МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского

Газиев Эскендер Линурович

517.984:517.958

ЗАДАЧИ СТАТИКИ, УСТОЙЧИВОСТИ И МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИДРОСИСТЕМЫ "ЖИДКОСТЬ–БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ" В УСЛОВИЯХ, БЛИЗКИХ К НЕВЕСОМОСТИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание научной степени
кандидата физико-математических наук

Симферополь — 2014

Диссертация является рукописью.
Работа выполнена на кафедре математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, **Копачевский Николай Дмитриевич,** Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, заведующий кафедрой математического анализа
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, **Орлов Владимир Петрович,** Воронежский государственный университет, г. Воронеж, профессор кафедры математического моделирования
	доктор физико-математических наук, профессор, **Доценко Сергей Филиппович,** Морской гидрофизический институт, г. Севастополь, главный научный сотрудник

Защита состоится « 16 » декабря 2014 г. в 16.00 ч. на заседании специализированного ученого совета К 52.051.10 Таврического национального университета им. В. И. Вернадского по адресу: г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Таврического национального университета им. В. И. Вернадского по адресу: г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4, на сайте Таврического национального университета им. В.И. Вернадского http://science.crimea.edu/zashita/gaziev/disser.pdf

Автореферат разослан «_____» ноября 2014 г.

Ученый секретарь
специализированного ученого совета
К.52.051.10 Ф. С. Стонякин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Проблемы динамики, статики и устойчивости равновесных состояний гидросистем, состоящих из многокомпонентных сред с различными свойствами, привлекают внимание исследователей, начиная с середины XX в. Прикладной аспект этого круга проблем — колебания жидкого топлива в баке космической ракеты в процессе перехода спутника с одной орбиты на другую с помощью двигателя малой тяги, а также в случае, когда перед запуском двигателя в космосе необходимо перегнать топливо в баке к заборному отверстию.

Математические проблемы, описывающие эти процессы, изучает научное направление, которое называют гидромеханикой невесомости. Ее основы заложили А. Д. Мышкис, С. Г Крейн, В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов, М. Ю. Жуков. Следует отметить работы С. Л Соболева, Н. Н Моисеева, Ф. Л. Черноусько, В. В. Румянцева, И. А Луковского, А. Н. Комаренко, М. Я Барняка, А. Н. Тимохи, В. А. Солонникова и др. Краевые задачи, возникающие в проблемах собственных колебаний в гидродинамике невесомости, характеризуются наличием спектрального параметра в уравнении и/или граничных условиях. Такие спектральные задачи восходят к работам В. А. Стеклова и изучались М. С. Аграновичем, Е. М. Руссаковским, А. А. Шкаликовым, Н. Ю. Капустиным, Н. Б. Керимовым, Х. Р. Мамедовым, Е. И. Моисеевым, В. С. Мирзоевым, В. Н. Пивоварчиком и др.

Гидродинамические процессы в условиях слабого гравитационного поля характеризуются наличием нескольких жидкостных сред, их стратификацией, искривлением поверхности жидкости. При переходе к численному моделированию математическая модель процесса обычно существенно упрощается за счет предположений о горизонтальности или малой искривленности равновесной поверхности жидкости, несжимаемости или неизменяемой плотности сред. Использование этих предположений при изучении начально-краевых и спектральных задач, порожденных малыми движениями и собственными колебаниями гидросистем "капиллярная жидкость–баротропный газ", не дает возможности в полной мере изучить наблюдаемые в реальности процессы. Это обуславливает актуальность темы исследования. Кроме того, разработка приближенных методов решения таких задач представляет самостоятельный теоретический и научно-практический интерес.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа выполнялась в рамках госбюджетных тем и плановых исследований кафедры математического анализа Таврического национального университета имени В. И. Вернадского “Операторные методы в линейном и нелинейном анализе начально-краевых, спектральных, вариационных и бифуркационных задач математической физики” (2009-2011 гг., номер государственной регистрации 0109U002432), “Операторные методы в шкалах пространств и их приложения в задачах гладкого и негладкого анализа и в проблемах механики сплошных сред” (2009-2011 гг., номер государственной регистрации 0112U002453), в которых автор принимал участие в качестве исполнителя. Тема кандидатской диссертации утверждена на заседании Ученого совета Таврического национального университета имени В. И. Вернадского (протокол № 5 от 25.01.2009).

Цель и задачи исследования. *Целью исследования* является изучение нового класса начально-краевых задач и порождаемых ими спектральных задач сопряжения, возникающих в проблеме малых колебаний системы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости.

Основные задачи:

– постановка задач статики для гидросистемы "жидкость–баротропный газ" (далее — ГС) в условиях, близких к невесомости, в том числе для прямоугольного канала и осесимметричного сосуда; получение условий и границы области устойчивости ГС;

– изучение начально–краевой задачи (далее — НКЗ) о малых колебаниях ГС в условиях, близких к невесомости, а также соответствующей задачи о собственных колебаниях: доказательство теорем о свойствах спектра, о полноте и базисности системы собственных функций (далее — СФ), о сильной разрешимости НКЗ и ассоциированной спектральной задачи, утверждения о представлении сильного решения НКЗ в виде ряда Фурье по системе СФ спектральной задачи и условиях неустойчивости сильного решения;

– изучение спектральных задач как с горизонтальной, так и произвольной границей сопряжения (далее — СЗС); построение проекционного метода решения этих задач, основанного на вариационном подходе;

– разработка методики проведения численных расчетов для задач статики и СЗС, построение таблиц для интерполяции равновесных состояний ГС в условиях, близких к невесомости.

Объект исследования. Малые движения и собственные колебания ГС в условиях, близких к невесомости.

Предмет исследования. Свойства сильной разрешимости, устойчивости НКЗ и спектральных задач, возникающих в проблеме малых движений и собственных колебаний ГС в условиях, близких к невесомости; методика расчета равновесных состояний ГС и проекционный метод решения возникающих СЗС с произвольной границей сопряжения.

Методы исследования. При изучении проблемы применяются методы теории линейных самосопряженных и несамосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве (далее — ГП), теории линейных дифференциальных уравнений в банаховом и гильбертовых пространствах, теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой, а также методы математического и функционального анализа. Важную роль в исследовании играют операторный подход к изучению линейных проблем гидродинамики, вариационные и численно-аналитические методы исследования проблем гидродинамики невесомости, обобщенные формулы Грина для смешанных краевых задач, а также подход, основанный на применении метода вспомогательных краевых задач и отвечающих им операторов, действующих в соответственно подобранных ГП и метод ортогонального проектирования уравнений движения на ортогональные подпространства, естественно связанные с изучаемыми задачами.

Научная новизна полученных результатов. 1. Впервые сформулирована полная математическая постановка задачи о равновесии ГС в условиях, близких к невесомости. Получен вид краевой задачи как в общем, так и в частных случаях: плоском и осесимметричном. Установлены условия устойчивости равновесных состояний ГС в рассматриваемых задачах статики.

2. К классу НКЗ и СЗС, порожденному проблемой малых колебаний ГС, впервые применен операторный подход, основанный на использовании вспомогательных задач С.Г. Крейна и обобщенных формул Грина. С использованием общей операторной схемы и специально введенных ГП НКЗ для потенциалов смещений приведена к эволюционной задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения (далее — ДОУ) в ортогональной сумме ГП. Изучены свойства операторных коэффициентов уравнения, на этой основе доказаны теорема о сильной разрешимости полученной эволюционной задачи и теорема о сильной разрешимости исходной НКЗ, получено представление решения в виде ряда Фурье, доказана теорема о достаточных условиях неустойчивости сильного решения (обращение теоремы Лагранжа об устойчивости), установлены свойства дискретности и положительности спектра с единственной предельной точкой на бесконечности в задаче о собственных колебаниях ГС, полноты системы ее СФ.

3. Изучены СЗС, возникающие в проблеме собственных колебаний рассматриваемой ГС в цилиндрической области и прямоугольном канале с горизонтальной и произвольной границей сопряжения. Установлено существование двух классов решений, соответствующих поверхностным волнам (далее — ПВ) в окрестности границы сопряжения и внутренним волнам (далее — ВВ), при этом решения из разных классов асимптотически разделяются на бесконечности. Получены выражения для решений, соответствующих ПВ и ВВ в двумерной задаче. Впервые построен проекционный метод для нахождения решения двумерной спектральной задачи с произвольной границей сопряжения.

4. Построены вычислительные схемы для нахождения устойчивых равновесных состояний и критических (для устойчивости) значений коэффициента перегрузки для ГС в цилиндрическом контейнере и прямоугольном канале в условиях, близких к невесомости. Получены таблицы равновесных кривых для различных значений коэффициента перегрузки и объема жидкости.

