. — 152 с.

[37] Копачевский Н. Д. Спектральная теория операторных пучков: Специальный курс лекций / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ООО "ФОРМА", 2009. — 128 с.

[38] Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[39] Копачевский Н. Д. Некоторые классы интегродифференциальных уравнений Вольтера второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной / Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина // Сб. тезисов международной научной конференции «Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения», Севастополь, Украина, 23-30 июня 2013г. — С. 298-299.

[40] Копачевский Н. Д. Об интегродифференциальных уравнениiях Вольтерра второго порядка, неразрешённых относительно старшей произ-

водной / Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». — 2013. — Т. 26(65), № 1. — С. 52-79.

[41] Крейн С. Г. О функциональных свойствах операторов векторного анализа и гидродинамики / С. Г. Крейн // Докл. АН СССР. — 1953. — Т. 93, № 6. — С. 969-972.

[42] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

[43] Крейн С. Г. Функциональный анализ (справочное пособие группы авторов под общей редакцией С. Г. Крейна) / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

[44] Лаврентьев М. М. Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода / М. М. Лаврентьев // Международный конгресс математиков в Ницце, 1970. Доклады советских математиков. — М.: Наука, 1972. — С. 130-136.

[45] Лаврентьев М. М. Теория операторов и некорректные задачи / М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев. — Новосибирск: Изд-во ИМ им. С. Л. Соболева, 2010. — 912 с.

[46] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 1970. — 288 с.

[47] Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А. С. Маркус. — Кишинёв: Штиинца, 1986. — 260 с.

[48] Милославский А. И. Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений / А. И. Милославский // Сиб. матем. журнал. — 1985. — Т. 26. — С. 118-132.

[49] Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движений

жидкостей Кельвина-Фойгта и Олдройта / А. П. Осколков // Труды МИАН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 126-164.

[50] Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — 366 с.

[51] Полищук А. В. Колебания вязкоупругого стержня / А. В. Полищук // КНЦ НАНУ, Тавр. нац. ун-т им. В. И. Вернадского. — 2013. — С. 71-72.

[52] Пригорский В. А. О некоторых классах базисов гильбертова пространства / В. А. Пригорский // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20, Вып. 125. — С. 231-236.

[53] Прилепко А. И. Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений / А. И. Прилепко // Дифференц. уравн. — 2005. — Т. 41, № 11. — С. 1560-1571.

[54] Свешников А. Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. — М.: Физматлит, 2007. — 736 с.

[55] Сёмкина Е. В. Вольтерровы интегродифференциальные уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве и ассоциированные спектральные задачи / Е. В. Сёмкина // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». — 2012. — Т. 25(64), № 2. — С. 79-111.

[56] Сёмкина Е. В. Интегродифференциальные уравнения вольтерра первого порядка, неразрешённые относительно производной, и ассоциированные спектральные задачи / Е. В. Сёмкина // «БМК-2012» («XI Белорусская математическая конференция», г.Минск) (4-9 ноября 2012г.). Тезисы докладов. Часть 1. Вещественный и комплексный анализ. Функциональный анализ и операторные уравнения. Геометрия и топология. — С. 56-57.

[57] Сёмкина Е. В. Некоторые классы интегродифференциальных уравнений Вольтерра второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной / Е. В. Сёмкина // "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV", г.Ростов-на-Дону, Россия, 27 апреля - 1 мая 2014 г. Тезисы докладов. — С. 114-115.

[58] Сёмкина Е. В. Некоторые классы интегродифференциальных уравнений второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной / Е. В. Сёмкина // «Четвёртая международная конференция молодых учёных по дифференциальным уравнениям и их приложениям им. Я. Б. Лопатинского» (14-17 ноября 2012г., г.Донецк). Сборник тезисов. — С. 73.

[59] Сёмкина Е. В. О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях первого порядка, неразрешённых относительно производной / Е. В. Сёмкина // «Крымская Осенняя Математическая Школа КРОМШ — 2011». Ласпи, Батилиман, Украина (17-29 сентября 2011г.). Сборник тезисов. — С. 48.