Практическое значение полученных результатов. Диссертация имеет как теоретический, так и научно-практический характер. Получены новые качественные результаты о сильной разрешимости НКЗ о малых колебаниях ГС, свойствах дискретности и положительности спектра с единственной предельной точкой на бесконечности (в случае статической устойчивости) и полноте системы СФ ассоциированной спектральной задачи, разложении в ряд Фурье решения исходной проблемы, а также достаточных условиях неустойчивости этого решения. Эти результаты дополняют теорию задач гидромеханики невесомости на случай ГС, состоящих из идеальной несжимаемой жидкости и стратифицированного по плотности газа. Теоретическое значение также имеют распространение операторного подхода на изучаемый класс проблем, использование вариационного подхода и условий гидростатики для вывода уравнения равновесия ГС, а также вывод интегрального представления оператора, обратного к оператору потенциальной энергии (далее ПЭ) рассматриваемой ГС. Методика построения равновесных состояний ГС имеет научно-практическое значение, поскольку может использоваться для имитационного моделирования экспериментов, которые планируется проводить в космических условиях, а также для изучения влияния слабого гравитационного поля на ГС. Разработанный в диссертации проекционный метод нахождения обобщенного решения двумерной СЗС с произвольной границей раздела сред имеет как теоретическое, так и научно-практическое значение, поскольку может быть распространен на случай контейнеров других форм и использован для проведения численных расчетов.

Личный вклад соискателя. Физическая постановка и общий план исследования рассмотренных в диссертации задач предложены научным руководителем соискателя профессором Н.Д. Копачевским. Им совместно с С.Г. Крейном разработаны операторный метод исследования краевых задач в ортогональной сумме ГП и методика изучения НКЗ и спектральных задач, описывающих статику и динамику жидкости в условиях, близких к невесомости. Автором проведено исследование поставленных задач, доказаны утверждения основной части диссертации, а также получены результаты приложений А, Б.

В работах [4], [6], [7] соискателю принадлежит часть, связанная с исследованием проблемы о малых движениях и собственных колебаниях ГС, соавторам принадлежит часть, связанная с постановкой проблемы.

Апробация результатов диссертации. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на следующих конференциях: XXXVIII–XLIII науч. конф. "Дни науки ТНУ им. В. И. Вернадского" (Симферополь, Крым, апрель 2009-2014 гг.); XIX–XXIII Крымских Осенних Матем. Школах-симпозиумах по спектральным и эволюционным задачам (Ласпи-Батилиман, Крым, Украина, сент. 2008-2012 гг.); II междунар. конф. молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям, посвященной Я.Б. Лопатинскому (Донецк, Украина, ноябрь 2008г.); IV междунар. конф. молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям, посвященной Я.Б. Лопатинскому (Донецк, Украина, ноябрь 2012г.); междунар. науч. конф. "Анализ и математическая физика-2013" (AMPH-2013) (Харьков, Украина, июнь 2013г.); междунар. науч. конф. "Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения" (Севастополь, Украина, июнь 2013г.); междунар. науч. конф. "Nonlinear Partial Differential Equations" (NPDE-2013) (Донецк, Украина, сент. 2013г.); Крымской междунар. матем. науч. конф. (Crimean International Mathematics Conference, CIMC-2013) (Судак, Украина, сент. 2013г.); XXII междунар. науч. конф. "Математика. Экономика. Образование". VIII Междунар. симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения". VIII Междисциплин. семинаре "Математические модели и информационные технологии в науке и производстве" (Дюрсо, Россия, май 2014г.).

Результаты работы докладывались также на научном семинаре по спектральным и эволюционным задачам кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов, списка использованных источников, приложений А и Б. Полный объем работы — 227 страниц, в том числе, основного текста — 143 страницы. Список использованной литературы насчитывает 153 названия, объем приложений – 65 страниц.

Публикации. Основные результаты работы отражены в 19 публикациях, в том числе, 8 научных статьях, 7 из которых входят в перечень специализированных и рецензируемых изданий: [1]–[7]. Дополнительно результаты исследований опубликованы в материалах и сборниках тезисов научных конференций [9]–[19].

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Нумерация утверждений в автореферате и тексте диссертации совпадает.

Введение диссертации раскрывает сущность и состояние проблемы и её значимость. Обосновывается актуальность темы, формулируются цель и задачи исследования, научная новизна и практическое значение полученных результатов. В главе 1 приведена краткая историческая справка о круге вопросов, имеющих отношение к теме работы. Приведён обзор литературы по теме диссертации и сформулированы основные результаты, которые получены в этом направлении.

Глава 2 посвящена изучению задач статики и устойчивости ГС, находящейся в условиях, близких к невесомости. Предполагается, что несжимаемая однородная жидкость и баротропный газ полностью заполняют сосуд; материал стенки сосуда — однородный, его поверхность — недеформируемая и гладкая; жидкость объемной плотности ρ_1 и газ объемной плотности ρ_2 занимают в сосуде связные части пространства Ω_1 и Ω_2, $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$; Γ — поверхность раздела сред в состоянии покоя, $S = S_1 \cup S_2$ — боковая стенка сосуда, S_1 и S_2 — примыкающие к жидкости и газу части боковой стенки соответственно. Считается, что сила тяжести $\vec{g} = -g\vec{k}$, $g = \beta g_0$, действует вдоль оси Oz сверху вниз с ускорением $g > 0$, g_0 — ускорение силы тяжести в земных условиях, β — коэффициент перегрузки, $\vec{k}$ — орт оси Oz; $\sigma = \text{const} > 0$, σ_2, σ_1— коэффициенты поверхностного натяжения на границах "жидкость–газ" (т.е. на Γ), "газ–твердое тело" и "жидкость–твердое тело" соответственно; k_1 и k_2 — кривизны главных нормальных сечений поверхности Γ (каждая из кривизн считается положительной, если соответствующее нормальное сечение выпукло в сторону области Ω_1); h — характерный размер сосуда; $\varepsilon = g/a^2$. Объем жидкости V_1 считается заданным и неизменным: $\int_{\Omega_1} d\Omega_1 = V_1$. В п. 2.1 с использованием вариационного подхода выводится краевая задача, описывающая равновесное состояние ГС:

$$-\sigma(k_1 + k_2) + g\rho_1 z + a^2\rho_2^0 \exp(-ga^{-2}z) + \text{const} = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{1}$$

$$\sigma(\vec{n}\cdot\vec{n}_1)+(\sigma_1-\sigma_2)=0 \quad (\text{на } \gamma:=\partial\Gamma). \tag{2}$$

Утверждение 2.1.2. Равновесное состояние ГС в условиях, близких к невесомости, описывается решением краевой задачи (1), (2); уравнение (1) должно удовлетворяться на искомой равновесной поверхности Γ, а на линии контакта сред γ должно выполняться граничное условие (2). □

В п. 2.2 рассмотрен частный случай задачи статики для прямоугольного канала и получена плоская задача

$$z''=x'(B_0z+b_0f_\varepsilon(z)+C),\ \ 0<s<s_1^*,\quad z(0)=z_0,\ \ z'(0)=0, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} x''=-z'(B_0z+b_0f_\varepsilon(z)+C),\ \ 0<s<s_1^*,\quad x(0)=0,\ \ x'(0)=1,\\ \int_0^{s_1^*}(z(s)+h_1)x'(s)ds=V_1,\quad x(s_1^*)=1, \end{gathered} \tag{4}$$

где z_0 — начальный прогиб линии Γ в точке $s=0$ и приняты обозначения

$$B_0=(\rho_1-\rho_2^0)gh^2\sigma^{-1},\ \ b_0=\rho_2^0gh^2\sigma^{-1},\ \ f_\varepsilon(zh^{-1})=\varepsilon^{-1}[\exp(-\varepsilon z)-1+\varepsilon z]. \tag{5}$$

Замечание 2.2.1. В задаче (3), (4) для двух обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнения (далее — ДУ) 2-го порядка сформулированы пять граничных условий и одно интегральное условие. При этом краевая задача не является переопределенной, поскольку в уравнениях, интегральном и одном граничном условиях присутствуют параметры C, z_0, s_1^*, значения которых изначально не задаются и определяются в процессе решения задачи. □

Проблема (3), (4) приводится к задаче Коши для системе ДУ 1-го порядка

$$\begin{gathered} z'=u,\ x'=v,\ u'=v\,k(z(s)),\ v'=-u\,k(z(s)),\ S'(s)=zv,\ z(0)=z_0,\\ x(0)=0,\ u(0)=0,\ \ v(0)=1,\ S(0)=0,\ k(z(s)):=B_0z(s)+b_0f_\varepsilon(z(s))+C, \end{gathered} \tag{6}$$