[60] Сёмкина Е. В. О некоторых классах интегродифференциальных уравнений Вольтерра второго порядка, неразрешённых относительно производной / Е. В. Сёмкина // Сборник тезисов «Крымская Международная Математическая Конференция КММК — 2013», Судак, Украина, 22 сентября – 4 октября 2013. — Т. 2. — С. 14-15.

[61] Сёмкина Е. В. О некоторых классах интегродифференциальных уравнений второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной / Е. В. Сёмкина // «Крымская Осенняя Математическая Школа КРОМШ — 2012». Ласпи, Батилиман, Украина (17-29 сентября 2012г.). Сборник тезисов. — С. 60.

[62] Сёмкина Е.В. Спектральная задача, ассоциированная с проблемой малых движений вязкоупругого стержня / Е. В. Сёмкина // Динамические системы. — 2014. — Т. 4(32), № 1-2 — С. 19-26.

[63] Сёмкина Е. В. Спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши о малых движениях диссипативной динамической системы / Е. В. Сёмкина // XXII Международная конференции «Математика. Экономика. Образование». VIII Международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения». VII Междисциплинарный семинар «Математические модели и информационные технологии в науке и производстве». Пансионат «Моряк» Новороссийского морского пароходства вблизи пос. Дюрсо, Россия, 27 мая – 3 июня 2014 г. Тезисы докладов. — С. 63.

[64] Сёмкина Е. В. Спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши о малых движениях диссипативной динамической системы / Е. В. Сёмкина // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». — 2014. — Т. 27(66), № 1. — С. 75-89.

[65] Сёмкина Е.В. Спектральные задачи, порождённые проблемами малых движений вязкоупругих и релаксирующих сред / Е. В. Сёмкина // «Таврическая научная конференция студентов и молодых специалистов по информатике и математике» (20-23 апреля 2010г., КНЦ НАНУ, г. Симферополь), С.36-40.

[66] Фалалеев М. В. Абстрактная задача прогноз-управление с вырождением в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Изв. ИГУ. Математика. — 2010. — Т. 3, № 1. — С. 126-132.

[67] Эйрих Ф. Реология. Теория и приложения / Ф. Эйрих. — М.: ИЛ, 1962. — 804 с.

[68] Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С. Я. Якубов. — Баку: Элм, 1985. — 220 с.

[69] Alikhani R. Existence of global solutions to nonlinear fuzzy Volterra integro-differential equations / R. Alikhani, F. Bahrami, A. Jabbari // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. — 2012. — Vol. 75. — P. 1810-1821.

[70] Arendt W. Integrated solutions of Volterra integrodifferential equations and applications / W. Arendt, H. Kellermann // Pitman Research Notes in Mathematics Series. — Harlow: Longman Scientific & Technical. — 1989. — Vol. 190. — P. 21-51.

[71] Azizov T. Ya. On eigenvalues pencils with parameter / T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevsky, L. I. Sukhocheva // Proceedings of the 16th Conference on Operator Theory Timisoara (Romania) July 2-10, 1996. — 37-50 p.

[72] Balachandran K. Nonlinear integrodifferential equation of Sobolev type with nonlocal conditions in Banach spaces / K. Balachandran, D. G. Park, Y. C. Kwun // Comm. Korean Math. Soc. — 1999. — Vol. 14, no. 1. — P. 223-231.

[73] Barbu V. Semilinear integro-differential equations in Hilbert space / V. Barbu, M. A. Malik // J. Math. Anal Appl. — 1979. — Vol. 67. — P. 452-475.

[74] Bisognin E. On exponential stability for Von Karman equations in the presence of thermal effects / E. Bisognin, V. Bisognin, G. Perla Menzala, E. Zuazua // Math. Meth. Appl. Sci. — 1998. — Vol. 21. — P. 393-416.

[75] Bloom F. Ill-posed problems for integrodifferential equations in mechanics and electromagnetic theory / F. Bloom // Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981. — 222 p.