причем конец s_1^* отрезка интегрирования определяется условием $x(s_1^*)=1$. Разработана итерационная методика решения задачи (6), проведены численные расчеты и выявлены тенденции изменения параметров C и z_0 в зависимости от угла смачивания δ $(\sin(\delta)=x'(s_1^*))$ при фиксированном значении β и наоборот, зависимость от β при фиксированном значении δ. В п. 2.3 получен вид, который принимает задача (1), (2) в осесимметричном случае в цилиндрических координатах $Or\theta z$ (ось Oz совмещена с осью симметрии), в сечении $\theta=\text{const}$:

$$r''=-z'\Big[\pm(C+B_0z+b_0f_\varepsilon(z))-\frac{z'}{r}\Big],\ \ 0<s<s_1,\ \ r(0)=0,\ \ r'(0)=1, \tag{7}$$

$$\begin{gathered} z''=r'\Big[\pm(C+B_0z+b_0f_\varepsilon(z))-\frac{z'}{r}\Big],\ \ 0<s<s_1,\ \ z(0)=z_0,\ \ z'(0)=0,\\ r(s_1)=1,\ \ \pi\int_0^{s_1}(r(s))^2z'(s)ds=V_1(=\text{const}). \end{gathered} \tag{8}$$

Разработан численно-аналитический метод решения задачи (7)–(8) с использованием асимптотических разложений решения в окрестности нуля.
Утверждение 2.4.1. Если на поверхности Γ выполняются условия

$$\int\!\!\!\int_{\Gamma}\Big[-(k_1+k_2)+\frac{g\rho_1 z}{\sigma}+\frac{a^2\rho_2^0}{\sigma}\exp(-\frac{g}{a^2}z)+\frac{c}{\sigma}\Big](\vec{n}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\Gamma+\oint_{\gamma}\Big[(\vec{e}\cdot\overrightarrow{\delta x})-\frac{(\sigma_1-\sigma_2)}{\sigma}(\vec{e}_1\cdot\overrightarrow{\delta x})\Big]d\gamma=0,$$

$$\int_{\Gamma}[a_\sigma(s)N^2+(\nabla_\Gamma N)^2]d\Gamma+\oint_{\gamma}\chi N^2 d\gamma>0, \tag{9}$$

где N — возмущение равновесной поверхности Γ по внешней нормали $\vec{n}$ к Γ, $a_\sigma:=g\sigma^{-1}[\,\rho_1+\rho_2^0\exp(-ga^{-2}z)]\cos(\widehat{\vec{n},\vec{z}})-(k_1^2+k_2^2)$, $\chi=(k\cos\delta-\overline{k})/\sin\delta$, то это состояние равновесия ГС является устойчивым. □

Минимум квадратичного функционала (9) при условии нормировки $\int_\Gamma N^2d\Gamma=1$, условии $\int_\Gamma Nd\Gamma=0$, и функция N, реализующая этот минимум, представляют собой наименьшее собственное значение (далее — СЗ) $\lambda=\lambda_*$ и соответствующую нормированную СФ задачи

$$-\Delta_\Gamma N+a_\sigma(s)N+\mu=\lambda N\ (\text{на }\Gamma),\ \partial N/\partial e+\chi N=0\ (\text{на }\gamma:=\partial\Gamma),\ \int_\Gamma Nd\Gamma=0. \tag{10}$$

Здесь λ и μ — неизвестные заранее постоянные, $\partial/\partial e$ — производная на Γ по внешней нормали к γ, Δ_Γ — оператор Лапласа–Бельтрами, действующий на Γ.
Следствие 2.4.2 (спектральный признак устойчивости). Если для некоторого положения равновесия жидкости в ГС минимальное СЗ λ_* задачи (10) положительно, то равновесное положение жидкости статически устойчиво; если же $\lambda_*<0$, то равновесное положение жидкости неустойчиво. □

Построена методика нахождения устойчивых равновесных состояний ГС с использованием полученных для частных случаев аналогов спектрального признака устойчивости, на основе анализа численных результатов найдены границы области устойчивости системы.

В главе 3 изучаются НКЗ и спектральная задача, возникающие в проблеме малых движений и собственных колебаний ГС с учетом капиллярных и гравитационных сил. Газ в состоянии покоя экспоненциально стратифицирован по плотности вдоль действия сил гравитации. Пусть $\vec{w}_i(t,x)$ и $p_i(t,x)$ — поля смещений частиц жидкости и газа и отклонения полей давлений в областях Ω_i, $i=1,2$; $\rho_2=\rho_2(t,x)$ — отклонение поля плотности в газе от $\rho_{2,0}(x):=\rho_2(0)\exp(-\varepsilon x_3)$. Линеаризация уравнений движения в Ω_1 и Ω_2, а также граничных и начальных условий приводят к НКЗ

$$\rho_1\frac{\partial^2\vec{w}_1}{\partial t^2}=-\nabla p_1+\rho_1\vec{f}_1,\quad \operatorname{div}\vec{w}_1=0\quad(\text{в }\Omega_1), \tag{11}$$

$$\rho_{2,0}\frac{\partial^2\vec{w}_2}{\partial t^2}=-\nabla p_2-\rho_2 g\vec{e}_3+\rho_{2,0}\vec{f}_2,\quad \rho_2+\operatorname{div}(\rho_{2,0}\vec{w}_2)=0\ \ (\text{в }\Omega_2),$$

$$\vec{w}_1\cdot\vec{n}=0\ \ (\text{на}\ \ S_1),\ \ \vec{w}_2\cdot\vec{n}=0\ \ (\text{на}\ \ S_2),\ \ \vec{w}_1\cdot\vec{n}=\vec{w}_2\cdot\vec{n}=:\zeta\ \ (\text{на}\ \ \Gamma),\ \int_\Gamma\zeta d\Gamma=0,$$

$$p_1-p_2=\mathcal{L}_\sigma\zeta:=-\sigma\Delta_\Gamma\zeta+a_\sigma(x)\zeta\ \ (\text{на}\ \ \Gamma),\quad \frac{\partial\zeta}{\partial\nu}+\chi\zeta=0\ \ (\text{на}\ \ \partial\Gamma),$$

$$a_\sigma(x):=-\sigma(k_1^2+k_2^2)+g(\rho_1-\rho_{2,0}(x))\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_3}),\ \ \chi:=(k_\Gamma\cos\delta-k_S)/\sin\delta,$$

$$\vec{w}_i(0,x)=\vec{w}_i^{\,0}(x),\quad \frac{\partial\vec{w}_i}{\partial t}(0,x)=\vec{w}_i^{\,1}(x),\quad x\in\Omega_i,\quad i=1,2, \tag{12}$$

где $\vec{f}_i(t,x)$ — поля плотности массовых сил; $\vec{n}$ — вектор внешней нормали (на Γ он направлен внутрь Ω_2); $\vec{\nu}$ — нормаль к $\partial\Gamma$ в плоскости, касательной к Γ; k_Γ и k_S — кривизны сечений поверхностей Γ и S плоскостью, перпендикулярной к $\partial\Gamma$; функция $\zeta=\zeta(t,x)$, $x\in\Gamma$, описывает малые перемещения движущейся границы раздела "жидкость–газ" относительно равновесной поверхности Γ вдоль нормали $\vec{n}$ к Γ. После ортогонального проектирования уравнений, краевых и начальных условий задачи (11)–(12) на подпространства в ортогональных разложениях

$$\vec{L}_2(\Omega_1)=\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1),$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1):=\left\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega_1):\operatorname{div}\vec{v}=0\ \ (\text{в}\ \Omega_1),\ \ \vec{v}\cdot\vec{n}=0\ \ (\text{на}\ \partial\Omega_1)\right\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1):=\left\{\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega_1):\ \ \vec{u}=\nabla\varphi,\ \ \varphi=0\ \ (\text{на}\ \ \Gamma)\right\},$$

$$\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1):=\left\{\vec{w}\in\vec{L}_2(\Omega_1):\vec{w}=\nabla\Phi,\ \Delta\Phi=0\ (\text{в}\ \Omega_1),\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0\ (\text{на}\ S_1),\int_\Gamma\Phi d\Gamma=0\right\},$$

$$\vec{L}_2(\Omega_2;\rho_{2,0})=\vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0})\oplus\vec{J}_0(\Omega_2;\rho_{2,0}),$$

$$\vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}):=\left\{\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega_2;\rho_{2,0}):\vec{u}=\nabla\varphi,\ \ \int_{\Omega_2}\rho_{2,0}\,\varphi\,d\Omega_2=0\right\},$$

$$\vec{J}_0(\Omega_2;\rho_{2,0}):=\left\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega_2;\rho_{2,0}):\ \operatorname{div}(\rho_{2,0}\vec{v})=0\ \ (\text{в}\ \ \Omega_2),\ \vec{v}\cdot\vec{n}=0\ \ (\text{на}\ \ \partial\Omega_2)\right\},$$

получена НКЗ для потенциалов смещений $\Phi_1(t,x)$ и $\Phi_2(t,x)$ в жидкости и газе:

$$\Delta\Phi_1=0\quad(\text{в}\ \Omega_1), \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}=a^2\Delta_0\Phi_2+\widetilde{f}_2(t,x),\quad \Delta_0\Phi_2:=\rho_{2,0}^{-1}\operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_2)\ (\text{в}\ \Omega_2),\ \ \nabla\widetilde{f}_2:=P_{2,G}\vec{f}_2,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=0\ \ (\text{на}\ S_1),\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}=0\ \ (\text{на}\ S_2),\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}=:\zeta\ \ (\text{на}\ \Gamma),$$

$$\int_\Gamma\zeta d\Gamma=0,\ \int_\Gamma\Phi_1 d\Gamma=0,\ \int_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Phi_2 d\Omega_2=0,\ \int_{\Omega_2}\rho_{2,0}\widetilde{f}_2 d\Omega_2=0,$$

$$\rho_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_\Gamma\left(\rho_{2,0}\Phi_2\right)+B_\sigma\zeta=\rho_1 f_1-P_\Gamma\left(\rho_{2,0}f_2\right)\ \ (\text{на}\ \ \Gamma),\ \ \nabla\widetilde{f}_1:=P_{1,h,S_1}\vec{f}_1,$$

$$B_\sigma := P_\Gamma \mathcal{L}_\sigma P_\Gamma, \;\; \mathcal{L}_\sigma := -\sigma\Delta_\Gamma + a_\sigma(x), \;\; \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} + \chi\zeta = 0 \;\; (\text{на } \partial\Gamma), \tag{14}$$

$$\Phi_1(0,x) = \Phi_1^0(x), \; \Phi_2(0,x) = \Phi_2^0(x), \; \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}(0,x) = \Phi_1^1(x), \; \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}(0,x) = \Phi_2^1(x). \tag{15}$$

Здесь оператор B_σ определен соотношениями (14), а $P_\Gamma : L_2(\Gamma) \to L_{2,\Gamma}$, $P_{1,h,S_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, $P_{2,G} : \vec{L}_2(\Omega_2;\rho_{2,0}) \to \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0})$ — ортопроекторы на соответствующие подпространства. Отметим еще, что для $\Phi_1^0(x)$ и $\Phi_2^0(x)$, а также $\Phi_1^1(x)$ и $\Phi_2^1(x)$ должны быть выполнены условия согласования в виде $\frac{\partial\Phi_1^0}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2^0}{\partial n}$ $(=: \zeta^0)$, $\frac{\partial\Phi_1^1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2^1}{\partial n}$ $(=: \zeta^1)$ (на Γ).

Соответствующая (13)–(15) спектральная задача для амплитудных функций $\Phi_j(x)$ $(\Phi_j(t,x) = \Phi_j(x)\exp(i\omega t)$, $j = 1,2$, ω — частота колебаний) имеет вид

$$\Delta\Phi_1 = 0 \;\; (\text{в } \Omega_1), \quad -\Delta_0\Phi_2 = \lambda a^{-2}\Phi_2 \;\; (\text{в } \Omega_2), \quad \lambda := \omega^2, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \;\; (\text{на } S_1), \; \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \;\; (\text{на } S_2), \; \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} =: \zeta \;\; (\text{на } \Gamma), \tag{17}$$

$$B_\sigma\zeta = \lambda(\rho_1\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)) \;\; (\text{на } \Gamma), \tag{18}$$

$$\int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \Phi_1\, d\Gamma = 0, \quad \lambda\int_{\Omega_2} \rho_{2,0}\Phi_2\, d\Omega_2 = 0. \tag{19}$$

Отметим, что здесь спектральный параметр λ входит как в уравнение в области Ω_2, так и в краевое условие (18). Кроме того, порядки дифференциальных операторов в уравнениях (16) и граничном условии (18) совпадают (Δ, Δ_0 и Δ_Γ — операторы одного (второго) порядка).

Определение 3.1.1. Будем говорить, что ГС статически устойчива по линейному приближению, если оператор B_σ положительно определен ($B_\sigma \gg 0$). $\square$

Лемма 3.1.2. Если $B_\sigma \gg 0$, то СЗ задачи (16)–(19) находятся среди значений функционала

$$F_1(\Phi_1;\Phi_2) := \frac{\rho_1\int_{\Omega_1}|\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2}\rho_{2,0}|\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega_2}{a^{-2}\int_{\Omega_2}\rho_{2,0}|\Phi_2|^2\, d\Omega_2 + \|B_\sigma^{-1/2}(\rho_1\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\|^2_{L_{2,\Gamma}}}. \tag{20}$$

В общем случае эти СЗ можно найти среди значений функционала

$$F_2(\Phi_1;\Phi_2) := \frac{a^2\int_{\Omega_2}\rho_{2,0}|\Delta_0\Phi_2|^2\, d\Omega_2 + \langle\zeta, B_\sigma\zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}}}{\rho_1\int_{\Omega_1}|\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2}\rho_{2,0}|\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega_2}. \tag{21}$$

Из (21) следует, что СЗ вещественны, а при $B_\sigma \gg 0$ из (20) следует их положительность. $\square$

Далее, исходная НКЗ (13)–(15) с использованием метода вспомогательных краевых задач С. Г. Крейна сводится к задаче Коши для ДОУ 2-го порядка в пространстве $\mathcal{H} = L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \oplus L_{2,\Gamma}$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(\mathcal{A}u\Big) + \mathcal{B}u = f(t), \quad u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1, \;\; u(t) \in \mathcal{H}, \;\; f(t) \in \mathcal{H}, \tag{22}$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} I & Q^* \\ Q & C \end{pmatrix}, \ \mathcal{B} := \begin{pmatrix} a^2 A & 0 \\ 0 & B_\sigma \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(A) \oplus D(B_\sigma) \subset \mathcal{H}. \quad (23)$$

Лемма 3.1.5. Операторная матрица $\mathcal{A}$ из (23) является ограниченным положительным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}$. □

В п. 3.2 изучается задача о собственных колебаниях, полученная из задачи Коши (22), (23), и соответствующая ей спектральная проблема

$$\mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u, \ \ u \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H} := H^1_\Gamma(\Omega_1) \oplus H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}, \ \ \lambda := \omega^2. \quad (24)$$

Теорема 3.2.1. Пусть $B_\sigma \gg 0$. Тогда задача (24) имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$, $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = +\infty$, и систему СФ $\{u_j\}_{j=1}^\infty$, образующую ортогональный базис как в $\mathcal{H}_\mathcal{B} = \mathcal{D}(\mathcal{B}^{1/2}) \subset \mathcal{H}$, так и по форме $\mathcal{A}$. При этом выполнены свойства ортогональности

$$(u_k, u_j)_\mathcal{B} = (\mathcal{B}^{1/2}u_k, \mathcal{B}^{1/2}u_j)_\mathcal{H} = \lambda_k \delta_{kj}, \quad (\mathcal{A}u_k, u_j)_\mathcal{H} = (\mathcal{A}^{1/2}u_k, \mathcal{A}^{1/2}u_j)_\mathcal{H} = \delta_{kj}.$$

Собственные значения λ_j могут быть найдены как последовательные минимумы вариационного отношения $F_1(\Phi_1;\Phi_2)$ или вариационного отношения $F_2(\Phi_1;\Phi_2)$. Эти отношения следует рассматривать на функциях Φ_1, Φ_2, для которых выполнены условия (17), (19), а также первое уравнение (16), т.е. свойство гармоничности $\Phi_1(x)$. Числа $\mu_j = \lambda_j^{-1}$ могут быть найдены также как последовательные максимумы вариационного отношения

$$F_3(\Phi_1;\Phi_2) = \frac{a^{-2}\int_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\Phi_2|^2\,d\Omega_2 + \|B_\sigma^{-1/2}(\rho_1\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\|^2_{L_{2,\Gamma}}}{\rho_1\int_{\Omega_1}|\nabla\Phi_1|^2\,d\Omega_1 + \int_{\Omega_2}\rho_{2,0}|\nabla\Phi_2|^2\,d\Omega_2}, \quad (25)$$

рассматриваемого на всем пространстве $\mathcal{H}$. При этом соотношения (16)–(18) для решений задачи (24) выполняются автоматически, так как они для проблемы (25) являются естественными. □

Далее изучается случай, когда оператор B_σ, имеющий дискретный спектр $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$, не является положительно определенным. Пусть для СЗ оператора B_σ выполнено свойство

$$\begin{aligned} &-\infty < \gamma \le \lambda_1(B_\sigma) \le \ldots \le \lambda_\varkappa(B_\sigma) < 0 = \lambda_{\varkappa+1}(B_\sigma) = \ldots = \lambda_{\varkappa+q}(B_\sigma) < \\ &< \lambda_{\varkappa+q+1}(B_\sigma) \le \ldots \le \lambda_k(B_\sigma) \le \ldots, \ \varkappa \ge 1, \ q \ge 0, \ \lambda_k(B_\sigma) \to +\infty \ (k\to\infty), \end{aligned} \quad (26)$$

где СЗ выписаны с учетом кратностей. Установлено, что оператор $\mathcal{B}$ имеет ту же структуру спектра, что и оператор B_σ. На этой основе с использованием теории линейных операторов, самосопряженных в пространстве Л.С. Понтрягина $\Pi_\varkappa$ с индефинитной метрикой, имеющей $\varkappa$ отрицательных квадратов, доказана общая спектральная теорема.