[76] Burton T. A. Boundedness of solutions of integrodifferential equations / T. A. Burton // Annals of Diff. Eq. — 1993. — Vol. 9. — P. 395-408.

[77] Cavalcanti M. M. Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping / M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Math. Meth. Appl. Sci. — 2001. — Vol. 24. — P. 1043-1053.

[78] Chen G. Semigroups and integral equations / G. Chen, R. C. Grimmer // J. Integral Equations. — 1980. — Vol. 2. — P. 133-154.

[79] Crandall M. G. An abstract nonlinear Volterra integrodifferential equation / M. G. Crandall, S. O. Londen, J. A. Nohel // J. Math. Anal Appl. — 1978. — Vol. 64. — P. 701-735.

[80] Da Prato G. Linear abstract integro-differential equations of hyperbolic type in Hilbert spaces / G. Da Prato, M. Iannelli // Rend. Sem. Mat. Padova. — 1980. — Vol. 62. — P. 191-206.

[81] Da Prato G. Linear integro-differential equations in Banach spaces / G. Da Prato, M. Iannelli // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1980. — Vol. 62. — P. 207-219.

[82] Desch W. Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space / W. Desch, R. K. Miller // J. Differential Equations. — 1987. — Vol. 70. — P. 366-389.

[83] Diagana T. Existence results for some damped second-order Volterra integro-differential equations / T. Diagana // Applied Mathematics and Computation. — 2014. — Vol. 237. — P. 304-317.

[84] Ergen W. K. Kinetics of the circilating fuel nuclear reactor / W. K. Ergen // J. Appl. Phys. — 1954. — Vol. 25. — P. 702-711.

[85] Fattorini H. O. Second order linear differential equations in Banach spaces / H. O. Fattorini. — Amsterdam: Elsevier Science Ltd, 1985. — 328 p.

[86] Favini A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi // New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1999. — 313 p.

[87] Grimmer R. C. Resolvent operators for integral equations in Banach spaces / R. C. Grimmer // Trans. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 273. — P. 333-349.

[88] Grossman S. I. Perturbation theory for Volterra integrodifferential systems / S. I. Grossman, R. K. Miller // J. Diff. Eq. — 1970. — Vol. 8(3). — P. 457-474.

[89] Gurtin M. E. A General theory of heat conduction with finite wave speeds / M. E. Gurtin, A. C. Pipkin // Arch. Rational Mech. Anal. — 1968. — Vol. 31. — P. 113-126.

[90] Hannsgen K. B. The resolvent kernel of an integrodifferential equation in Hilbert space / K. B. Hannsgen // SIAM J. Math. Anal. — 1976. — Vol. 7. — P. 481-490.

[91] Kopachevsky N. D. Complete Volterra integro-differential second-order equations / N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina // Book of abstracts «Analysis and mathematical physics», Kharkiv, Ukraine, June 24-28, 2013. — P. 26-27.

[92] Kopachevsky N. D. Complete Volterra integro-differential second-order equations / N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina // Book of abstracts «Nonlinear Partial Differential Equations NPDE-2013», Donetsk, Ukraine, September 9-14, 2013. — P. 34-35.

[93] Kopachevsky N. D. Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative / N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina // Eurasian Mathematical Journal ISSN 2077-9879. — 2013. — Vol. 4, no. 4. — P. 64-87.

[94] Lord M. E. Existence and uniqueness of Sobolev type integrodifferential equations / M. E. Lord // Appl. Math. Comp. — 1978. — Vol. 4. — P. 253-263.

[95] Lorenzi A. Fredholm-type results for integro-differential identification parabolic problems / A. Lorenzi, A. I. Prilepko // Dif. Int. Eqs. — 1993. — Vol. 6. — P. 535-552.

[96] Lorenzi A. Global existence results for first-ofder integrodifferential identification problem / A. Lorenzi, A. I. Prilepko // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1996. — Vol. 96. — P. 51-84.