Теорема 3.2.2. Задача (24) при условиях (26) имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$, расположенный на вещественной оси и имеющий предельную точку

$\lambda = +\infty$. При этом $\varkappa$ СЗ (нумерация с учетом их кратностей) отрицательны, q последующих СЗ нулевые, а остальные положительны, т.е.

$$-\infty < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_\varkappa < 0 = \lambda_{\varkappa+1} = \ldots = \lambda_{\varkappa+q} < \lambda_{\varkappa+q+1} \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots . \quad (27)$$

СФ $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ задачи (24), отвечающие СЗ (27), образуют ортонормированный базис по форме оператора $\mathcal{A}$. При этом выполнены свойства ортогональности

$$(\mathcal{A}u_k, u_j)_\mathcal{H} = \delta_{kj}, \quad (\mathcal{B}u_k, u_j)_\mathcal{H} = \lambda_k \delta_{kj}. \qquad \square$$

Теорема 3.2.3 (Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости). Пусть состояние равновесия системы "жидкость–газ" не является статически устойчивым и оператор B_σ имеет по крайней мере одно отрицательное СЗ. Тогда эта ГС и динамически неустойчива, т.е. задача (24) будет иметь по крайней мере одно отрицательное СЗ $\lambda = \omega^2$, и потому существует решение однородной задачи (22), (23), экспоненциально возрастающее во времени (по закону $\exp(t\sqrt{|\lambda|})$). $\square$

Определение 3.3.1. Назовем сильным решением задачи (22), (23) на отрезке $[0,T]$ функцию $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}) \subset \mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия: 1°. $u(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B})$, $\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}u(t) \in C([0,T];\mathcal{H})$;
2°. $u(t) \in C^2([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}))$; 3°. для $\forall t \in [0,T]$ выполнено уравнение (22), где все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$; 4°. выполнены начальные условия (22). $\square$

Теорема 3.3.1. Пусть выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}), \quad u^1 \in \mathcal{D}(|\mathcal{B}|^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})).$$

Тогда задача (22), (23) имеет сильное решение в смысле определения 3.3.1. $\square$

Далее вводится определение сильного решения НКЗ (13)–(15), и при условиях достаточной гладкости начальных функций и правых частей доказана итоговая теорема 3.3.2 о достаточных условиях сильной разрешимости на отрезке $[0,T]$ этой задачи в смысле введенного определения.

На базе теоремы 3.3.2 получено представление решения задачи (22), (23) в виде $u(t) = u_-(t) + u_0(t) + u_+(t)$, где функция $u_-(t)$ характеризует неустойчивые режимы малых движений ГС в условиях, близких к невесомости, в случае, когда система статически неустойчива и минимальное СЗ оператора B_σ отрицательно. Функция $u_0(t)$ описывает также неустойчивые режимы свободных движений ГС, линейным образом возрастающие со временем t. Слагаемое $u_+(t)$ описывает колебательные режимы в ГС, характерные как для гравитационно-капиллярных, так и акустических волн.

В п. 4.1 изучается спектральная задача с горизонтальной границей сопряжения, возникающая в проблеме колебаний ГС в цилиндрическом сосуде:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_1), \quad (28)$$

$$-\Delta_0\Phi_2 = \lambda a^{-2}\Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_2), \quad \lambda := \omega^2,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} =: \zeta \ (\text{на}\,\Gamma, \ \text{т.е. при } z=0), \ \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \ \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0, \ \int_\Gamma \Phi_2 d\Gamma = 0,$$

$$-\sigma\Delta_\Gamma\zeta + g\Delta\rho\zeta = \lambda(\rho_1\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)\Phi_2) \ (\text{на } \Gamma), \ \frac{\partial\zeta}{\partial n_\Gamma} = 0 \ (\text{на } \partial\Gamma), \ \Delta\rho := \rho_1 - \rho_{2,0}(0),$$

$$\Delta_\Gamma := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \ \Delta := \Delta_\Gamma + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \ \Delta_0\Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1}(z)\,\mathrm{div}(\rho_{2,0}(z)\nabla\Phi_2). \qquad (29)$$

С помощью метода разделения переменных решение задачи (28)–(29) отыскивается в виде $\Phi_1(x,y,z) = v_1(z)u(x,y)$, $\Phi_2(x,y,z) = v_2(z)u(x,y)$, $\zeta = \eta u(x,y)$, при этом возникают две спектральные проблемы:

$$-\Delta_\Gamma u = \mu u \ (\text{на } \Gamma), \quad \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = 0 \ (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_\Gamma u\, d\Gamma = 0, \qquad (30)$$

$$\frac{d^2v_1}{dz^2} - \mu v_1 = 0 \ (-h_1 < z < 0), \quad \frac{dv_1}{dz} = 0 \ (z = -h_1), \qquad (31)$$

$$-\rho_{2,0}^{-1}(z)\frac{d}{dz}\Big(\rho_{2,0}(z)\frac{dv_2}{dz}\Big) + \mu v_2 = \lambda a^{-2} v_2 \ (0 < z < h_2), \quad \frac{dv_2}{dz} = 0 \ (z = h_2),$$

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{dv_2}{dz} =: \eta \quad (z=0), \quad (\sigma\mu + g\Delta\rho)\eta = \lambda(\rho_1 v_1(0) - \rho_{2,0}(0)v_2(0)). \qquad (32)$$

Спектральная задача Неймана (30) в $L_{2,\Gamma}$ имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных СЗ $\mu_k > 0$ с предельной точкой на $+\infty$. Отвечающая этому спектру система СФ $\{u_k(x,y)\}_{k=1}^\infty$ образует ортогональный базис в $L_{2,\Gamma}$, а также в $H^1_\Gamma = H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$ с квадратом нормы $\|u\|^2_{H^1_\Gamma} := \int_\Gamma |\nabla_\Gamma u|^2 d\Gamma$. С использованием общей операторной схемы исследования, примененной в главе 2, спектральная задача (31), (32) приводится к операторному виду

$$\mathcal{A}_k\psi = \lambda\mathcal{J}_k\psi, \quad \psi := (w_{21}(z);\eta)^\tau, \ \ w_{21}(z) \in \mathcal{D}(A_k), \ \ k = 1,2,\dots,$$

где τ — операция транспонирования вектор-строки, $\mathcal{A}_k := \mathrm{diag}(a^2A_k; \lambda_k(B_\sigma))$, $\mathcal{D}(\mathcal{A}_k) = \mathcal{D}(A_k) \oplus \mathbb{R}$, оператор $\mathcal{J}_k : L_{2,k} \to L_{2,k}$ является ограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в пространстве $L_{2,k} = L_2([0,h_2];\rho_{2,0}(z)) \oplus \mathbb{R}$ с квадратом нормы

$$\|\psi\|^2_{L_{2,k}} := \|w_{21}(z)\|^2_{L_2([0,h_2];\rho_{2,0}(z))} + |\eta|^2.$$

Теорема 4.1.2. При любом $k = 1,2,\dots$ задача (31), (32) имеет дискретный спектр, состоящий из положительных однократных СЗ $\{\lambda_{kp}\}_{p=0}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Отвечающая им система СФ $\{\psi_{kp}\}_{p=0}^\infty$, $\psi_{kp} = (w_{21kp}(z);\eta_{kp})^\tau$, образует ортогональный по форме оператора $\mathcal{J}_k$ базис в пространстве $L_{2,k}$, а также в энергетическом пространстве $H_{\mathcal{A}_k} \subset L_{2,k}$ с квадратом нормы

$$\|\psi\|^2_{\mathcal{A}_k} := a^2\int_0^{h_2} \rho_{2,0}(z)[|w'_{21}(z)|^2 + \mu_k|w_{21}(z)|^2]dz + \lambda_k(B_\sigma)|\eta|^2, \ k = 1,2,\dots.$$

СФ ψ_{kp} могут быть выбраны удовлетворяющими условиям ортонормировки:

$$(\mathcal{J}_k\psi_{kp},\psi_{kl})_{L_{2,k}}=\delta_{pl},\quad (\mathcal{A}_k\psi_{kp},\psi_{kl})_{L_{2,k}}=(\psi_{kp},\psi_{kl})_{\mathcal{A}_k}=\lambda_{kp}\delta_{pl}.\qquad\square$$

Теорема 4.1.3. Собственные значения $\{\lambda_{kp}\}_{p=0}^{\infty}$ задачи (28)–(29) могут быть найдены как последовательные минимумы вариационного отношения

$$F_{1k}(v_1;v_2):=\frac{a^2\int_0^{h_2}\rho_{2,0}(z)|\Delta_{0,k}v_2|^2dz+\lambda_k(B_\sigma)|v_1'(0)|^2}{\rho_1\int_{-h_1}^0[|v_1'(z)|^2+\mu_k|v_1(z)|^2]dz+\int_0^{h_2}\rho_{2,0}(z)[|v_2'(z)|^2+\mu_k|v_2(z)|^2]dz},$$

$$\Delta_{0,k}v_2(z):=-\rho_{2,0}^{-1}(z)\frac{d}{dz}\Big(\rho_{2,0}(z)\frac{dv_2}{dz}\Big)+\mu_k v_2(z),$$

а $\mu_{kp}=1/\lambda_{kp}$ — как последовательные максимумы вариационного отношения

$$F_{2k}(v_1;v_2):=\frac{a^{-2}\int_0^{h_2}\rho_{2,0}(z)|v_2(z)|^2dz+\lambda_k^{-1}(B_\sigma)|\rho_1v_1(0)-\rho_{2,0}(0)v_2(0)|^2}{\rho_1\int_{-h_1}^0[|v_1'(z)|^2+\mu_k|v_1(z)|^2]dz+\int_0^{h_2}\rho_{2,0}(z)[|v_2'(z)|^2+\mu_k|v_2(z)|^2]dz}.$$

$\square$

Для задачи (28)–(29) получено характеристическое уравнение

$$\gamma\mathrm{ctg}\gamma+\delta=\Big[-\frac{\lambda_k(B_\sigma)}{a^2\rho_{2,0}(0)}(\gamma^2+\delta^2+\alpha_k^2)^{-1}+\frac{\rho_1\mathrm{cth}(\alpha_kh_1)}{\rho_{2,0}(0)\alpha_k}\Big](\delta^2+\gamma^2),\ k=1,2,\dots.\quad(33)$$

Его исследование привело к следующим выводам: 1°. при любом $k=1,2,\dots$ задача имеет счетное множество СЗ

$$\lambda_{kp}:=a^2(\gamma_{kp}^2+\mu_k+g^2/(4a^4)),\ \ \gamma_{kp}=\pi p+\beta_{kp},\ \ 0<\beta_{kp}<\pi,\ \ p=1,2,\dots,$$

отвечающих акустическим колебаниям в ГС; 2°. при фиксированном k и $p\to\infty$, а также при фиксированном p и $k\to\infty$ имеет место свойство $\lambda_{kp}=\lambda_{kp}^{(2)}[1+o(1)]$, где $\lambda_{kp}^{(2)}$ — квадраты частот акустических колебаний газа с неподвижной границей Г; 3°. на промежутке $[0,\pi]$ также может находиться корень γ_{k_0} уравнения (33), которое выведено при условии, что $\gamma^2=\nu-\delta^2>0$. Тогда вместо (33) следует рассмотреть уравнение

$$\delta+\xi\mathrm{cth}\xi=\Big[-\frac{\lambda_k(B_\sigma)}{a^2\rho_{2,0}(0)}(\alpha_k^2+\delta^2-\xi^2)^{-1}+\frac{\rho_1\mathrm{cth}(\alpha_kh_1)}{\rho_{2,0}(0)\alpha_k}\Big](\delta^2-\xi^2),\ k=1,2,\dots,\quad(34)$$

которое соответствует случаю $\nu-\delta^2=-\xi^2\le 0$. Обозначим через ξ_{k_0} корень уравнения (34) на промежутке $[0,\pi]$. Тогда этим корням (одному либо другому) отвечают СЗ

$$\lambda_{k0}=a^2(\gamma_{k_0}^2+\mu_k+g^2/(4a^4)),\quad k=1,2,\dots,$$

либо
$$\lambda_{k0}=a^2(-\xi_{k_0}^2+\mu_k+g^2/(4a^4)),\quad k=1,2,\dots.\quad(35)$$

4°. При $a^2 \to \infty$ СЗ, определяемые формулой (35), соответствующие корням уравнения (34), имеют асимптотическое поведение $\lambda_{k0} = \lambda_k^{(1)}[1 + o(1)]$, $(a^2 \to \infty)$, и отвечают случаю, когда обе жидкостные среды несжимаемы и имеют плотности ρ_1 и $\rho_{2,0}(0)$ соответственно.

В п. 4.2 изучается плоская спектральная проблема с произвольной границей сопряжения Γ: $x = x(s)$, $z = z(s)$, $-s_0 \le s \le s_0$, $x(s_0) = l$, $x(-s_0) = -l$, $-h_1 < z(s) < h_2$. Спектральная задача (16)–(19) в этом случае принимает вид:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1),\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\Big|_{S_1} = 0,\ -\Delta_0\Phi_2 = \lambda\alpha^2\Phi_2 \ (\text{в } \Omega_2),\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\Big|_{S_2} = 0,\ \lambda := \frac{\rho_1\omega^2 l^3}{\sigma}, \tag{36}$$

с условиями сопряжения и нормировки искомых функций Φ_1 и Φ_2 на криволинейной дуге Γ:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} =: \zeta, \tag{37}$$

$$B_\sigma\zeta := P_\Gamma[-\Delta_\Gamma\zeta + a_\sigma(s)\zeta] = \lambda[\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)P_\Gamma(\exp(-2\varepsilon z)\Phi_2)],\ \Big(\frac{\partial\zeta}{\partial n_0} + \chi\zeta\Big)\Big|_{s=\pm s_0} = 0,$$

$$\int_{-s_0}^{s_0}\zeta ds = 0,\ \int_{-s_0}^{s_0}\Phi_1 ds = 0,\ \int_{\Omega_2}\exp(-2\varepsilon z)\Phi_2 d\Omega_2 = 0, \tag{38}$$

где $a_\sigma(s) := -(k(s))^2 + (B_0 - b_0\exp(-2\varepsilon z))\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_3})$, $\varepsilon = \beta\varepsilon_0, \varepsilon_0 := \dfrac{g_0 l}{2a^2}$, $\alpha^2 := \dfrac{\sigma}{\rho_1 l a^2}$,

$$B_0 := \frac{\rho_1 g l^2}{\sigma} = \beta\widehat{B}_0,\ \ \widehat{B}_0 := \frac{\rho_1 g_0 l^2}{\sigma},\quad b_0 := \frac{\rho_{2,0}(0) g l^2}{\sigma} = \beta\widehat{b}_0,\ \ \widehat{b}_0 := \frac{\rho_{2,0}(0) g_0 l^2}{\sigma}.$$

Здесь в качестве параметра s выбрана длина дуги Γ, отсчитываемая от ее середины, характерный размер l — полуширина канала, H — высота канала, V_1 — заданный объем жидкости, $h_1 = V_1/(2l)$ — средняя высота жидкости, $h_2 = (H - h_1)$ — средняя высота газа, $\Delta_\Gamma\zeta = d^2\zeta/ds^2$.

Определение 4.2.1. Будем говорить, что задача (36)–(38) имеет обобщенное решение $\Phi := (\Phi_1;\Phi_2;\zeta)$, $\Phi_1 \in H^1(\Omega_1)$, $\Phi_2 \in H^1(\Omega_2;\rho_{2,0})$, $\zeta \in L_{2,\Gamma}$, если при любых функциях $\Psi := (\Psi_1;\Psi_2;\psi)$, $\Psi_1 \in H^1(\Omega_1)$, $\psi \in L_{2,\Gamma}$, $\Psi_2 \in H^1(\Omega_2;\rho_{2,0})$, выполнены следующие интегральные тождества:

$$\int_{\Omega_1}\nabla\Psi_1\cdot\nabla\Phi_1\, d\Omega_1 = \int_{-s_0}^{s_0}\Big(\Psi_1\Big)\Big|_\Gamma\zeta ds,$$

$$\int_{\Omega_2}\rho_{2,0}\nabla\Psi_2\cdot\nabla\Phi_2\, d\Omega_2 + \int_{-s_0}^{s_0}\Big(\rho_{2,0}\Psi_2\Big)\Big|_\Gamma\zeta ds = \lambda\alpha^2\int_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Psi_2\Phi_2\, d\Omega_2,$$

$$\int_{-s_0}^{s_0}[\psi'\zeta' + a_\sigma(s)\psi\zeta]ds + \chi(s)\psi(s)\zeta(s)\Big|_{s=-s_0}^{s=s_0} = \int_{-s_0}^{s_0}\psi\Big(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)\Big)\Big|_\Gamma ds. \quad \square$$