[97] Metivier G. Valeurs propres d'operateurs definis par le restriction de systemes variationales a des souse spases / G. Metivier // J. Math. pures et appl. — 1978. — Vol. 57, no. 2. — P. 133-156.

[98] Miller R. K. Well-posedness and stability of linear Volterra integrodifferential equations in abstract spaces / R. K. Miller, R. L. Wheeler // Funkcial. Ekvac. — 1978. — Vol. 21. — P. 279-305.

[99] Munoz Rivera J. E. Regularizing properties and propagations of singularities for thermoelastic plates / J. E. Munoz Rivera, L. H. Fatori // Math. Meth. Appl. Sci. — 1998. — Vol. 21. — P. 797-821.

[100] Oka H. Second order linear Volterra equations governed by a sine family / H. Oka // J. Int. Eqs Appl. — 1996. — Vol. 8. — P. 447-456.

[101] Oka H. Second order linear Volterra integrodifferential equations / H. Oka // Semigroup Forum. — 1996. — Vol. 53. — P. 25-43.

[102] Pandolfi L. The controllability of the Gurtin–Pipkin equations: a cosine operator approach / L. Pandolfi // Appl. Math. Optim. — 2005. — Vol. 52. — P. 143-165.

[103] Poblete V. Solutions of second-order integro-differential equations on periodic besov spaces / V. Poblete // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. — 2007. — Vol. 50. — P. 477-492.

[104] Prilepko A. I. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. — Bassel, New-York: Marcel Dekker Inc., 2000. — 709 p.

[105] Racke R. Asymptotic behavior of solutions in linear 2- or 3-d thermoelasticity with second sound / R. Racke // Quart. Appl. Math. — 2003. — Vol. 61. — P. 409-441.

[106] Sathya R. Controllability of Sobolev-type neutral stochastic mixed integrodifferential systems / R. Sathya, K. Balachandran // European J. Math. Sci. — 2012. — Vol. 1, no. 1. — p. 68-87.

[107] Sidorov N. Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. — 548 p.

[108] Sowa M. Cosine operator functions / M. Sowa // Rozpr. Math. — 1996. — Vol. 49. — P. 1-47.

[109] Trostorff S. On integro-differential inclusions with operator-valued kernels / S. Trostorff // Math. Meth. Appl. Sci.. doi: 10.1002 / mma.3111 — 2014.

[110] Vlasov V. V. Spectral analysis and representations of solutions of abstract integro-differential equations in Hilbert space / V. Vlasov, N. Rautian // Operator Theory: Advances and Applications. — 2014. — Vol. 236. — P. 517-535.

[111] Vlasov V. V. Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay / V. V. Vlasov, J. Wu // J. Functional Differential Equations. — 2009. — Vol. 16, no. 1-2. — P. 1-17.

[112] Volterra V. Equazioni integro-differenziali con limiti costanti / V. Volterra // Rend. Accad. Lincei. — 1911. — Vol. 20(5). — P. 95-99.

[113] Volterra V. Equazioni integro-differenziali della elasticita nei caso della isotropica / V. Volterra // Rend. Accad. Lincei. — 1909. — Vol. 18(5). — P. 577-586.

[114] Volterra V. Sulle equazioni della elettrodinamica / V. Volterra // Rend. Accad. Lincei. — 1909. — Vol. 18(5).— P. 203-211.

[115] Volterra V. Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell' elasticita / V. Volterra // Rend. Accad. Lincei. — 1909. — Vol. 18(5). — P. 296-301.

[116] Volterra V. Sur les equations integro-differentielles et leurs applications / V. Volterra // Acta Math. — 1912. Vol. 35, no. 4. — P. 295-356.

[117] Zakora D. A symmetric model of ideal rotating relaxing fluid / D. Zakora // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — Vol. 007, no. 2, — P. 91-112.

[118] Zakora D. A symmetric model of viscous relaxing fluid. An evolution problem / D. Zakora // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2012. — Vol. 8, no. 2. — P. 190-206.

[119] Zakora D. Problem on small motions of ideal relaxing fluid / D. Zakora // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 164, no. 4, — P. 531-539.