Если $B_\sigma \gg 0$ и выполнено условие $\zeta = \lambda B_\sigma^{-1}\Big(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)\Big)\Big|_\Gamma$, то для обобщенного решения получаем интегральные тождества, в которых не присутствует функция ζ, и, в частности,

$$\int_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Phi_1 \, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Psi_2 \cdot \nabla\Phi_2 \, d\Omega_2 = \lambda\Big\{\alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}\Psi_2\Phi_2 \, d\Omega_2 +$$

$$+\int\limits_{-s_0}^{s_0}\Big[(\Psi_1 - \rho_{2,0}\Psi_2)\Big|_\Gamma \Big(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\Big|_\Gamma\Big)\Big] ds\Big\}, \ \forall\Psi_1 \in H^1(\Omega_1), \ \forall\Psi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0}).$$

Установлено, что минимум квадратичного функционала

$$\frac{\displaystyle\int_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 \, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_2|^2 \, d\Omega_2}{\displaystyle\alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Phi_2|^2 \, d\Omega_2 + \int_{-s_0}^{s_0} \Big[(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\,(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)))ds\Big]}$$

на СФ $(\Phi_1; \Phi_2) \in H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ задачи (36), отвечающих условиям нормировки (38). На этой основе разработана проекционная схема для нахождения приближенного решения в виде $\Phi = \sum\limits_{k=1}^{\widetilde{N}} c_k\Phi_k$, $\Phi_k = (\Phi_{1k}; \Phi_{2k})^\tau$, где c_k — неизвестные коэффициенты, а пробные функции Φ_k, удовлетворяющие условиям нормировки (38), определены в явном виде по методике п. 4.1.

Получена система Ритца для нахождения спектрального параметра λ:

$$\det \widehat{A}(\lambda) = 0, \ \widehat{A}_{lk}(\lambda) = \alpha_{lk} - \lambda\beta_{lk}, \ \alpha_{lk} := \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Phi_{1k} \cdot \nabla\Phi_{1l} \, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Phi_{2k} \cdot \nabla\Phi_{2l} \, d\Omega_2,$$

$$\beta_{lk} := \alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\Phi_{2k}\Phi_{2l} \, d\Omega_2 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} (\Phi_{1l} - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2l}))B_\sigma^{-1}(\Phi_{1k} - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2k}))ds, \ l,k = \overline{1, \widetilde{N}}.$$

Для вычисления β_{lk} необходимо найти закон действия оператора B_σ^{-1}. Для этого в пространстве $L_{2,0}(-s_0, s_0) := \{u = u(s) \in L_2(-s_0, s_0),$ $\int\limits_{-s_0}^{s_0} u(s)ds = 0\}$ рассмотрена задача

$$B_\sigma u := P_\Gamma L_\sigma P_\Gamma u = f, \quad u = u(s) \in L_{2,0}(-s_0, s_0), \ \ f = f(s) \in L_{2,0}(s_0, s_0), \quad (39)$$

$$L_\sigma u := -u'' + a_\sigma(s)u, \ -s_0 < s < s_0, \ -u' + \chi u|_{s=-s_0} = 0, \ u' + \chi u|_{s=s_0} = 0, \ \chi = \mathrm{ctg}(\delta). \quad (40)$$

Теорема 4.2.1. Задача (39), (40) имеет единственное решение в пространстве $L_{2,0}(-s_0, s_0) = H_1 \oplus H_2$, которое представляется в виде

$$u(s) = \int_{-s_0}^{s_0} G(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho,$$

где H_1 и H_2 — пространства нечетных и четных функций переменной s,

$$G(s, \varrho) = \begin{cases} v_2(s)v_1(\varrho) + \frac{1}{2}w(s,\sigma) & -s_0 \le \varrho \le s \le s_0, \\ v_1(s)v_2(\varrho) + \frac{1}{2}w(s,\sigma) & -s_0 \le s \le \varrho \le s_0, \end{cases} ,$$

$$w(s,\sigma)=\tau_3^{-1}F(s)F(\varrho)+\frac{\tau_1}{\tau_2}v_2(s)v_2(\varrho)-\frac{\tau_2}{\tau_1}v_1(s)v_1(\varrho)-v_1(s)v_2(\varrho)-v_2(s)v_1(\varrho),$$

$$F(s)=\Big(\frac{\tau_1}{\tau_2}\psi_2(s)-\psi_1(s)\Big)v_2(s)+v_2(s)\psi_1(s)-v_1(s)\psi_2(s),$$

$$\tau_3:=-\int_0^{s_0}F(s)ds,\ \tau_j:=v_j'(s_0)+\chi v_j(s_0),\ \psi_j(s)=\int_0^s v_j(\varrho)d\varrho,\ j=1,2,$$

функции $v_1=v_1(s)\in H_1$ и $v_2=v_2(s)\in H_2$ являются решениями задач

$$-v_1''+a_\sigma(s)v_1=0,\quad -s_0<s<s_0,\quad v_1(0)=0,\ v_1'(0)=1,$$

$$-v_2''+a_\sigma(s)v_2=0,\quad -s_0<s<s_0,\quad v_1(0)=1,\ v_1'(0)=0. \qquad \square$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В работе получена полная математическая постановка задачи о равновесном состоянии ГС в условиях, близких к невесомости; найдены условия устойчивости и граница области устойчивости равновесного состояния, зависящая от коэффициента перегрузки. Показано, что устойчивость равновесного состояния определяется знаком второй вариации ПЭ и потому определяется знаком минимального собственного значения ассоциированной спектральной задачи.

В диссертации на случай проблемы малых колебаний ГС в условиях, близких к невесомости, распространен основанный на использовании теории операторных блок-матриц подход сведения исходной НКЗ к эквивалентной задаче Коши для ДОУ в ортогональной сумме ГП. Изучены полученные в результате применения этого подхода начально-краевая и спектральная задачи. Установлены спектральные свойства и свойства системы СФ задачи о собственных колебаниях ГС и получены условия сильной разрешимости НКЗ на произвольном отрезке времени, доказано обращение теоремы Лагранжа об устойчивости (о достаточных условиях неустойчивости сильного решения НКЗ), получено разложение сильного решения в ряд Фурье по СФ спектральной задачи.

Изучены спектральные задачи сопряжения, возникающие в проблеме собственных колебаний ГС в условиях, близких к невесомости. Здесь установлено асимптотическое поведение собственных значений и наличие двух типов решений, соответствующих поверхностным и внутренним волнам. Важным с точки зрения приложений является построение проекционного метода, основанного на вариационных соотношениях для обобщенного решения, а также вычислительных схем для нахождения равновесных состояний ГС в цилиндрическом контейнере и прямоугольном канале, в условиях близких к невесомости. Проведенная апробация вычислительной методики подтвердила ее применимость, показала соответствие полученных результатов с выводами, полученными при качественном исследовании изучаемых задач.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю профессору Копачевскому Николаю Дмитриевичу за полезные обсуждения, важные рекомендации и поддержку. Автор также признателен коллективу кафедры математического анализа за активное участие в обсуждении результатов исследования на научных семинарах и ценные замечания.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Газиев Э. Л. Задача статики гидросистемы "жидкость-газ" в условиях, близких к невесомости / Э. Л. Газиев // Труды Ин-та прикл. матем. и механики НАНУ. – 2010. – Т. 20. – С. 39-47.

2. Газиев Э. Л. О малых движениях и собственных колебаниях системы "идеальная жидкость–баротропный газ" / Э. Л. Газиев // Таврический вестник информатики и матем. – 2011. – № 1. – С. 127-137.

3. Газиев Э. Л. Собственные колебания гидросистемы "жидкость-газ" в цилиндрической области / Э. Л. Газиев // Динамические системы. – Т. 2(30), № 1-2. – 2012. – С. 3-22.

4. Газиев Э. Л. Малые движения и собственные колебания гидросистемы "жидкость–баротропный газ" / Э. Л. Газиев, Н. Д. Копачевский // Украинский матем. вестник. — 2013. — Т. 10, № 1. — С. 16–53.

5. Газиев Э. Л. Спектральная задача с условиями сопряжения на криволинейной границе / Э. Л. Газиев // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Серия "Физико-матем. науки". — 2014. — Т. 27(66), № 1. — С. 45–57.

6. Газиев Э. Л. Об обращении оператора потенциальной энергии в проблеме собственных колебаний системы "капиллярная жидкость-газ" / Э. Л. Газиев, Н. Д. Копачевский, З. З. Ситшаева // Динамические системы. — Т. 4(32), № 1-2. — 2014. — С. 9–18.

7. Gaziev E. L. Small motions and eigenoscillations of a "fluid-barotropic gas" hydrosystem / E. L. Gaziev, N. D. Kopachevsky // Journal of Math. Sciences. — Vol. 192, No. 4, 2013. — P. 389–416.

8. Газиев Э. Л. Математическая модель равновесия системы "идеальная жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости / Э. Л. Газиев // BONUM INITIUM (Хорошее начало): Сб. науч. статей магистрантов Крымского инженерно-педагогического ун-та. — Симферополь: НИЦ КИПУ, 2008. — Вып. 2. — С. 30–36.

9. Газиев Э. Л. К проблеме малых колебаний гидросистемы "жидкость–газ" / Э. Л. Газиев // Сб. тезисов XXII Крымской осенней междунар. матем. школы-симпозиума КРОМШ-2011. — Симферополь: КНЦ НАНУ, 2011. — С.13–14.

10. Газиев Э. Л. О спектральной задаче в проблеме малых движений гидросистемы "жидкость-баротропный газ" / Э. Л. Газиев // Материалы XL науч. конф. "Дни науки ТНУ им. В. И. Вернадского". — Симферополь: ДИАЙПИ, 2011. — С. 48–50.

11. Газиев Э. Л. Задача статики гидросистемы "жидкость-газ" в условиях, близких к невесомости / Э. Л. Газиев // Сб. докл. II междунар. конф. молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям. — Донецк: ДонГУ, 2008. — С. 141–142.

12. Газиев Э. Л. Об определении равновесных границ раздела гидросистемы "жидкость-баротропный газ" и их устойчивости / Э. Л. Газиев // Book of Abstracts of the XXIII Crimean Autumn Math. School-Sympos. — Симферополь: КНЦ НАНУ, 2012. — С. 16–18.

13. Газиев Э. Л. К определению равновесной поверхности жидкости в системе "жидкость-газ" и ее устойчивости / Э. Л. Газиев // Сб. тезисов IV междунар. конф. молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям. — Донецк, 2012. — С. 34–35.

14. Газиев Э. Л. О вычислительных схемах определения равновесной поверхности жидкости в гидросистеме "жидкость-газ" для сосудов различных форм / Э. Л. Газиев // Матер. XLII науч. конф. "Дни науки ТНУ им. В. И. Вернадского". – Симферополь: ДИАЙПИ, 2013. – С. 289-291.

15. Газиев Э. Л. Малые движения и собственные колебания системы "идеальная жидкость-баротропный газ" в условиях, близких к невесомости / Э. Л. Газиев // Сб. тезисов междунар. науч. конф. "Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения", Севастополь, Украина, 23-30 июня 2013. — К.: ИМ НАНУ. — С. 296–297.

16. Gaziev E. L. Spectral problem corresponding to eigenoscillations of system "fluid-barotropic gas"in cylindrical vessel / E. L. Gaziev // Intern. Conference "Nonlinear Partial Differential Equations", dedicated to the 95th anniversary of the NASU (NPDE-2013), Donetsk, Ukraine, September, 9–14, 2013. — P. 22–23.

17. Gaziev E. On the modeling of static equilibrium of the system "ideal fluid-barotropic gas"/ E. Gaziev / Intern. Conference "Analysis and Mathematical Physics", (AMPH-2013), Kharkiv, Ukraine, June, 24–28, 2013. — P. 22–23.

18. Газиев Э. Л. Моделирование собственных колебаний системы "идеальная капиллярная жидкость-баротропный газ" в цилиндрическом контейнере / Э. Л. Газиев // Book of Abstracts of Crimean Intern. Mathematics Conference. – Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. – Т. 3 – С. 51-52.

19. Газиев Э. Л. О вариационном подходе к решению одной спектральной задачи сопряжения с искомым параметром в уравнении и условии на криволинейной границе / Э. Л. Газиев / XXII Междунар. науч. конф. "Математика. Экономика. Образование". VIII Междунар. симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". VIII Междисципл. семинар "Математические модели и информационные технологии в науке и производстве". Дюрсо, 27 мая–3 июня 2014г. — Ростов-на-Дону: СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014. — С. 46.

АННОТАЦИЯ

Газиев Э. Л. Задачи статики, устойчивости и малых колебаний гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные

уравнения, динамические системы и оптимальное управление. — Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского Министерства образования и науки Российской федерации, Симферополь, 2014 г.

Диссертация посвящена исследованию задач статики, устойчивости и малых движений гидросистемы, состоящей из капиллярной идеальной жидкости и баротропного газа в сосуде, находящемся в условиях микрогравитации. Газ в состоянии покоя является стратифицированным по экспоненциальному закону.

Основными методами исследования являются операторный подход к изучению линейных проблем гидродинамики, вариационные и численно-аналитические методы исследования проблем гидродинамики невесомости, метод вспомогательных краевых задач С.Г. Крейна и отвечающих им операторов, действующих в соответственно подобранных гильбертовых пространствах, метод проектирования уравнений движения на ортогональные подпространства, естественно связанные с изучаемыми задачами, используются также обобщенные формулы Грина для смешанных краевых задач.

В работе получена полная математическая постановка задачи о равновесном состоянии гидросистемы, найдены условия устойчивости и граница области устойчивости равновесного состояния, зависящая от коэффициента перегрузки. Показано, что устойчивость равновесного состояния определяется знаком минимального собственного значения ассоциированной спектральной задачи. Задача о малых колебаниях гидросистемы приведена к начально-краевой задаче для потенциалов смещений в жидкости и газе и эквивалентной задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Установлены спектральные свойства и свойства системы собственных функций задачи о собственных колебаниях гидросистемы, получены условия сильной разрешимости задачи Коши на произвольном отрезке времени, а также начально-краевой задачи для потенциалов смещений. Получены достаточные условия неустойчивости сильного решения и его представление в виде ряда Фурье по собственным элементам спектральной задачи.

В работе изучены спектральные задачи с горизонтальной и негоризонтальной границей сопряжения, возникающие в проблеме собственных колебаний гидросистемы. Получено асимптотическое поведение собственных значений и установлено наличие двух типов решений, соответствующих поверхностным и внутренним волнам. Построен проекционный метод, основанный на вариационных соотношениях для обобщенного решения, а также вычислительные схемы для нахождения равновесных состояний системы в цилиндрическом контейнере и прямоугольном канале. Найдено интегральное представление оператора, обратного к оператору потенциальной энергии системы.

Ключевые слова: начально-краевая задача, спектральная задача, условие сопряжения, спектр, собственная функция, проекционный метод, стратификация, жидкость, газ, сильное решение, обобщенное решение, дифференциально-операторное уравнение, устойчивость.

ABSTRACT

Gaziev E. L. The problem of statics, stability and small oscillations of hydrosystem "fluid-barotropic gas" in conditions close to zero gravity. — Manuscript.

The dissertation for obtaining scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control. — National Tavrida V.I. Vernadsky University of Ministry of Education, Science of Russian Federation, Simferopol, 2014.

The thesis explores the problems of statics, stability and small movements of the hydrosystem, consisting of a capillary ideal fluid and barotropic gas in the vessel, which is located in microgravity conditions. Gas at rest is stratified exponentially.

The basic methods are operator approach to the investigation of linear problems of hydrodynamics; variational and numerical-analytical methods of the investigation of hydrodynamics problems; the S.G. Krein's method of the auxiliary boundary value problems and the corresponding operators in appropriately selected Hilbert spaces; the method of orthogonal projection of the motion equations onto the orthogonal subspaces that are naturally associated with the considered problems; the generalized Green's method for the mixed boundary value problems is also used.

A complete mathematical formulation of the hydrosystem equilibrium state problem is obtained, stability conditions and the boundary of the stability of the equilibrium state which depends on the overload factor are established. It is shown that the stability of the equilibrium state is determined by the sign of the minimal eigenvalue of the associated spectral problem. The problem of small oscillations of the hydrosystem is reduced to the initial-boundary value problem for the displacement potentials in fluid and gas and the equivalent Cauchy problem for the differential operator equation in the orthogonal sum of Hilbert spaces. The spectral properties and the properties of the system of eigenfunctions of the eigenoscillations problem of the hydrosystem are found out. The conditions of strong solvability of the Cauchy problem for an arbitrary time interval, as well as the initial-boundary value problem for the displacement potentials are established. The sufficient conditions of the instability of a strong solution and its representation as a Fourier series by eigenfunctions of the spectral problem are obtained.

The spectral problems with horizontal and non-horizontal boundary interface arising in the problem of eigenoscillations of the hydrosystem are considered. The asymptotic eigenvalues behavior and the presence of two types of solutions corresponding to the surface and internal waves are revealed. To find the equilibrium state of the system in a cylindrical container and a rectangular channel the projection method based on a variational relation for a generalized solution and computational schemes are constructed. The theorem on integral representation of an inverse operator to the operator of the potential energy of the system is proved.

Keywords: initial boundary value problem, spectral problem, conjugation condition, spectrum, eigenfunction, projection method, stratification, fluid, gas, strong solution, generalized solution, differential operator equation, stability.